Répondre par Vrai ou Faux.

Question 1. On considère les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad g(x) = \arcsin(f(x)) = \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right).$$

1. La dérivée de f est donnée par $f'(x) = \dfrac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$ pour tout x réels.
2. On a $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$.
3. La dérivée de arcsin sur $]-1,1[$ est donnée par

$$\arcsin'(u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}.$$

4. Pour tout x réel, $g'(x) = \arctan'(x)$.
5. Pour tout x réel, $g(x) = \arctan(x) + \frac{\pi}{4}$.

Corrigé.

1. Vrai.

$$f'(x) = \frac{1(\sqrt{1+x^2}) - x\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{(1+x^2)} = \frac{\frac{1+x^2-x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{(1+x^2)} = \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$$

2. Faux. On factorise par les termes dominants. Comme $x \to -\infty$, on a $\sqrt{x^2} = |x| = -x$.

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}} = \frac{x}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \frac{-1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$

Donc

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$$

3. Vrai. Voir le cours.
4. Vrai. On a $g(x) = \arcsin(f(x))$ donc $g'(x) = f'(x)\arcsin'(f(x))$:

$$g'(x) = \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}} = \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{1+x^2}}} = \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}\frac{1}{\sqrt{\frac{1+x^2-x^2}{1+x^2}}}$$

$$= \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{1+x^2}}} = \frac{1}{(1+x^2)} = \arctan'(x)$$

5. Faux. D'après l'égalité précédente, en primitivant on a $g(x) = \arctan(x) + c$ avec c une constante à déterminer. On prend $x = 0$ et on obtient

$$g(0) = \arctan(0) + c \quad \Leftrightarrow \quad c = g(0) = \arcsin(0) = 0$$

Donc $g(x) = \arctan x$.

Question 2. On note $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout réel x, par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{e^x - 1} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

On souhaite étudier la courbe représentative de f au voisinage de 0 grâce à un développement limité de $f(x)$ en 0. La notation ϵ représente une fonction qui a pour limite 0 en 0 et qui n'est pas nécessairement la même à chaque item.

1. Le développement limité à l'ordre 3 de $e^x - 1$ au voisinage de 0 est

$$e^x - 1 = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3\epsilon(x).$$

2. f est continue en 0.
3. Le développement limité à l'ordre 2 de $\frac{1}{1+u}$ au voisinage de 0 est

$$\frac{1}{1+u} = 1 + u + u^2 + u^2\epsilon(u).$$

4. Le développement limité à l'ordre 2 de $f(x)$ au voisinage de 0 est

$$f(x) = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} + x^2\epsilon(x).$$

5. La courbe représentative de f se situe au-dessus de sa tangente en 0 au voisinage de 0.

Corrigé.

1. Vrai. Voir le cours
2. Vrai. Pour $x \neq 0$,

$$f(x) = \frac{x}{e^x - 1} \sim \frac{x}{x} \sim 1, \quad \lim_{x \to 0} f(x) = 1 = f(0)$$

3. Faux. La formule donnée est celle de $\frac{1}{1-u}$.

$$\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 + u^2\epsilon(u).$$

4. Faux. On fait le développement limité de f. D'après la question 1 :

$$f(x) = \frac{x}{x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3\epsilon(x)} = \frac{1}{1 + \underbrace{\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + x^2\epsilon(x)}_{u}}$$

$$= 1 - \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6}\right) + \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6}\right)^2 + x^2\epsilon(x) = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{6} + \frac{x^2}{4} + x^2\epsilon(x)$$

$$f(x) = \underbrace{1 - \frac{x}{2}}_{T} + \frac{x^2}{12} + x^2\epsilon(x)$$

5. Vrai. D'après la question précédente, la tangente à la courbe de f en 0 est $T(x) = 1 - \frac{x}{2}$. Donc au voisinage de 0

$$f(x) - T(x) = \frac{x^2}{12} + x^2\epsilon(x) > 0$$

Donc la courbe de f est au-dessus de la tangente T.

Question 3. On se propose de calculer les intégrales

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\tan x)dx, \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)dx, \quad K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x)dx.$$

1. L'intégrale $\int_0^1 \ln x dx$ diverge.
2. On a $I = J - K$.
3. En effectuant le changement de variable $t = \tan x$, on obtient

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\ln t}{1+t^2} dt.$$

4. Une primitive de $\frac{\ln t}{1+t^2}$ est $\arctan(\ln t)$.
5. A l'aide du changement de variable $t = \frac{1}{u}$, on trouve

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^2} dt = \int_1^{\infty} \frac{\ln t}{1+t^2} dt.$$

Corrigé.

1. Faux. L'intégrale $\int_0^1 \ln x dx$ converge. Voir cours.
2. Vrai.

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\sin x\right)-\ln\left(\cos x\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x)dx=J-K$$

3. Vrai. $t=\tan x$ donne :

$$\arctan t=x, \quad \frac{dt}{1+t^2}=dx, \quad x=0\to t=0, \quad x=\frac{\pi}{2}\to t=+\infty$$

On fait le changement de variable et on a

$$I=\int_0^{+\infty}\ln(t)\frac{dt}{1+t^2}=\int_0^{\infty}\frac{\ln t}{1+t^2}dt.$$

4. Faux. La dérivée de $\arctan(\ln t)$ est $\frac{\frac{1}{t}}{1+\ln t}$, donc une primitive de $\frac{\frac{1}{t}}{1+\ln t}$ est $\arctan(\ln t)$. Donc une primitive de $\frac{\ln t}{1+t^2}$ est une autre fonction !
5. Faux. Le changement de variable est le suivant

$$t=\frac{1}{u}, \quad \frac{-du}{u^2}=dt, \quad t=0^+\to u=+\infty, \quad t=1\to u=1$$

Donc

$$\int_0^1\frac{\ln t}{1+t^2}dt=\int_{+\infty}^1\frac{\ln\left(\frac{1}{u}\right)}{1+\left(\frac{1}{u}\right)^2}\times\frac{-du}{u^2}=\int_{+\infty}^1\frac{-\ln u}{1+\frac{1}{u^2}}\times\frac{-du}{u^2}=\int_{+\infty}^1\frac{\ln u}{u^2+1}du=-\int_1^{+\infty}\frac{\ln u}{u^2+1}du$$

Question 4. Cette question fait suite à la précédente, dont on reprendra les notations.

1. On a $I=0$.
2. On a $J=K$.
3. On a

$$J+K=2J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin(2x))dx.$$

4. On a

$$\int_0^{\pi}\ln(\sin x)dx=2J$$

5. On a

$$J=K=-\frac{\pi}{2}\ln(2).$$

Corrigé.

1. Vrai. D'après le 3.3), on a

$$I=\int_0^{\infty}\frac{\ln t}{1+t^2}dt=\int_0^1\frac{\ln t}{1+t^2}dt+\int_1^{\infty}\frac{\ln t}{1+t^2}dt$$

D'après le 3.5), on a

$$I=\int_0^1\frac{\ln t}{1+t^2}dt-\int_0^1\frac{\ln t}{1+t^2}dt=0$$

2. Vrai. D'après le 3.2), on a $I=J-K$, or $I=0$ donc $J=K$.
3. Faux. Certes, on a bien $J+K=2J$ d'après ce qui précède. Mais

$$2J=J+K=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\cos x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x\cos x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(\frac{1}{2}\sin(2x)\right)dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(\sin(2x)\right)dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(2)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(\sin(2x)\right)dx-\frac{\pi}{2}\ln(2)$$

4. Faux. On fait le changement de variable $y = 2x$ dans le calcul précédent

$$dy = 2dx \quad x = 0 \to y = 0, \quad x = \frac{\pi}{2} \to y = \pi$$

et il vient

$$2J = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln(\sin(y))\, dy - \frac{\pi}{2}\ln(2)$$

5. Vrai. On a

$$\int_0^{\pi} \ln(\sin(y))\, dy = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(y))\, dy + \int_{\pi/2}^{\pi} \ln(\sin(y))\, dy = J + \int_{\pi/2}^{\pi} \ln(\sin(y))\, dy$$

Dans la deuxième intégrale, on fait le changement de variable suivant

$$z = y - \frac{\pi}{2}, \quad dz = dy, \quad y = \frac{\pi}{2} \to z = 0, \quad y = \pi \to z = \frac{\pi}{2}, \sin y = \sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = \cos z$$

Donc

$$\int_0^{\pi} \ln(\sin(y))\, dy = J + \int_0^{\pi/2} \ln(\cos(z))\, dz = J + K = 2J.$$

On reporte dans l'égalité trouvée à la fin de la question précédente :

$$2J = \frac{1}{2}2J - \frac{\pi}{2}\ln(2), \quad \Leftrightarrow \quad J = -\frac{\pi}{2}\ln(2) = K$$

Question 5. On considère le polynôme $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ défini par

$$P(z) = z^3 + 3iz^2 + (4i - 9)z - 15i.$$

Le polynôme P admet une unique racine réelle notée a, et on admet que P se factorise de la manière suivante :

$$P(z) = (z - a)R(z), \qquad \text{avec } R(z) = z^2 + 3(i - 1)z - 5i.$$

On note r_1 et r_2 les deux racines complexes de R.

1. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, la partie réelle de $P(z)$ est $z^3 - 9z$.
2. L'unique racine réelle de P est $a = 3$.
3. Le discriminant de $R(z)$ est $\Delta = 2i$.
4. Les racines carrées de Δ sont $\pm(1 + i)$.
5. On a $r_1 = 1 - 2i$ et $r_2 = 2 - i$.

Corrigé.

1. Faux. z étant complexe, $z^3 - 9z$ est complexe (et pas toujours réel). Or la partie réelle d'un nombre est un réel.
2. Faux. On teste $P(3) = 27+27i+12i-27-15i = 24i \neq 0$, donc 3 n'est pas racine. Par contre, en changeant certains signes dans ce calcul, ça marche alors on teste $P(-3) = -27 + 27i - 12i + 27 - 15i = 0$. Donc $a = -3$.
3. Vrai.
$$\Delta = 3^2(i - 1)^2 - 4 \times (-5i) = -18i + 20i = 2i$$
4. Vrai. Soit on vérifie que $(\pm(1 + i))^2 = 2i$, ce qui veut dire que $\pm(1 + i)$ sont les racines carrées de Δ. Soit on met Δ sous forme exponentielles $\Delta = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$ et on cherche les racines carrées sous forme exponentielle. On obtient
$$\delta = \pm\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = \pm\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pm(1 + i)$$
5. Vrai.
$$r_1 = \frac{-3(i - 1) + (1 + i)}{2} = \frac{4 - 2i}{2} = 2 - i, \qquad r_2 = \frac{-3(i - 1) - (1 + i)}{2} = \frac{2 - 4i}{2} = 1 - 2i$$

Question 6. On considère les deux équations différentielles linéaires, où la variable est $x \in \mathbb{R}$, et la fonction inconnue $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$(H) : \quad 3y'(x) + xy(x) = 0, \qquad (S) 3y'(x) + xy(x) = x^3.$$

Les solutions de l'équation (H) sont de la forme $y(x) = Af(x)$ où $A \in \mathbb{R}$ et f est une fonction à déterminer vérifiant $f(0) = 1$.

On cherchera ensuite une solution particulière de (S) sous la forme $y_0(x) = A(x)f(x)$, où A est une fonction dérivable telle que $A_0(0) = 0$.

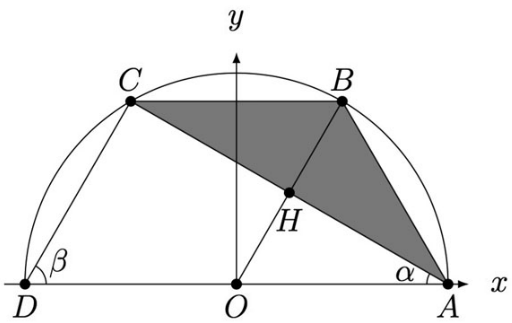
1. On a $f(x) = e^{-\frac{x^2}{6}}$.
2. On a $A'(x) = x^3 e^{-\frac{x^2}{6}}$.
3. En effectuant le changement de variable $u = t^2/6$ dans l'égalité $A(x) = \int_0^x A'(t)dt$, on obtient $A(x) = \int_0^{x^2/6} ue^u du$.
4. On a $\int_0^{x^2/6} ue^u du = 1 + \left(\frac{x^2}{6} - 1\right) e^{\frac{x^2}{6}}$.
5. La solution y_1 de l'équation (S) qui s'annule en 0 est $y_1(x) = x^2 - 6 + 6e^{-x^2/6}$.

Corrigé.

1. Vrai. (H) devient $y' + \frac{x}{3}y = 0$ et une primitive de $\frac{x}{3}$ est $\frac{x^2}{6}$. Donc
$$y_h(x) = Ae^{-\frac{x^2}{6}}$$
On a bien $f(x) = e^{-\frac{x^2}{6}}$ et $f(0) = e^0 = 1$.
2. Faux. On fait la méthode de variation de la constante comme suggéré dans l'énoncé en posant $y_0(x) = A(x)e^{-\frac{x^2}{6}}$. On reporte dans (H) :
$$3\left(A'(x)e^{-\frac{x^2}{6}} + \frac{x}{3}A(x)e^{-\frac{x^2}{6}}\right) + xA(x)e^{-\frac{x^2}{6}} = x^3$$
$$3A'(x)e^{-\frac{x^2}{6}} = x^3$$
$$A'(x) = \frac{x^3}{3}e^{\frac{x^2}{6}}$$
3. Faux.
$$A(x) = \int_0^x A'(t)dt = \int_0^x \frac{t^3}{3}e^{\frac{t^2}{6}}dt$$
On fait le changement de variable suivant :
$$u = \frac{t^2}{6}, \quad du = \frac{t}{3}dt, \quad t = 0 \to u = 0, \quad t = x \to u = \frac{x^2}{6}$$
$$A(x) = \int_0^x t^2 e^{\frac{t^2}{6}} \frac{t}{3}dt = \int_0^{\frac{x^2}{6}} 6ue^u du = 6\int_0^{\frac{x^2}{6}} ue^u du$$
4. Vrai. On fait une intégration par partie :
$$\int_0^{\frac{x^2}{6}} ue^u du = [ue^u]_0^{\frac{x^2}{6}} - \int_0^{\frac{x^2}{6}} e^u du = \frac{x^2}{6}e^{\frac{x^2}{6}} - [e^u]_0^{\frac{x^2}{6}}$$
$$= \frac{x^2}{6}e^{\frac{x^2}{6}} - e^{\frac{x^2}{6}} + 1 = \left(\frac{x^2}{6} - 1\right)e^{\frac{x^2}{6}} + 1$$
5. Vrai. On en déduit que
$$A(x) = 6\left(\frac{x^2}{6} - 1\right)e^{\frac{x^2}{6}} + 6 = (x^2 - 6)e^{\frac{x^2}{6}} + 6, \qquad y_0(x) = \left((x^2-6)e^{\frac{x^2}{6}} + 6\right)e^{-\frac{x^2}{6}} = (x^2 - 6) + 6e^{-\frac{x^2}{6}}$$
Donc les solutions de (S) sont :
$$y(x) = (x^2 - 6) + (6 + A)e^{-\frac{x^2}{6}}$$
Pour $x = 0$, on a
$$0 = y(0) = (0^2 - 6) + (6 + A)e^0 = A, \qquad \text{donc} \quad y(x) = (x^2 - 6) + 6e^{-\frac{x^2}{6}}$$

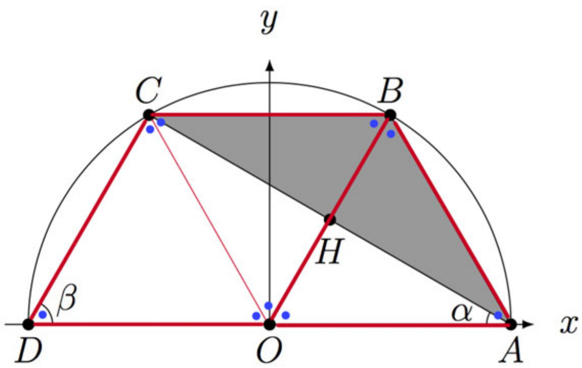
Question 7. Dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère le demi-cercle supérieur de centre O, de rayon r, et les points $A = (r, 0)$, $D = (-r, 0)$. Les points B et C sont sur le demi-cercle de sorte que le polygone $ABCD$ soit la moitié d'un hexagone régulier, c'est à dire $AB = BC = CD = r$. On appelle H l'intersection des droites (AC) et (BO). Dans le triangle ACD, on note α l'angle en A et β l'angle en D.

On suppose que la surface du demi-disque de rayon r est égale à $\frac{1}{2}$. On veut déterminer la surface S du triangle ABC, grisée sur la figure suivante.



1. On a $\cos(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
2. La surface S du triangle ABC vaut $AC \times BH$.
3. On a $AC = 2r\cos(\alpha) = r$.
4. On a $r = \frac{1}{\pi}$.
5. La surface du triangle ABC est $S = \frac{\sqrt{3}}{\pi}$.

Corrigé. Commençons par analyser la figure. Comme on a un cercle, on a $OA = OB = OC = OD = r$. On représente en rouge les longueurs égales à r sur le dessin ci-dessous.



On constate que OBC et OBA sont donc des triangles équilatéraux, et donc que l'angle $\beta = \frac{\pi}{3}$, ainsi que tous les angles notés par un point bleu.

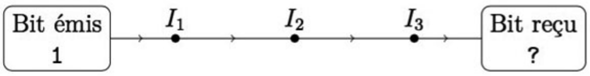
Le point C est à égale distance de O et B. Le point A est à égale distance de O et B. On en déduit que la droite (AC) est la médiatrice du segment $[OB]$, donc que H est le milieu de $[OB]$ et que (AC) est orthogonal à $[OB]$.

Dans le triangle equilatéral OAB, on a donc que (AH) est la hauteur issue de A, donc aussi la bissectrice de l'angle situé en A. Donc α est la moitié de l'angle en A.

1. Vrai. D'après ce qui précède, $\alpha = \frac{1}{2}\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$, donc $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
2. Faux. Comme $[BH]$ est orthogonal à $[AC]$, alors $[BH]$ est la hauteur issue de B. Donc l'aire du triangle est
$$S = \frac{Base \times Hauteur}{2} = \frac{AC \times BH}{2}$$
Notons que comme H est le milieu de $[OB]$ donc $BH = \frac{r}{2}$.
3. Faux. Dans le triangle ACD, on a les angles $\beta = \frac{\pi}{3}$ et $\alpha = \frac{\pi}{6}$ donc l'angle en C est $\pi - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$ un angle droit. Donc le triangle est rectangle en C. Donc
$$\cos\alpha = \frac{AC}{AD} = \frac{AC}{2r} \quad \Leftrightarrow \quad AC = 2r\cos\alpha = 2r\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}r$$

4. Vrai. L'aire du demi-disque est $\frac{1}{2}$, donc l'aire du disque est 1. Or, l'aire d'un disque est donnée par πr^2, donc on a
$$r^2 = \frac{1}{\pi}, \qquad r = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$
5. Faux. De ce qui précède, il vient
$$S = \frac{AC \times BH}{2} = \frac{\sqrt{3}r \times \frac{r}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}r^2}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4\pi}$$

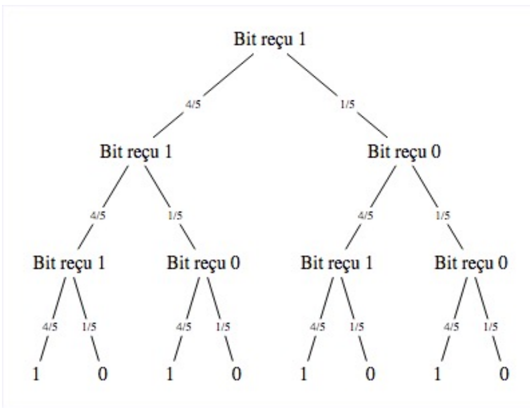
Question 8. On étudie la transmission d'un bit (une information binaire de valeur 0 ou 1) à travers trois relais successifs notés I_1, I_2 et I_3. Un bit de valeur 1 est envoyé à I_1 qui le transmet à I_2, et ainsi de suite. Les relais I_1, I_2 et I_3 ne sont pas fiables : ils peuvent se tromper de manière indépendante. On fait l'hypothèse que chacun renvoie l'information qu'il reçoit du relais précédent avec la probabilité 4/5 et l'information contraire avec la probabilité 1/5. Ainsi, deux erreurs successives se neutralisent.



Pour tout $k \in \{1, 2, 3\}$, on note E_k l'évenement « I_k transmet un bit de valeur 1 » et $p_k = P(E_k)$. De plus, on pose $p_0 = 1$. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de relais qui transmettent un bit de valeur 1.

1. La variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = \frac{4}{5}$.
2. Pour tout $k \in \{2, 3\}$, on a $P(E_k|E_{k-1}) = \frac{4}{5}$
3. $P(E_1|E_2) = \frac{15}{16}$.
4. Pour tout $k \in \{2, 3\}$, on a $p_k = \frac{3}{5}p_{k-1} + \frac{1}{5}$.
5. On a $P(X = 0) = \frac{16}{125}$.

Corrigé. On peut construire un arbre en regardant les informations transmises par les trois relais successivement. Le bit reçu par I_1 (en haut de l'arbre) est toujours 1. Tout en bas, c'est l'information finale reçue.



1. Faux. car l'information transmise par le relais I_2 dépend de l'information reçue, et donc le l'information émise par I_1. De même pour I_3. Il n'y a pas d'indépendance, donc ce n'est pas une loi binomiale.
2. Vrai. E_k sachant E_{k-1} signifie « envoyer 1 sachant que le précédent relais a envoyé 1 », c'est-à-dire « envoyer l'information reçue sachant que le précédent relais a envoyé 1 ». Cette probabilité de renvoyer l'information reçue est $\frac{4}{5}$ d'après l'énoncé.
3. Faux.
$$P(E_1|E_2) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_2)}$$
Or $E_1 \cap E_2$ signifie que les relais I_1 et I_2 successivement ont transmis 1, évenement qui a probabilité $\frac{4}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{16}{25}$ de se produire.
E_2 signifie que I_2 a transmis 1. Soit suite à la réception d'un 1 (probabilité $\frac{16}{25}$ d'après ce qui précède). Soit suite à la réception d'un 0, c'est à dire I_1 ayant transmis le bit contraire, donc 0, et I_2 ayant aussi transmis le bit contraire, donc 1. Cet évènement est de probabilité $\frac{1}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{25}$.

4. Vrai.
$$p_k = P(E_k) = P(E_k|E_{k-1})P(E_{k-1}) + P(E_k|\overline{E_{k-1}})P(\overline{E_{k-1}})$$
D'après la question 2, $P(E_k|E_{k-1}) = 4/5$. Et pour $P(E_k|\overline{E_{k-1}})$, c'est renvoyer 1 en ayant reçu 0, donc probabilité 1/5. On en déduit
$$p_k = \frac{4}{5}p_{k-1} + \frac{1}{5}(1-p_{k-1}) = \frac{3}{5}p_{k-1} + \frac{1}{5}$$
5. Vrai. $X = 0$ signifie que tous les relais ont transmis 0. C'est à dire que I_1 qui a reçu 1 a transmis 0 (probabilité 1/5), I_2 qui a reçu 0 a transmis 0 (probabilité 4/5), I_3 qui a reçu 0 a transmis 0 (probabilité 4/5). Donc
$$P(X=0) = \frac{1}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{16}{125}$$

Question 9. On considère X la variable aléatoire de densité de probabilité
$$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda}{(1+x)^2} & \text{si} \quad x \in \left[\frac{1}{2}, 2\right], \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
où λ est une constante à déterminer pour que f ait les propriétés d'une densité de probabilité. On considère également la variable aléatoire $Y = \frac{1}{X}$.

1. On a $\lambda = 2$.
2. En remarquant que $\dfrac{x}{(1+x)^2} = \dfrac{1}{1+x} - \dfrac{1}{(1+x)^2}$, on a $E(X) = 3\ln(2) - 1$.
3. Pour $y \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$, $P(Y \leqslant y) = \dfrac{3y}{1+y} - 1$.
4. X et Y suivent la même loi de probabilité.
5. $E(Y) = \dfrac{1}{E(X)}$.

Corrigé.

1. Faux. Une densité doit vérifier $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1$, donc
$$1 = \int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{\lambda}{(1+x)^2}dx = \left[\frac{-\lambda}{1+x}\right]_{\frac{1}{2}}^{2} = \frac{-\lambda}{3} + \frac{\lambda}{1+\frac{1}{2}} = \frac{-\lambda}{3} + \frac{2\lambda}{3} = \frac{\lambda}{3}, \qquad \Rightarrow \qquad \lambda = 3.$$
2. Vrai. On vérifie que
$$\frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{1+x}{(1+x)^2} - \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{x}{(1+x)^2}$$
Et on l'utilise dans l'espérance :
$$E(X) = \int_{\frac{1}{2}}^{2} x\frac{3}{(1+x)^2}dx = \int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{3}{1+x} - \frac{3}{(1+x)^2}dx = \left[3\ln(1+x) + \frac{3}{1+x}\right]_{\frac{1}{2}}^{2}$$
$$= \left(3\ln(3) + \frac{3}{3}\right) - \left(3\ln\frac{3}{2} + \frac{3}{\frac{3}{2}}\right) = 3\ln(3) + 1 - 3\ln 3 + 3\ln 2 - 2 = 3\ln 2 - 1$$
3. Vrai.
$$P(Y \leqslant y) = P\left(\frac{1}{y} \leqslant X\right) = \int_{\frac{1}{y}}^{2} \frac{3}{(1+x)^2}dx = \left[\frac{-3}{1+x}\right]_{\frac{1}{y}}^{2} = \left(\frac{-3}{3}\right) - \left(\frac{-3}{1+\frac{1}{y}}\right)$$
$$= -1 + \frac{3y}{1+y} = \frac{2y-1}{1+y}$$
4. Vrai. On a
$$P(X \leqslant y) = \int_{\frac{1}{2}}^{y} \frac{3}{(1+x)^2}dx = \left[\frac{-3}{1+x}\right]_{\frac{1}{2}}^{y} = \left(\frac{-3}{1+y}\right) - \left(\frac{-3}{1+\frac{1}{2}}\right) = \frac{-3}{1+y} + 2 = \frac{2y-1}{1+y}$$
On a donc $P(X \leqslant y) = P(Y \leqslant y)$, donc les fonctions de répartitions de X et Y sont les mêmes, donc les variables aléatoires ont la même loi.

5. Faux. X et Y ayant la même loi, on a $E(X) = E(Y)$ (et ce nombre est différent de ± 1, donc différent de son inverse).

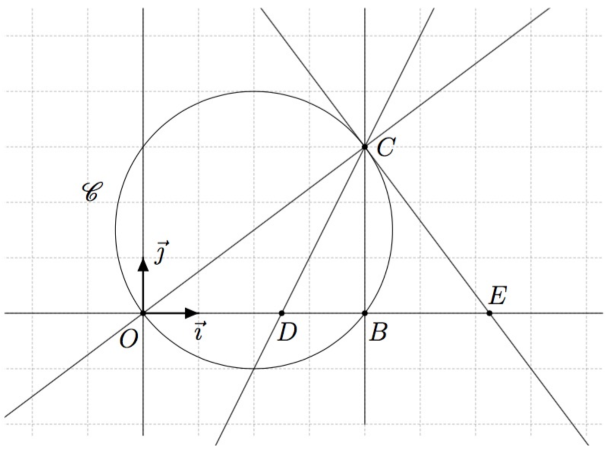
Question 10. On considère $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. On note I la matrice identité d'ordre 3.

1. On a $A^2 = 5A + 4I$.
2. Le scalaire 0 est une valeur propre de A.
3. Le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A.
4. Il existe deux suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que, pour tout entier naturel n, on ait $A^n = a_nA + b_nI$.
5. Pour tout entier n naturel non nul, $a_{n+1} = 5a_n - 4a_{n-1}$.

Corrigé.

1. Faux.
$$A^2 = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 5 \\ 5 & 10 & 5 \\ 5 & 5 & 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 5A - 4I$$
2. Faux. D'après ce qui précède :
$$\frac{A^2 - 5A}{-4} = I \quad \Leftrightarrow \quad A \underbrace{\frac{-A + 5I}{4}}_{A^{-1}} = I$$
La matrice A étant inversible, elle n'admet pas 0 comme valeur propre.
3. Vrai.
$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
Donc c'est un vecteur propre associé à la valeur propre 4.
4. Vrai. Par récurrence. Pour $n = 0$, on a $A^0 = I = 0A + 1I$ donc $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$.
Supposons la propriété vraie au rang n, c'est-à-dire $A^n = a_nA + b_nI$. Cherchons le rang $n + 1$:
$$A^{n+1} = AA^n = A(a_nA + b_nI) = a_nA^2 + b_nA = a_n(5A - 4I) + b_nA = \underbrace{(5a_n + b_n)}_{a_{n+1}} A + \underbrace{(-4a_n)}_{b_{n+1}} I$$
Donc la propriété est vraie au rang $n + 1$.
5. Vrai. D'après ce qui précède $a_{n+1} = 5a_n + b_n$ et $b_{n+1} = -4a_n$, donc $b_n = -4a_{n-1}$ qu'on reporte dans la première égalité :
$$a_{n+1} = 5a_n - 4a_{n-1}$$

Question 11. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère les points $B = (4, 0)$, $C = (4, 3)$ et $D = \left(\frac{5}{2}, 0\right)$. Le cercle circonscrit au triangle OBC est noté $\mathcal{C}$ et la tangente au cercle $\mathcal{C}$ en C coupe la droite (OB) en E.



1. L'équation $(x-2)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$ est une équation du cercle $\mathcal{C}$.
2. Pour tout point M du plan de coordonnées (x, y), la distance de M à la droite (OC) vaut
$$d(M,(OC)) = \frac{|3x+4y|}{5}.$$
3. La droite (CD) est la bissectrice de l'angle $\widehat{OCB}$.
4. La tangente au cercle $\mathcal{C}$ en C a pour équation $4x + 3y = 25$.
5. Le triangle DCE est isocèle en E.

Corrigé.

1. Vrai. On reporte les coordonnées des point O, B, C dans l'équation donnée :
$$O: \quad (0-2)^2 + \left(0 - \frac{3}{2}\right)^2 = 4 + \frac{9}{4} = \frac{25}{4}$$
$$B: \quad (4-2)^2 + \left(0 - \frac{3}{2}\right)^2 = 4 + \frac{9}{4} = \frac{25}{4}$$
$$C: \quad (4-2)^2 + \left(3 - \frac{3}{2}\right)^2 = (2)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 4 + \frac{9}{4} = \frac{25}{4}$$
Donc les trois points vérifient l'équation, donc c'est bien l'équation du cercle $\mathcal{C}$. Notons que le centre du cercle est $\Omega(2, 3/2)$, c'est le milieu de $[OC]$, donc $[OC]$ est un diamètre du cercle. Le rayon du cercle est $\frac{5}{2}$.
2. Faux. On cherche une équation de (OC). Un point $M(x, y)$ appartient à (OC) si et seulement si $\overrightarrow{OM}$ est colinéaire à $\overrightarrow{OC}$, donc
$$\det(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OC}) = 0 = \begin{vmatrix} x & 4 \\ y & 3 \end{vmatrix} \qquad \Leftrightarrow \qquad 3x - 4y = 0$$
Donc la distance de M à (OC) est
$$d(M,(OC)) = \frac{|3x-4y|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{|3x-4y|}{\sqrt{25}} = \frac{|3x-4y|}{5}.$$
3. Vrai. La droite (CB) étant verticale, son équation est $x = 4$, c'est-à-dire $x - 4 = 0$. Donc la distance d'un point M à (CB) est
$$d(M,(CB)) = \frac{|x-4|}{\sqrt{0^2+1^2}} = |x-4|$$
Calculons la distance de D aux droites (CB) et (OC) :
$$d(D,(CB)) = \left|\frac{5}{2} - 4\right| = \left|\frac{-3}{2}\right| = \frac{3}{2}, \qquad d(D,(OC)) = \frac{\left|3\frac{5}{2} - 4 \times 0\right|}{5} = \frac{\frac{15}{2}}{5} = \frac{3}{2}.$$
Donc D est équidistant des droites (CB) et (OC), de même pour C qui est à l'intersection des droites. Donc la bissectrice de l'angle $\widehat{OCB}$ est (CD).
4. Vrai. Comme OC est un diamètre du cercle, la tangente T au cercle en C est orthogonale à OC. Donc $M(x, y) \in T$ si $\overrightarrow{CM}$ est orthogonal à $\overrightarrow{OC}$, donc
$$\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{OC} = 0 \qquad \begin{pmatrix} x-4 \\ y-3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = 4x - 16 + 3y - 9 = 4x + 3y - 25 = 0$$
5. Vrai. Le point E est sur l'axe des abscisses donc $y_E = 0$. Il est sur la tangente T donc $4x_E + 3y_E = 25$. Donc $x_E = \frac{25}{4}$. On calcule les distances EC et ED au carré :
$$EC^2 = \left(\frac{25}{4} - 4\right)^2 + (3-0)^2 = \left(\frac{9}{4}\right)^2 + 9 = \frac{9^2}{16} + 9 = \frac{9^2 + 9 \times 16}{16} = \frac{9(9+16)}{16} = \frac{9 \times 25}{16} = \left(\frac{3 \times 5}{4}\right)^2 = \left(\frac{15}{4}\right)^2$$
$$ED^2 = \left(\frac{25}{4} - \frac{5}{2}\right)^2 + (0)^2 = \left(\frac{15}{4}\right)^2 = EC^2$$
Donc $ED = EC$ et le triangle est isocèle en E.

Question 12. Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère la courbe Γ de représentation paramétrique

$$\left\{\begin{array}{lcl} x(t) & = & \cos t - \sin t \\ y(t) & = & \cos t + \sin t \end{array}\right. \quad t \in [0, 2\pi].$$

1. La courbe Γ est symétrique par rapport à la droite d'équation $y = x$.
2. Pour tout $t \in [0, 2\pi]$,
$$y'(t) = \sqrt{2}\cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right).$$
3. Le tableau suivant donne les variations de y sur $[0, 2\pi]$.

t	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{5\pi}{4}$		2π
$y(t)$			$\sqrt{2}$				1
		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
	0				$-\sqrt{2}$		

4. La tangente à Γ en $t = \frac{\pi}{4}$ est verticale.
5. La courbe Γ est un cercle.

Corrigé.

1. Vrai. Pour $t \in [0, \pi]$, alors $t' = 2\pi - t \in [\pi, 2\pi]$. De plus
$$\left\{\begin{array}{lclll} x(t') & = & \cos(2\pi - t) - \sin(2\pi - t) & = \cos(t) + \sin(t) & = y(t) \\ y(t') & = & \cos(2\pi - t) + \sin(2\pi - t) & = \cos(t) - \sin(t) & = x(t) \end{array}\right.$$
Donc le point $M(t')$ est symétrique du point $M(t)$ par la symétrie d'axe $y = x$. Donc la courbe Γ est symétrique par rapport à l'axe $y = x$.
2. Faux. D'une part, on a
$$y'(t) = -\sin t + \cos t,$$
d'autre part
$$\sqrt{2}\cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\cos t \cos\frac{\pi}{4} + \sin t \sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos t + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin t\right) = \cos t + \sin t \neq y'(t)$$
La formule correcte est
$$y'(t) = \sqrt{2}\cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$$
3. Vrai. D'après ce qui précède, on a
$$y'(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{\pi}{4} + k\pi$$
Donc y' s'annule pour $t = \frac{\pi}{4}$ et pour $t = \frac{5\pi}{4}$. On prend des valeur de t pour avoir le signe de y' entre ces valeurs.

t	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{4}$		2π
$y'(t)$	1	$+$	0	$-$	-1	$-$	0	$+$	1
$y(t)$			$\sqrt{2}$						1
		$\nearrow$			$\searrow$			$\nearrow$	
	0						$-\sqrt{2}$		

4. Faux. Pour $t = \frac{\pi}{4}$, on a $y'(t) = 0$ et $x'(t) = -\sqrt{2}$. La tangente est donc horizontale.
5. Vrai. Calculons
$$x^2 + y^2 = (\cos(t) - \sin(t))^2 + (\cos(t) - \sin(t))^2 = \cos^2(t) - 2\cos t \sin t + \sin^2(t) + \cos^2(t) + 2\cos t \sin t + \sin^2(t)$$
$$x^2 + y^2 = 2(\cos^2(t) + \sin^2(t)) = 2$$
Ce qui correspond à l'équation d'un cercle de centre O et de rayon $\sqrt{2}$.