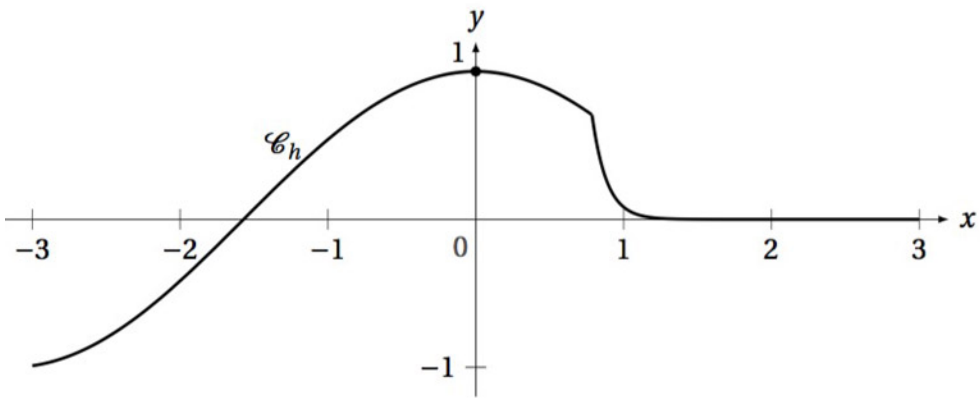
**Question 1.** Soient $f$ et $g$ les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(x)$ et $g(x) = ke^{-\omega\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}$, où $k$ et $\omega$ sont deux réels.

1. On a $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
2. On a $g'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\omega\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)k$.
3. Si $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$, alors $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = g\left(\frac{\pi}{4}\right)$.
4. Si $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\omega = -1$, alors $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = g'\left(\frac{\pi}{4}\right)$.
5. Si $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\omega = 1$, alors la fonction $h$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \leqslant \pi/4 \\ g(x) & \text{si } x \leqslant \pi/4 \end{cases}$$

a pour représentation graphique sur $[-3, 3]$ la courbe $\mathcal{C}_h$ ci-dessous.




**Corrigé.**

1. Faux. On a $f'(x) = -sin(x)$ donc $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.
2. Faux. On a
$$g'(x) = -\omega ke^{-\omega\left(x-\frac{\pi}{4}\right)} \quad \Rightarrow g'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\omega ke^{-\omega\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)} = -\omega ke^0 = -\omega k$$
3. Vrai. Si $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$, on a $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et
$$g\left(\frac{\pi}{4}\right) = ke^{-\omega\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)} = ke^0 = k = \frac{\sqrt{2}}{2} = f\left(\frac{\pi}{4}\right)$$
4. Faux. On sait que $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Si $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\omega = -1$, alors
$$g'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\omega k = +\frac{\sqrt{2}}{2} \neq f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$$
Note : Par contre, si $\omega = 1$, c'est vrai. Ce qui est utile pour la question suivante.
5. Faux. La première moitié de la courbe est bien $\cos(x)$, la deuxième partie ressemble bien à une exponentielle (avec inversion par rapport à l'axe des ordonnées) et d'après l'item 3) les deux courbes se raccordent bien en $x = \frac{\pi}{4}$. Mais ça ne peux pas être la courbe de $h$ car les dérivées en $x = \frac{\pi}{4}$ sont les mêmes de chaque coté (voire note de l'item 4), donc la courbe de $h$ admet une tangente et elle ne présente donc pas de coin.

**Question 2.** Soit $n$ un entier naturel. On pose $Q(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k$.

1. On a $Q'(x) = \sum_{k=0}^{n} kx^{k+1}$.
2. On a $(1-x)^2 Q(x) = (1-x)(1-x^{n+1}) = 1 - x - x^{n+1} + x^{n+2}$.
3. On a $(1-x)^2 Q'(x) = nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1$.

4. En dérivant deux fois dans la formule $(1-x)^2 Q'(x) = nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1$, on obtient

$$2Q'(x) + (1-x)^2 Q^{(3)}(x) = n^2(n+1)x^{n-1} - n(n-1)(n+1)x^{n-2}$$

5. On a $\sum_{k=1}^{n} k = Q'(1) = \frac{n(n+1)}{2}$.

**Corrigé.**

1. Faux. On dérive dans la somme et on a $Q'(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} kx^{k-1}$.

2. Vrai. Si $x \neq 1$, on a la somme de la série géométrique : $Q(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ donc

$$(1-x)^2 Q(x) = (1-x)^2 \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = (1-x)(1-x^{n+1}) = 1 - x - x^{n+1} + x^{n+2}$$

Si on ne se souvient plus de la série géométrique, on développe la somme $Q$ et le produit à la main

$$(1-x)^2 Q(x) = (1-2x+x^2)\sum_{k=0}^{n} x^k = (1-2x+x^2)(1+x+x^2+\cdots+x^{n-2}+x^{n-1}+x^n)$$

$$= \begin{array}{lllllllll} 1 & +x & +x^2 & +\cdots & +x^{n-2} & +x^{n-1} & +x^n & & \\ & -2x & -2x^2 & \cdots & -2x^{n-2} & -2x^{n-1} & -2x^n & -2x^{n+1} & \\ & & x^2 & +\cdots & +x^{n-2} & +x^{n-1} & x^n & +x^{n+1} & +x^{n+2} \\ \hline 1 & -x & +0 & +\cdots & +0 & +0 & +0 & -x^{n+1} & +x^{n+2} \end{array}$$

3. Vrai. On dérive

$$Q'(x) = \left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right)' = \frac{(-(n+1)x^n)(1-x) - (1-x^{n+1})(-1)}{(1-x)^2} = \frac{-(n+1)x^n + (n+1)x^{n+1} + 1 - x^{n+1}}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}$$

Donc on a bien $(1-x)^2 Q'(x) = nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1$.

4. Faux. En dérivant une fois la formule $(1-x)^2 Q'(x) = nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1$, on a

$$-2(1-x)Q'(x) + (1-x)^2 Q''(x) = n(n+1)x^n - (n+1)nx^{n-1}$$

On dérive une deuxième fois

$$2Q'(x) - 2(1-x)Q''(x) - 2(1-x)Q''(x) + (1-x)^2 Q^{(3)}(x) = n(n+1)nx^{n-1} - (n+1)n(n-1)x^{n-2}$$

C'est-à-dire

$$2Q'(x) - 4(1-x)Q''(x) + (1-x)^2 Q^{(3)}(x) = n^2(n+1)x^{n-1} - n(n+1)(n-1)x^{n-2}$$

5. Vrai. On remplace $x = 1$ dans l'item 1 et on a

$$Q'(1) = \sum_{k=0}^{n} k1^{k-1} = \sum_{k=0}^{n} k$$

On peut enlever $k = 0$ de la somme car ce terme est nul, donc

$$Q'(1) = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

(Somme des entiers de 1 à $n$, formule du cours)

**Question 3.** On se propose d'étudier la convergence et éventuellement de calculer l'intégrale

$$I = \int_0^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt.$$

1. On a $\ln\left(1+\dfrac{1}{t^2}\right) \sim_{t\to\infty} \dfrac{1}{t^2}$.
2. On a $\ln\left(1+\dfrac{1}{t^2}\right) \sim_{t\to 0^+} -\ln(t)$.
3. L'intégrale $I$ diverge.
4. Soient $a, b$ deux réels strictement positifs tels que $a < b$. A l'aide d'une intégration par parties, on montre que
$$\int_a^b \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right) dt = \left[t\ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\right]_a^b + 2\int_a^b \frac{1}{1+t^2} dt$$
5. On a $I = \pi$.

**Corrigé.**

1. Vrai. On rappelle que $\ln(1+u) \sim u$ quand $u \to 0$. Or $\frac{1}{t^2} \to 0$ quand $t \to \infty$. Donc
$$\ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right) \sim_{t\to\infty} \frac{1}{t^2}$$
2. Faux. On factorise par le terme dominant $\frac{1}{t^2}$ dans le ln :
$$\ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right) = \ln\left(\frac{1}{t^2}\left(t^2+1\right)\right) = \ln\left(\frac{1}{t^2}\right) + \ln\left(t^2+1\right) = -2\ln(t) + \ln(t^2+1)$$
Le terme dominant est $-2\ln(t) \to +\infty$ quand $t \to 0^+$, car $\ln(t^2+1) \to \ln 1 = 0$. On factorise le terme dominant :
$$\ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right) = -2\ln(t)\left(1 + \underbrace{\frac{\ln(t^2+1)}{-2\ln(t)}}_{\to 0}\right)$$
Donc
$$\ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right) \sim -2\ln(t)$$
3. Faux. On a $\ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right) \sim_{t\to\infty} \frac{1}{t^2}$ et on sait que $\int^{\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge (critère de Riemann). L'intégrale $I$ est donc convergente au niveau de sa borne $+\infty$.
On a $\ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right) \sim_{t\to 0} -2\ln(t)$ et on sait que $\int_0 \ln(t) dt$ converge. L'intégrale $I$ est donc convergente au niveau de sa borne 0.
Finalement, l'intégrale $I$ converge.
4. Vrai. Pour faire l'intégration par partie, on pose
$$u = \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right), \quad v' = 1 \quad \Rightarrow \quad u' = \frac{\frac{-2}{t^3}}{1+\frac{1}{t^2}}, \quad v = t$$
On obtient
$$\int_a^b \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right) dt = \left[t\ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\right]_a^b - \int_a^b t\frac{\frac{-2}{t^3}}{1+\frac{1}{t^2}} dt = \left[t\ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\right]_a^b + 2\int_a^b \frac{1}{t^2} \times \frac{1}{1+\frac{1}{t^2}} dt$$
$$= \left[t\ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\right]_a^b + 2\int_a^b \frac{1}{t^2+1} dt$$
5. Vrai. On poursuit le calcul de l'intégration :
$$\int_a^b \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right) dt = b\ln\left(1+\frac{1}{b^2}\right) - a\ln\left(1+\frac{1}{a^2}\right) + 2\left[\arctan t\right]_a^b$$
$$= b\ln\left(1+\frac{1}{b^2}\right) - a\ln\left(1+\frac{1}{a^2}\right) + 2\arctan b - 2\arctan a$$

On fait tendre $a \to 0$, et on a $2\arctan a \to 2\arctan 0 = 0$ et

$$a \ln\left(1 + \frac{1}{a^2}\right) \sim -2a\ln(a) \to 0$$

On fait tendre $b$ vers $+\infty$ et on a $2\arctan b \to 2 \times \frac{\pi}{2}$ et

$$b \ln\left(1 + \frac{1}{b^2}\right) \sim b \times \frac{1}{b^2} = \frac{1}{b} \to 0$$

Donc finalement $I = \pi$.

**Question 4.** Pour un entier naturel $n$, on se propose d'étudier la convergence et éventuellement de calculer l'intégrale $I_n$ définie par $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^n} \exp\left(-\frac{1}{x}\right) dx$.

1. On a $\dfrac{1}{x^n} \exp\left(-\dfrac{1}{x}\right) \sim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^n}$.
2. On a $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^n} \exp\left(-\frac{1}{x}\right) = 1$.
3. Pour tout entier $n \geqslant 2$, l'intégrale $I_n$ converge.
4. A l'aide d'une intégration par parties, on montre que pour tout $n \geqslant 2$, on a
$$I_n = \frac{1}{n-1} I_{n+1}$$
5. Pour tout entier $n \geqslant 2$, on a $I_n = n!$

**Corrigé.**

1. Vrai. Quand $x \to +\infty$, on a $-\frac{1}{x} \to 0$ donc $\exp\left(-\frac{1}{x}\right) \to 1$, c'est-à-dire $\exp\left(-\frac{1}{x}\right) \sim 1$. Donc
$$\frac{1}{x^n} \exp\left(-\frac{1}{x}\right) \sim \frac{1}{x^n} \qquad x \to +\infty$$
2. Faux. On pose $y = \frac{1}{x}$, on a $y \to +\infty$ quand $x \to 0^+$ et
$$\frac{1}{x^n} \exp\left(-\frac{1}{x}\right) = y^n e^(-y)$$
On a $e^(-y) \to 0$ et $y^n \to +\infty$, mais on sait que $y^n e^(-y) \to 0$(voir croissance comparée, exp l'emporte). Donc
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^n} \exp\left(-\frac{1}{x}\right) = 0$$
3. Vrai. En $+\infty$, on a $\frac{1}{x^n} \exp\left(-\frac{1}{x}\right) \sim \frac{1}{x^n}$ et on sait que $\int^{+\infty} \frac{1}{x^n} dx$ converge pour $n \leqslant 2$, donc $I_n$ converge au niveau de sa borne $+\infty$ si $n \leqslant 2$.
En 0, la fonction $\frac{1}{x^n} \exp\left(-\frac{1}{x}\right)$ a une limite finie, donc elle est prolongeable par continuité et son intégrale est convergence. Donc $I_n$ converge au niveau de sa borne 0.
Finalement, $I_n$ est convergente pour $n \leqslant 2$.
4. Vrai. On pose
$$u = \exp\left(-\frac{1}{x}\right) \qquad v' = \frac{1}{x^n}, \quad \Rightarrow u' = \frac{1}{x^2}\exp\left(-\frac{1}{x}\right) \qquad v = \frac{1}{-(n-1)x^{n-1}}$$
et on a
$$\begin{aligned} I_n &= \left[\frac{1}{-(n-1)x^{n-1}} \exp\left(-\frac{1}{x}\right)\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{1}{-(n-1)x^{n-1}} \times \frac{1}{x^2}\exp\left(-\frac{1}{x}\right) dx \\ &= \left[\frac{1}{-(n-1)x^{n-1}} \exp\left(-\frac{1}{x}\right)\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{(n-1)} \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^{n+1}} \exp\left(-\frac{1}{x}\right) dx \end{aligned}$$
En utilisant l'équivalent de l'item 1, $\frac{1}{-(n-1)x^{n-1}} \exp\left(-\frac{1}{x}\right) \to 0$ quand $x \to \infty$ et l'item 2 donne que $\frac{1}{-(n-1)x^{n-1}} \exp\left(-\frac{1}{x}\right) \to 0$ quand $x \to 0$. Donc
$$I_n = \frac{1}{(n-1)} \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^{n+1}} \exp\left(-\frac{1}{x}\right) dx = \frac{1}{(n-1)} I_{n+1}$$

5. Faux. D'après ce qui précède $I_{n+1} = (n-1)I_n$, c'est à dire $I_n = (n-2)I_{n-1}$, donc en réitérant le procédé, on obtient

$$I_n = (n-2)(n-3)I_{n-2} = (n-2)(n-3)\cdots 1 \times I_2 = (n-2)!I_2$$

On ne peut pas avoir $n!$ donc on pourrait s'arrêter là.

Pour calculer $I_2$ :

$$I_2 = \int_0^{+\infty} \underbrace{\frac{1}{x^2}\exp\left(-\frac{1}{x}\right)}_{u'e^u} dx = \left[\exp\left(-\frac{1}{x}\right)\right]_0^{+\infty} = 1 - 0 = 1$$

Ce qui donne $I_n = (n-2)!$.

**Question 5.** Soit le polynôme $P(z) = z^4 - 4z^3 + 9z^2 + 16z - 52$. On admet que $P$ possède deux racines réelles opposées $a$ et $-a$ ($a \neq 0$) que l'on déterminera. On en déduira la factorisation $P(z) = (z^2 - a^2)(z^2 + bz + c)$, en calculant les réels $b$ et $c$. On montrera enfin qu'il existe deux racines complexes conjuguées $z_1 = re^{i\theta}$ et $z_2 = re^{-i\theta}$, et on calculera $r$ et $\cos\theta$.

1. On a $P(a) - P(-a) = -8a(a^2 - 4)$.
2. On a $b = 2$ et $c = 13$.
3. Le discriminant de l'équation $z^2 + bz + c = 0$ avec les valeurs de $b$ et $c$ calculées est $\Delta = -36$.
4. On a $\{z_1, z_2\} = \{2 - 3i, 2 + 3i\}$.
5. On a $r = \sqrt{13}$ et $\cos\theta = \frac{3}{\sqrt{13}}$.

**Corrigé.** Notez que la variable est ici $z$ au lieu de $X$, mais ça ne change rien pour les polynôme.

1. Vrai. On calcule

$$P(a) - P(-a) = a^4 - 4a^3 + 9a^2 + 16a - 52 - ((-a)^4 - 4(-a)^3 + 9(-a)^2 + 16(-a) - 52)$$

$$= a^4 - 4a^3 + 9a^2 + 16a - 52 - (a^4 + 4a^3 + 9a^2 - 16a - 52) = -8a^3 + 32a = a(-8a^2 + 32) = -8a(a^2 - 4)$$

Notons que ça marche pour $a$, et à vrai dire pour n'importe quelle valeur de $z$. Ce qu'il faut comprendre dans cette question, c'est que ça permet de déterminer $a$. Comme on sait que $P(a) = 0$ et que $P(-a) = 0$ car ce sont des racines de $P$, on obtient :

$$0 = -8a(a^2 - 4) \quad \Leftrightarrow \quad a^2 - 4 = 0(\text{ car } a \neq 0) \quad \Leftrightarrow \quad a = 2(\text{ car } a > 0)$$

2. F. On sait que 2 et $-2$ sont des racines de $P$ donc $P$ est divisible par $(z-2)(z+2) = z^2 - 4$. On fait la division euclidienne et on obtient

$$P = (z^2 - 4)(z^2 - 4z + 13) \quad \Leftrightarrow \quad b = -4, c = 13$$

3. Vrai. On a

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 13 = 16 - 52 = -36$$

4. Vrai. On a donc deux racines complexes

$$z_1 = \frac{4 + i\sqrt{36}}{2} = \frac{4 + i6}{2} = 2 + 3i, \quad z_2 = \frac{4 - i\sqrt{36}}{2} = 2 - 3i$$

5. Faux. On met $z_1$ sous forme trigonométrique (ou exponentielle) (celui qui aura l'angle positif car il a partie réelle et imaginaire positives) en calculant son module et son argument.

$$|z_1| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$$

L'argument $\theta$ vérifie donc

$$\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{13}}, \quad \sin\theta = \frac{3}{\sqrt{13}}.$$

**Question 6.** Soit la fraction rationnelle

$$F(x) = \frac{2x-2}{x(x-2)}$$

On se propose de chercher les solutions sur $I = ]2, +\infty[$ de l'équation différentielle sans second membre

$$(H) \qquad y'(x) - F(x)y(x) = 0$$

puis de résoudre l'équation différentielle avec second membre

$$(E) \qquad y'(x) - F(x)y(x) = x$$

1. La décomposition en élément simple de $F(x)$ est $F(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-2}$.
2. La fonction $u(x) = \sqrt{x(x-2)}$ est une solution de $(H)$.
3. Si $y(x) = x(x-2)K(x)$ est une solution de $(E)$, alors $K'(x) = \frac{1}{x(x-2)}$.
4. Les solutions de $(E)$ sont de la forme

$$y'x) = \big(\ln(x-2) + C\big)x(x-2)$$

   où $C$ est une constante
5. Toutes les solutions $y$ de $(E)$ vérifient $\lim\limits_{x \to 2^+} y(x) = 0$.

**Corrigé.**

1. Vrai. On sait que

$$F(x) = \frac{2x-2}{x(x-2)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-2}$$

   En multipliant par $x$ des deux cotés de l'égalité et en prenant $x = 0$, il vient

$$\frac{2x-2}{(x-2)} = a + \frac{bx}{x-2} \Rightarrow \frac{-2}{-2} = a + 0 \Rightarrow a = 1$$

   En multipliant par $x-2$ des deux cotés de l'égalité et en prenant $x = 2$, il vient

$$\frac{2x-2}{x} = \frac{a(x-2)}{x} + b \Rightarrow \frac{4-2}{2} = b \Rightarrow b = 1$$

   Donc

$$F(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-2}$$

2. Faux. Les solutions de l'équation homogène $(H)$ sont les fonctions de la forme $y_h(x) = \lambda e^{-A(x)}$ avec $A(x)$ une primitive de $-F$. D'après la décomposition en élément simple de $F$, on a

$$A(x) = -\ln(x) - \ln(x-2) = -\ln(x(x-2))$$

   Donc

$$y_h(x) = \lambda e^{\ln(x(x-2))} = \lambda x(x-2)$$

   Donc la racine est de trop !
3. Faux.(Variation de la constante) Cherchons une solution particulière sous la forme

$$y_p(x) = K(x)x(x-2) \Rightarrow y_p'(x) = K'(x)x(x-2) + K(x)(2x-2)$$

   On remplace dans l'équation (E)

$$K'(x)x(x-2) + K(x)(2x-2) - \left(\frac{2x-2}{x(x-2)}\right)(K(x)x(x-2)) = x$$

$$K'(x)x(x-2) = x \quad \Leftrightarrow \quad K'(x) = \frac{1}{x-2}$$

4. Vrai. On a donc
$$K(x) = \ln(x-2) \Rightarrow y_p(x) = \ln(x-2)x(x-2)$$
Finalement, les solutions de $(E)$ sont
$$y(x) = \ln(x-2)x(x-2) + \lambda x(x-2) = (\ln(x-2) + \lambda)\, x(x-2)$$
(avec $\lambda = C$ une constante.
5. Vrai. On a $y(x) = \ln(x-2)x(x-2) + \lambda x(x-2)$. On a facilement
$$\lim_{x \to 2^+} \lambda x(x-2) = 0$$
Pour le premier terme, on met de coté $x$ tout seul qui tend vers 2 et on étudie $(x-2)\ln(x-2)$ qui fa it une forme indéterminée $0 \times \infty$. On pose $Y = x-2$ qui tend vers 0. On a $(x-2)\ln(x-2) = Y \ln Y$ et on sait que $Y \ln Y \to 0$ quand $Y \to 0$ (voir cours). Donc finalement
$$\lim_{x \to 2^+} y(x) = 0$$
pour toutes les valeurs de $\lambda$.

**Question 7.** Soit la transformation $f : \mathbb{C}\backslash\{-i\} \to \mathbb{C}\backslash\{1\}$, définie par
$$f(z) = \frac{z-i}{z+i}$$
On pose $z = x + iy$ avec $x$ et $y$ dans $\mathbb{R}$. On note $M$ le point d'affixe $z$ dans le plan complexe $P$ muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On cherchera l'ensemble $E \subset P$ des points $M$ d'affixe $z$ tels que $|f(z)| = 1$.

On cherchera ensuite l'ensemble $F \subset P$ des points $M$ d'affixe $z$ tels que $|f(z)| = \frac{1}{3}$. On vérifiera que l'équation obtenue est celle d'un cercle du plan $P$, dont on précisera le centre $\Omega$ et le rayon $R$.

1. On a $|z+i|^2 = x^2 + y^2 + 1$.
2. L'ensemble $E$ est l'axe des réel $(Ox)$.
3. L'ensemble $F$ admet comme équation $x^2 + y^2 + \frac{5}{8}y + 1 = 0$.
4. Le centre de $F$ est $\Omega$ de coordonnées $\left(0, \frac{5}{4}\right)$.
5. Le rayon de $F$ est $R = \frac{3}{4}$.

**Corrigé.**

1. Faux. On calcule
$$|z+i|^2 = |x+iy+i|^2 = |x+i(y+1)|^2 = \left(\sqrt{x^2+(y+1)^2}\right)^2 = x^2+y^2+2y+1$$
On peut faire le même calcul pour $|z-i|^2 = x^2 + y^2 - 2y + 1$.
2. Vrai. On cherche l'ensemble $E \subset P$ des points $M$ d'affixe $z$ tels que $|f(z)| = 1$, c'est à dire tel que
$$\left|\frac{z-i}{z+i}\right| = 1 \quad \Leftrightarrow \quad |z+i| = |z-i|$$
Comme suggéré par la question 1, on élève au carré $|z+i|^2 = |z-i|^2$, et on obtient
$$x^2+y^2+2y+1 = x^2+y^2-2y+1 \quad \Leftrightarrow \quad 4y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = 0$$
La droite $y = 0$ est l'axe des abscisses. Donc $E$ est bien l'axe des réels $(Ox)$.
3. Faux. On cherche l'ensemble $F$ des points $M$ d'affixe $z$ tels que $|f(z)| = \frac{1}{3}$. On reprend la même démarche que précédemment
$$\left|\frac{z-i}{z+i}\right| = \frac{1}{3} \quad \Leftrightarrow \quad 3|z-i| = |z+i| \quad \Leftrightarrow \quad 9|z-i|^2 = |z+i|^2$$
$$\Leftrightarrow \quad 9x^2+9y^2-18y+9 = x^2+y^2+2y+1 \quad \Leftrightarrow \quad 8x^2+8y^2-20y+8 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2+y^2-\frac{20}{8}y+1 = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad x^2+y^2-\frac{5}{2}y+1 = 0$$
On obtient bien l'équation d'un cercle.

4. Vrai. On transforme l'équation obtenue pour la mettre sous la forme de carrés parfait :

$$x^2 + y^2 - \frac{5}{2}y + 1 = (x-0)^2 + \left(y - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{25}{16} + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-0)^2 + \left(y - \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$$

$$\sqrt{(x-0)^2 + \left(y - \frac{5}{4}\right)^2} = \frac{3}{4} \quad \Leftrightarrow \quad \Omega M = r$$

Donc le cercle a pour centre $\Omega\left(0, \frac{5}{4}\right)$ et pour rayon $\frac{3}{4}$.

5. Vrai. Voir ci-dessus.

**Question 8.** Deux composants électroniques $A$ et $B$ sont reliés par un réseau. Ils s'envoient des impulsions suivant le protocole suivant :

— **Etape 0.** Le composant $A$ envoie une impulsion à $B$. Le composant $B$ réagit de manière aléatoire :
  1. avec une probabilité $p_0 = \frac{1}{2} = 2^{-1}$, il répond à $A$. Dans ce cas, on passe à l'étape 1.
  2. avec une probabilité $1 - p_0 = 1 - \frac{1}{2} = 1 - 2^{-1}$, il ne répond pas. Dans ce cas, l'échange s'arrête.

— **Etape 1.** Le composant $A$ envoie une impulsion à $B$. Le composant $B$ réagit de manière aléatoire :
  1. avec une probabilité $p_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} = 2^{-1/2}$, il répond à $A$. Dans ce cas, on passe à l'étape 2.
  2. avec une probabilité $1 - p_1 = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} = 1 - 2^{-1/2}$, il ne répond pas. Dans ce cas, l'échange s'arrête.

— ...

— **Etape $n$.** Cette étape se déroule de manière analogue aux étapes 0 et 1, mais la probabilité $p_n$ que $B$ réponde à $A$ vaut $p_n = 2^{-\frac{1}{2^n}}$.

1. La probabilité que $A$ envoie une seule impulsion est de 50%.
2. La probabilité que $B$ réponde à $A$ diminue à chaque étape.
3. La probabilité que le composant $B$ réponde à la 4-ième étape sachant qu'il a répondu à la 3-ième étape est $2^{-\frac{1}{2^4}}$.
4. La probabilité que l'échange dure au moins deux étapes est de $2^{-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)} = 2^{\frac{-7}{4}}$
5. La probabilité que l'envoi d'impulsions entre $A$ et $B$ ne s'arrête jamais est égale à 0.

**Corrigé.**

1. Vrai . $A$ envoie une seule impulsion signifie que $A$ a envoyé une impulsion à l'étape 1 et que $B$ ne lui a pas répondu. La probabilité de cet événement est $1 - p_0 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = 50\%$.
2. Faux. La probabilité $p_n$ que $B$ réponde à $A$ à l'étape $n$ vaut

$$p_n = 2^{-\frac{1}{2^n}} = \exp\left(-\frac{1}{2^n}\ln(2)\right)$$

   Or $2^n$ est une suite croissante, donc $\frac{1}{2^n}$ est décroissante et par conséquent $-\frac{1}{2^n}$ est croissante. La constante $\ln 2$ est positive et l'exponentielle est elle-même croissante (donc elle ne change pas le sens de variation), donc au final $p_n$ est une suite croissante. La probabilité que $B$ réponde augmente à chaque étape.
3. Vrai. La probabilité que le composant $B$ réponde à la 4-ième étape sachant qu'il a répondu à la 3-ième étape est juste $p_4 = 2^{-\frac{1}{2^4}}$. C'est comme ça qu'est construit l'énoncé.
4. Faux. L'échange dure au moins deux étape signifie que $B$ a répondu à l'étape 0, puis à l'étape 1 (ce qui fait deux étapes !!), c'est à dire une probabilité de

$$P = 2^{-1} \times 2^{-1/2} = 2^{-1/2-1}$$

   La probabilité donnée est celle de trois étapes, attention au démarrage de la notation à 0 !
5. Faux. Le processus dure au moins $n+1$ étapes avec probabilité

$$P = 2^{-1-1/2-1/4-1/8\cdots-1/2^n} = 2^{-\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k} = \exp\left(-\ln 2 \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k\right)$$

   On a

$$\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 2 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n \to 2$$

   quand $n \to +\infty$ (nombre d'étape infini). Donc la probabilité $P \to e^{-2\ln 2} \neq 0$.

**Question 9.** André joue à pile ou face avec une pièce non truquée (la probabilité de pile comme de face est de 1/2). Si le tirage donne pile, alors André gagne 0,5 et si c'est face il perd 1. Il peut jouer autant de fois qu'il le souhaite.

1. André joue une seule fois. La probabilité qu'il gagne 0,5 est 1/3.
2. André joue deux fois. La probabilité qu'il gagne 1 est de 1/4.
3. André joue quatre fois et son gain total est de 0,5. Dans ce cas, André à perdu exactement deux fois.
4. André joue quatre fois. La probabilité que son gain total soit de 0,5 est de 1/4.
5. L'espérance du gain pour un seul tirage est de $-0,5$.

**Corrigé.**

1. Faux. Si il joue une seule fois, la probabilité qu'il gagne 0,5 est la probabilité de faire pile, donc $\frac{1}{2}$.
2. Vrai. Les possibilités en jouant deux fois sont :
   — Pile, Pile donc gain de 0,5+0,5=1 avec probabilité $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ (indépendance des tirage).
   — Pile, Face donc gain de 0,5-1=-0,5 avec probabilité 1/4
   — Face, Pile donc gain de 0,5-1= -0,5 avec probabilité 1/4
   — Face, Face donc gain de -1-1=-2 avec probabilité 1/4
3. Faux. Sans considérer l'ordre dans lequel on a obtenu les face et les piles, en quatre tirage on peut avoir
   — Quatre faces, avec gain $-1 \times 4 = -4$.
   — Trois faces et un pile, avec gain $-1 \times 3 + 0,5 \times 1 = -2,5$.
   — Deux faces et deux piles, avec gain $-1 \times 2 + 0,5 \times 2 = -1$.
   — Un face et trois piles, avec gain $-1 \times 1 + 0,5 \times 3 = 0,5$.
   — Quatre piles, avec gain $0,5 \times 4 = 2$.
   Donc si le gain total est 0,5, c'est qu'André a perdu exactement une fois.
4. Vrai. On est dans la situation où il y a une face et trois piles. Il y a 4 possibilités pour que ça arrive (une possibilité pour le numéro du tirage où le face apparait, tous les autres tirages étant pile). Chaque possibilité de tirage a une probabilité de $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$ d'arriver car pile et face ont les même probabilités et les tirages sont indépendants. Donc au final, la probabilité que le gain total soit de 0,5 est
   $$4 \times \frac{1}{16} = \frac{1}{4}$$
   .
5. Faux. L'espérance du gain est
   $$-1 \times \frac{1}{2} + 0,5 \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = -\frac{1}{4} = -0,25$$

**Question 10.** Dans l'espace vectoriel $E$ sur $\mathbb{R}$ de dimension 3 ayant une base $\mathcal{B} = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, on considère l'endomorphisme $f$ dont la matrice associée dans la base $\mathcal{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. 1 est une valeur propre de la matrice $A$.
2. La matrice $A$ est inversible.
3. $f(\vec{e_1} + \vec{e_2}) = 3(\vec{e_1} + \vec{e_2})$.
4. La matrice $A$ est diagonalisable.
5. Il existe une matrice diagonale $D$ telle que $A = PDP^{-1}$ où $P$ est la matrice inversible
   $$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Corrigé.** Si on lit bien tout l'énoncé, il n'y a pas besoin de chercher le polynôme caractéristique, ni les vecteurs propres vu qu'ils sont déjà donné ! Dans la question 5, on prend dans la matrice $P$ les trois vecteurs (en colonnes)

$u = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ et $w = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$. On teste si ce sont des vecteurs propres :

$$Au = \begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = 2u; \qquad Av = \begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = 1v;$$

$$Aw = \begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = 0w;$$

1. Vrai. Comme $Av = 1v$, 1 est bien une valeur propre associée au vecteur propre $v$.
2. Faux. Comme $Aw = 0w$, 0 est une valeur propre (associée au vecteur propre $w$) donc $A$ ne peut pas être inversible.
3. Faux.
$$f(\vec{e_1}+\vec{e_2}) = \begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \neq 3(\vec{e_1}+\vec{e_2}) = \begin{pmatrix}3\\3\\0\end{pmatrix}$$
4. Vrai. On a trois valeurs propres distinctes (2, 1 et 0) pour une matrice de taille 3, donc $A$ est diagonalisable.
5. Vrai. $(u, v, w)$ est bien une base de vecteurs propres, donc $P$ formée avec ces trois vecteurs est bien la matrice de passage qui permet la diagonalisation. C'est à dire $A = PDP^{-1}$ avec $D = Diag(2, 1, 0)$.

**Question 11.** Dans l'espace affine euclidien $\mathbb{R}^3$ de dimension 3, on considère le plan $P_1$ d'équation cartésienne $2x - y + z = 2$ et le plan $P_2$ d'équation cartésienne $y = z$. On note $D = P_1 \cap P_2$ et on admet que $D$ est une droite.

1. Les vecteurs $\vec{n_1} = (2, -1, 1)$ et $\vec{n_2} = (0, 1, -1)$ sont respectivement des vecteurs normaux aux plans $P_1$ et $P_2$.
2. Les plans $P_1$ et $P_2$ sont perpendiculaires.
3. Le vecteur $\vec{n} = (0, 2, 2)$ est un vecteur directeur de $D$.
4. Une représentation paramétrique de la droite $D$ est
$$\begin{cases} x &= 1 \\ y &= 1 \quad +2t, \\ z &= 1 \quad +2t \end{cases} \qquad \text{où } t \in \mathbb{R}$$
5. La distance de tout point $M(x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$ au plan $P_1$ est $d(M, P_1) = \frac{|2x-y+z-2|}{\sqrt{2}}$.

**Corrigé.**

1. Vrai. Le plan $P_1$ a pour équation $2x - y + z - 2 = 0$, donc pour vecteur normal $(2, -1, 1) = \vec{n_1}$. Le plan $P_2$ a pour équation $y = z$, donc $0x + y - z = 0$, donc pour vecteur normal $(0, 1, -1) = \vec{n_2}$.
2. Faux. On fait le produit scalaire
$$\vec{n_1} \cdot \vec{n_2} = 0 - 1 - 1 = -2 \neq 0$$
Les vecteurs normaux ne sont pas orthogonaux donc les plans ne sont pas perpendiculaires.
3. Vrai . La droite $D$ est dirigée par le vecteur obtenu en faisant le produit vectoriel des vecteurs normaux des plans
$$u = \vec{n_1} \wedge \vec{n_2} = \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix} = \vec{n}$$
4. Vrai. Pour faire une représentation paramétrique de $D$, il faut soit résoudre le système contenant les deux plans, soit connaître un point et un vecteur directeur. Dans la question, on suggère le point $A(1, 1, 1)$, on vérifie qu'il appartient aux deux plans.
Dans l'équation de $P_1$ : $2 - 1 + 1 - 2 = 0$ marche donc $A \in P_1$. Dans l'équation de $P_2$ : $1 = 1$ marche donc $A \in P_2$. Donc $A \in P_1 \cap P_2 = D$. On connait $\vec{n}$ le vecteur directeur de $D$.
Soit $M(x, y, z)$ un point. $M \in D$ si et seulement si $\overrightarrow{AM} = t\vec{n}$ avec $t \in \mathbb{R}$. On a alors
$$\begin{cases} x-1 &= \\ y-1 &= \quad +2t \\ z-1 &= \quad +2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x &= 1 \\ y &= 1 \quad +2t, \\ z &= 1 \quad +2t \end{cases} \qquad \text{où } t \in \mathbb{R}$$

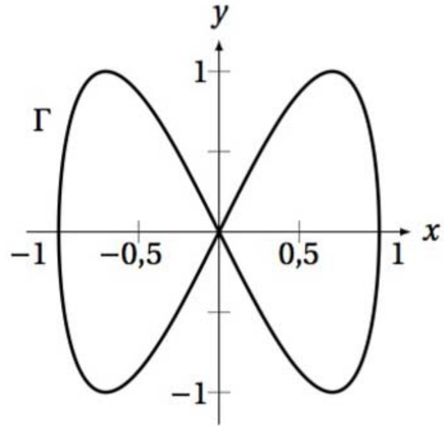
5. Faux. La distance de $M$ à $P_1$ est donné par la formule

$$d(M,P_1) = \frac{|2x-y+z-2|}{\|n_1\|} = \frac{|2x-y+z-2|}{\sqrt{4+1+1}} = \frac{|2x-y+z-2|}{\sqrt{6}}$$

**Question 12.** Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. On considère la courbe $\Gamma$ de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x &= \sin(2t), \qquad \text{avec } t \in [0,2\pi] \\ y &= \cos(t) \end{cases}$$

1. La courbe $\Gamma$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
2. Le vecteur
$$\begin{pmatrix} \sin(2t) \\ -\cos(t) \end{pmatrix}$$
est un vecteur directeur de la tangente à la courbe $\Gamma$ au point de paramètre $t$.
3. La tangente à la courbe $\Gamma$ au point $M$ de paramètre $t = \frac{\pi}{4}$ est horizontale.
4. La représentation graphique suivante est celle de $\Gamma$ :




5. Une équation cartésienne de la courbe $\Gamma$ est $x^2 = 4y^2(1-y^2)$.

**Corrigé.**

1. Vrai. Pour $t \in [0,\pi]$, on va poser $t' = 2\pi - t \in [\pi, 2\pi]$. Comparons le point $\Gamma(t)$ de coordonnées $x(t)$ et $y(t)$ et le point $\Gamma(t')$ :
$$\Gamma(t') = \begin{pmatrix} \sin(2(2\pi-t)) \\ \cos(2\pi-t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(4\pi-2t)) \\ \cos(2\pi-t) \end{pmatrix} =_{(1)} \begin{pmatrix} \sin(-2t) \\ \cos(-t) \end{pmatrix} =_{(2)} \begin{pmatrix} -\sin(2t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$
Par la périodicité (1), puis la parité (2) des fonctions sin et cos.
Les points $\Gamma(t)$ et $\Gamma(t')$ ont la même ordonnées, mais des abscisses opposées, donc ils sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées. Donc la courbe a l'axe des ordonnées comme axe de symétrie.
2. Faux. La tangente à la courbe a pour vecteur directeur le vecteur $\vec{v} = (x'(t), y'(t))$ en tout point régulier. On a donc
$$\begin{cases} x' &= 2\cos(2t), \qquad \text{avec } t \in [0,2\pi] \\ y' &= -\sin(t) \end{cases} \qquad \Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} 2\cos(2t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix}$$
3. Faux. Pour $t = \frac{\pi}{4}$, on a comme vecteur tangent
$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2\cos(\frac{\pi}{2}) \\ -\sin(\frac{\pi}{4}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$
Donc une tangente verticale au point $t = \frac{\pi}{4}$. Accessoirement, ce point est celui de coordonnées $(1, \frac{\sqrt{2}}{2})$.
4. Faux. Sur le graphique, la courbe ne semble pas passer pas par le point de coordonnées $(1, \frac{\sqrt{2}}{2})$ avec une tangente verticale, justement. Les points de tangente verticale ont l'air d'être à ordonnées proche de zéro.
5. Vrai. On reporte les formules de $x$ et $y$ dans les deux membres de l'équation donnée
$$x^2 = \sin^2(2t) = (2\cos t \sin t)^2 = 4\cos^2 t \sin^2 t = 4\cos^2 t(1-\cos^2 t)$$
et
$$4y^2(1-y^2) = 4\cos^2 t(1-\cos^2 t)$$
Donc on a bien égalité.