Répondre par Vrai ou Faux.

Question 1. On considère les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad g(x) = \arcsin(f(x)) = \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right).$$

1. La dérivée de f est donnée par $f'(x) = \dfrac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$ pour tout x réels.
2. On a $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$.
3. La dérivée de arcsin sur $]-1, 1[$ est donnée par
$$\arcsin'(u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}.$$
4. Pour tout x réel, $g'(x) = \arctan'(x)$.
5. Pour tout x réel, $g(x) = \arctan(x) + \frac{\pi}{4}$.

Question 2. On note $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout réel x, par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{e^x - 1} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

On souhaite étudier la courbe représentative de f au voisinage de 0 grâce à un développement limité de $f(x)$ en 0. La notation ϵ représente une fonction qui a pour limite 0 en 0 et qui n'est pas nécessairement la même à chaque item.

1. Le développement limité à l'ordre 3 de $e^x - 1$ au voisinage de 0 est
$$e^x - 1 = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3\epsilon(x).$$
2. f est continue en 0.
3. Le développement limité à l'ordre 2 de $\frac{1}{1+u}$ au voisinage de 0 est
$$\frac{1}{1+u} = 1 + u + u^2 + u^2\epsilon(u).$$
4. Le développement limité à l'ordre 2 de $f(x)$ au voisinage de 0 est
$$f(x) = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} + x^2\epsilon(x).$$
5. La courbe représentative de f se situe au-dessus de sa tangente en 0 au voisinage de 0.

Question 3. On se propose de calculer les intégrales

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\tan x)dx, \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)dx, \quad K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x)dx.$$

1. L'intégrale $\int_0^1 \ln x dx$ diverge.
2. On a $I = J - K$.
3. En effectuant le changement de variable $t = \tan x$, on obtient
$$I = \int_0^{\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}dt.$$
4. Une primitive de $\frac{\ln t}{1+t^2}$ est $\arctan(\ln t)$.
5. A l'aide du changement de variable $t = \frac{1}{u}$, on trouve
$$\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^2}dt = \int_1^{\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}dt.$$

Question 4. Cette question fait suite à la précédente, dont on reprendra les notations.

1. On a $I = 0$.
2. On a $J = K$.
3. On a
$$J + K = 2J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(2x))dx.$$
4. On a
$$\int_0^{\pi} \ln(\sin x)dx = 2J$$
5. On a
$$J = K = -\frac{\pi}{2}\ln(2).$$

Question 5. On considère le polynôme $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ défini par

$$P(z) = z^3 + 3iz^2 + (4i - 9)z - 15i.$$

Le polynôme P admet une unique racine réelle notée a, et on admet que P se factorise de la manière suivante :

$$P(z) = (z - a)R(z), \qquad \text{avec } R(z) = z^2 + 3(i - 1)z - 5i.$$

On note r_1 et r_2 les deux racines complexes de R.

1. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, la partie réelle de $P(z)$ est $z^3 - 9z$.
2. L'unique racine réelle de P est $a = 3$.
3. Le discriminant de $R(z)$ est $\Delta = 2i$.
4. Les racines carrées de Δ sont $\pm(1 + i)$.
5. On a $r_1 = 1 - 2i$ et $r_2 = 2 - i$.

Question 6. On considère les deux équations différentielles linéaires, où la variable est $x \in \mathbb{R}$, et la fonction inconnue $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$(H): \quad 3y'(x) + xy(x) = 0, \qquad (S) 3y'(x) + xy(x) = x^3.$$

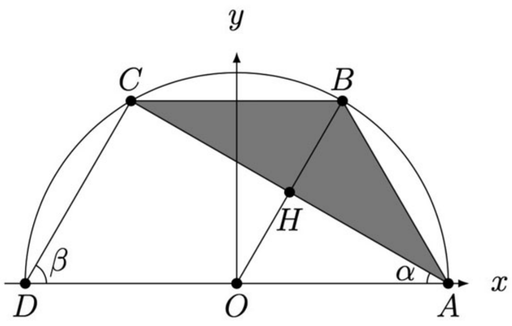
Les solutions de l'équation (H) sont de la forme $y(x) = Af(x)$ où $A \in \mathbb{R}$ et f est une fonction à déterminer vérifiant $f(0) = 1$.

On cherchera ensuite une solution particulière de (S) sous la forme $y_0(x) = A(x)f(x)$, où A est une fonction dérivable telle que $A_0(0) = 0$.

1. On a $f(x) = e^{-\frac{x^2}{6}}$.
2. On a $A'(x) = x^3 e^{-\frac{x^2}{6}}$.
3. En effectuant le changement de variable $u = t^2/6$ dans l'égalité $A(x) = \int_0^x A'(t)dt$, on obtient $A(x) = \int_0^{x^2/6} ue^u du$.
4. On a $\int_0^{x^2/6} ue^u du = 1 + \left(\frac{x^2}{6} - 1\right) e^{\frac{x^2}{6}}$.
5. La solution y_1 de l'équation (S) qui s'annule en 0 est $y_1(x) = x^2 - 6 + 6e^{-x^2/6}$.

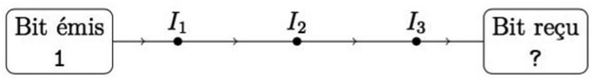
Question 7. Dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère le demi-cercle supérieur de centre O, de rayon r, et les points $A = (r, 0)$, $D = (-r, 0)$. Les points B et C sont sur le demi-cercle de sorte que le polygone $ABCD$ soit la moitié d'un hexagone régulier, c'est à dire $AB = BC = CD = r$. On appelle H l'intersection des droites (AC) et (BO). Dans le triangle ACD, on note α l'angle en A et β l'angle en D.

On suppose que la surface du demi-disque de rayon r est égale à $\frac{1}{2}$. On veut déterminer la surface S du triangle ABC, grisée sur la figure suivante.



1. On a $\cos(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
2. La surface S du triangle ABC vaut $AC \times BH$.
3. On a $AC = 2r\cos(\alpha) = r$.
4. On a $r = \frac{1}{\pi}$.
5. La surface du triangle ABC est $S = \frac{\sqrt{3}}{\pi}$.

Question 8. On étudie la transmission d'un bit (une information binaire de valeur 0 ou 1) à travers trois relais successifs notés I_1, I_2 et I_3. Un bit de valeur 1 est envoyé à I_1 qui le transmet à I_2, et ainsi de suite. Les relais I_1, I_2 et I_3 ne sont pas fiables : ils peuvent se tromper de manière indépendante. On fait l'hypothèse que chacun renvoie l'information qu'il reçoit du relais précédent avec la probabilité 4/5 et l'information contraire avec la probabilité 1/5. Ainsi, deux erreurs successives se neutralisent.



Pour tout $k \in \{1, 2, 3\}$, on note E_k l'évenement « I_k transmet un bit de valeur 1 » et $p_k = P(E_k)$. De plus, on pose $p_0 = 1$. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de relais qui transmettent un bit de valeur 1.

1. La variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = \frac{4}{5}$.
2. Pour tout $k \in \{2, 3\}$, on a $P(E_k|E_{k-1}) = \frac{4}{5}$
3. $P(E_1|E_2) = \frac{15}{16}$.
4. Pour tout $k \in \{2, 3\}$, on a $p_k = \frac{3}{5}p_{k-1} + \frac{1}{5}$.
5. On a $P(X = 0) = \frac{16}{125}$.

Question 9. On considère X la variable aléatoire de densité de probabilité

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda}{(1+x)^2} & \text{si} \quad x \in \left[\frac{1}{2}, 2\right], \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

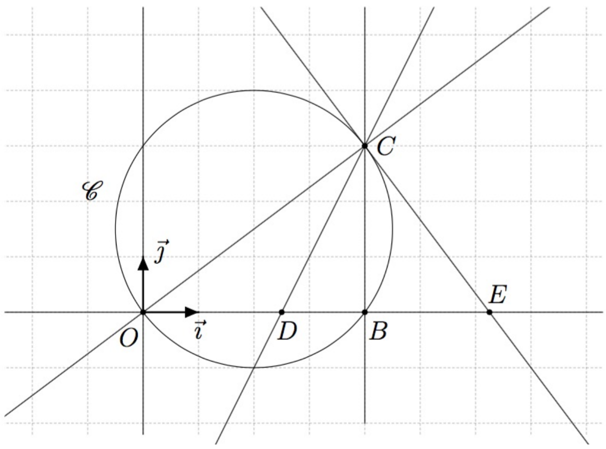
où λ est une constante à déterminer pour que f ait les propriétés d'une densité de probabilité. On considère également la variable aléatoire $Y = \frac{1}{X}$.

1. On a $\lambda = 2$.
2. En remarquant que $\dfrac{x}{(1+x)^2} = \dfrac{1}{1+x} - \dfrac{1}{(1+x)^2}$, on a $E(X) = 3\ln(2) - 1$.
3. Pour $y \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$, $P(Y \leqslant y) = \dfrac{3y}{1+y} - 1$.
4. X et Y suivent la même loi de probabilité.
5. $E(Y) = \dfrac{1}{E(X)}$.

Question 10. On considère $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. On note I la matrice identité d'ordre 3.

1. On a $A^2 = 5A + 4I$.
2. Le scalaire 0 est une valeur propre de A.
3. Le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A.
4. Il existe deux suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que, pour tout entier naturel n, on ait $A^n = a_nA+b_nI$.
5. Pour tout entier n naturel non nul, $a_{n+1} = 5a_n - 4a_{n-1}$.

Question 11. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère les points $B = (4, 0)$, $C = (4, 3)$ et $D = \left(\frac{5}{2}, 0\right)$. Le cercle circonscrit au triangle OBC est noté $\mathcal{C}$ et la tangente au cercle $\mathcal{C}$ en C coupe la droite (OB) en E.



1. L'équation $(x-2)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$ est une équation du cercle $\mathcal{C}$.
2. Pour tout point M du plan de coordonnées (x, y), la distance de M à la droite (OC) vaut
$$d(M, (OC)) = \frac{|3x + 4y|}{5}.$$
3. La droite (CD) est la bissectrice de l'angle $\widehat{OCB}$.
4. La tangente au cercle $\mathcal{C}$ en C a pour équation $4x + 3y = 25$.
5. Le triangle DCE est isocèle en E.

Question 12. Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On considère la courbe Γ de représentation paramétrique
$$\left\{ \begin{array}{lcl} x(t) & = & \cos t - \sin t \\ y(t) & = & \cos t + \sin t \end{array} \right. \quad t \in [0, 2\pi].$$

1. La courbe Γ est symétrique par rapport à la droite d'équation $y = x$.
2. Pour tout $t \in [0, 2\pi]$,
$$y'(t) = \sqrt{2}\cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right).$$
3. Le tableau suivant donne les variations de y sur $[0, 2\pi]$.

t	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{5\pi}{4}$		2π
			$\sqrt{2}$				1
$y(t)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
	0				$-\sqrt{2}$		

4. La tangente à Γ en $t = \frac{\pi}{4}$ est verticale.
5. La courbe Γ est un cercle.