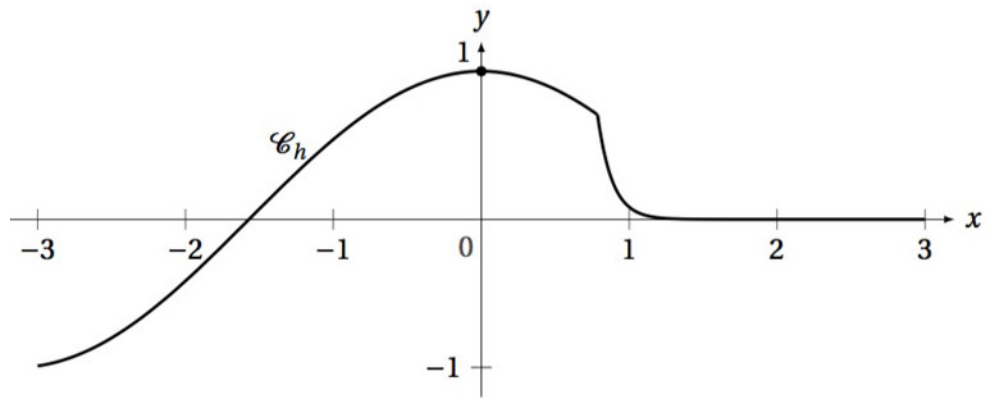
Question 1. Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(x)$ et $g(x) = ke^{-\omega\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}$, où k et ω sont deux réels.

1. On a $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
2. On a $g'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\omega\left(1-\frac{\pi}{4}\right)k$.
3. Si $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$, alors $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = g\left(\frac{\pi}{4}\right)$.
4. Si $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\omega = -1$, alors $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = g'\left(\frac{\pi}{4}\right)$.
5. Si $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\omega = 1$, alors la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \leqslant \pi/4 \\ g(x) & \text{si } x > \pi/4 \end{cases}$$

a pour représentation graphique sur $[-3, 3]$ la courbe $\mathcal{C}_h$ ci-dessous.



Question 2. Soit n un entier naturel. On pose $Q(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k$.

1. On a $Q'(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} kx^{k+1}$.
2. On a $(1-x)^2Q(x) = (1-x)(1-x^{n+1}) = 1 - x - x^{n+1} + x^{n+2}$.
3. On a $(1-x)^2Q'(x) = nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1$.
4. En dérivant deux fois dans la formule $(1-x)^2Q'(x) = nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1$, on obtient

$$2Q'(x) + (1-x)^2Q^{(3)}(x) = n^2(n+1)x^{n-1} - n(n-1)(n+1)x^{n-2}$$

5. On a $\sum_{k=1}^{n} k = Q'(1) = \frac{n(n+1)}{2}$.

Question 3. On se propose d'étudier la convergence et éventuellement de calculer l'intégrale

$$I = \int_0^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt.$$

1. On a $\ln\left(1+\dfrac{1}{t^2}\right) \sim_{t\to\infty} \dfrac{1}{t^2}$.
2. On a $\ln\left(1+\dfrac{1}{t^2}\right) \sim_{t\to 0^+} -\ln(t)$.
3. L'intégrale I diverge.
4. Soient a, b deux réels strictement positifs tels que $a < b$. A l'aide d'une intégration par parties, on montre que

$$\int_a^b \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right) dt = \left[t\ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\right]_a^b + 2\int_a^b \frac{1}{1+t^2}dt$$

5. On a $I = \pi$.

Question 4. Pour un entier naturel n, on se propose d'étudier la convergence et éventuellement de calculer l'intégrale I_n définie par $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^n} \exp\left(-\frac{1}{x}\right) dx$.

1. On a $\dfrac{1}{x^n} \exp\left(-\dfrac{1}{x}\right) \sim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^n}$.
2. On a $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^n} \exp\left(-\frac{1}{x}\right) = 1$.
3. Pour tout entier $n \geqslant 2$, l'intégrale I_n converge.
4. A l'aide d'une intégration par parties, on montre que pour tout $n \geqslant 2$, on a
$$I_n = \frac{1}{n-1} I_{n+1}$$
5. Pour tout entier $n \geqslant 2$, on a $I_n = n!$

Question 5. Soit le polynôme $P(z) = z^4 - 4z^3 + 9z^2 + 16z - 52$. On admet que P possède deux racines réelles opposées a et $-a$ ($a \neq 0$) que l'on déterminera. On en déduira la factorisation $P(z) = (z^2 - a^2)(z^2 + bz + c)$, en calculant les réels b et c. On montrera enfin qu'il existe deux racines complexes conjuguées $z_1 = re^{i\theta}$ et $z_2 = re^{-i\theta}$, et on calculera r et $\cos\theta$.

1. On a $P(a) - P(-a) = -8a(a^2 - 4)$.
2. On a $b = 2$ et $c = 13$.
3. Le discriminant de l'équation $z^2 + bz + c = 0$ avec les valeurs de b et c calculées est $\Delta = -36$.
4. On a $\{z_1, z_2\} = \{2 - 3i, 2 + 3i\}$.
5. On a $r = \sqrt{13}$ et $\cos\theta = \frac{3}{\sqrt{13}}$.

Question 6. Soit la fraction rationnelle
$$F(x) = \frac{2x - 2}{x(x-2)}$$
On se propose de chercher les solutions sur $I =]2, +\infty[$ de l'équation différentielle sans second membre
$$(H) \qquad y'(x) - F(x)y(x) = 0$$
puis de résoudre l'équation différentielle avec second membre
$$(E) \qquad y'(x) - F(x)y(x) = x$$

1. La décomposition en élément simple de $F(x)$ est $F(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-2}$.
2. La fonction $u(x) = \sqrt{x(x-2)}$ est une solution de (H).
3. Si $y(x) = x(x-2)K(x)$ est une solution de (E), alors $K'(x) = \frac{1}{x(x-2)}$.
4. Les solutions de (E) sont de la forme
$$y'x) = \big(\ln(x-2) + C\big)x(x-2)$$
où C est une constante
5. Toutes les solutions y de (E) vérifient $\displaystyle\lim_{x\to 2^+} y(x) = 0$.

Question 7. Soit la transformation $f : \mathbb{C}\backslash\{-i\} \to \mathbb{C}\backslash\{1\}$, définie par
$$f(z) = \frac{z - i}{z + i}$$
On pose $z = x + iy$ avec x et y dans $\mathbb{R}$. On note M le point d'affixe z dans le plan complexe P muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On cherchera l'ensemble $E \subset P$ des points M d'affixe z tels que $|f(z)| = 1$.

On cherchera ensuite l'ensemble $F \subset P$ des points M d'affixe z tels que $|f(z)| = \frac{1}{3}$. On vérifiera que l'équation obtenue est celle d'un cercle du plan P, dont on précisera le centre Ω et le rayon R.

1. On a $|z + i|^2 = x^2 + y^2 + 1$.
2. L'ensemble E est l'axe des réel (Ox).

3. L'ensemble F admet comme équation $x^2 + y^2 + \frac{5}{8}y + 1 = 0$.
4. Le centre de F est Ω de coordonnées $\left(0, \frac{5}{4}\right)$.
5. Le rayon de F est $R = \frac{3}{4}$.

Question 8. Deux composants électroniques A et B sont reliés par un réseau. Ils s'envoient des impulsions suivant le protocole suivant :

— **Etape 0.** Le composant A envoie une impulsion à B. Le composant B réagit de manière aléatoire :
   1. avec une probabilité $p_0 = \frac{1}{2} = 2^{-1}$, il répond à A. Dans ce cas, on passe à l'étape 1.
   2. avec une probabilité $1 - p_0 = 1 - \frac{1}{2} = 1 - 2^{-1}$, il ne répond pas. Dans ce cas, l'échange s'arrête.

— **Etape 1.** Le composant A envoie une impulsion à B. Le composant B réagit de manière aléatoire :
   1. avec une probabilité $p_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} = 2^{-1/2}$, il répond à A. Dans ce cas, on passe à l'étape 2.
   2. avec une probabilité $1 - p_1 = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} = 1 - 2^{-1/2}$, il ne répond pas. Dans ce cas, l'échange s'arrête.

— ...

— **Etape n.** Cette étape se déroule de manière analogue aux étapes 0 et 1, mais la probabilité p_n que B réponde à A vaut $p_n = 2^{-\frac{1}{2^n}}$.

1. La probabilité que A envoie une seule impulsion est de 50%.
2. La probabilité que B réponde à A diminue à chaque étape.
3. La probabilité que le composant B réponde à la 4-ième étape sachant qu'il a répondu à la 3-ième étape est $2^{-\frac{1}{2^4}}$.
4. La probabilité que l'échange dure au moins deux étapes est de $2^{-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)} = 2^{\frac{-7}{4}}$
5. La probabilité que l'envoi d'impulsions entre A et B ne s'arrête jamais est égale à 0.

Question 9. André joue à pile ou face avec une pièce non truquée (la probabilité de pile comme de face est de 1/2). Si le tirage donne pile, alors André gagne 0,5 et si c'est face il perd 1. Il peut jouer autant de fois qu'il le souhaite.

1. André joue une seule fois. La probabilité qu'il gagne 0,5 est 1/3.
2. André joue deux fois. La probabilité qu'il gagne 1 est de 1/4.
3. André joue quatre fois et son gain total est de 0,5. Dans ce cas, André à perdu exactement deux fois.
4. André joue quatre fois. La probabilité que son gain total soit de 0,5 est de 1/4.
5. L'espérance du gain pour un seul tirage est de $-0,5$.

Question 10. Dans l'espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$ de dimension 3 ayant une base $\mathcal{B} = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, on considère l'endomorphisme f dont la matrice associée dans la base $\mathcal{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. 1 est une valeur propre de la matrice A.
2. La matrice A est inversible.
3. $f(\vec{e_1} + \vec{e_2}) = 3(\vec{e_1} + \vec{e_2})$.
4. La matrice A est diagonalisable.
5. Il existe une matrice diagonale D telle que $A = PDP^{-1}$ où P est la matrice inversible

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Question 11. Dans l'espace affine euclidien $\mathbb{R}^3$ de dimension 3, on considère le plan P_1 d'équation cartésienne $2x - y + z = 2$ et le plan P_2 d'équation cartésienne $y = z$. On note $D = P_1 \cap P_2$ et on admet que D est une droite.

1. Les vecteurs $\overrightarrow{n_1} = (2, -1, 1)$ et $\overrightarrow{n_2} = (0, 1, -1)$ sont respectivement des vecteurs normaux aux plans P_1 et P_2.

2. Les plans P_1 et P_2 sont perpendiculaires.
3. Le vecteur $\vec{n} = (0, 2, 2)$ est un vecteur directeur de D.
4. Une représentation paramétrique de la droite D est

$$\left\{\begin{array}{lllll} x & = & 1 & & \\ y & = & 1 & +2t, & \qquad \text{où } t \in \mathbb{R} \\ z & = & 1 & +2t & \end{array}\right.$$

5. La distance de tout point $M(x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$ au plan P_1 est $d(M, P_1) = \frac{|2x-y+z-2|}{\sqrt{2}}$.

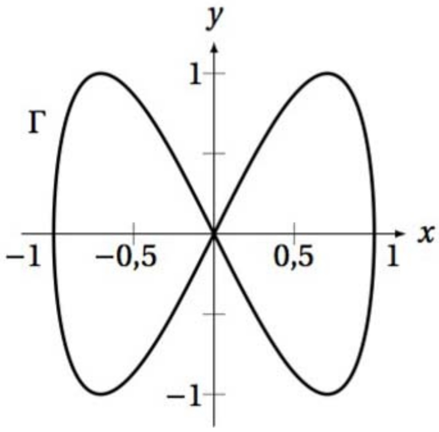
Question 12. Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère la courbe Γ de représentation paramétrique

$$\left\{\begin{array}{lll} x & = & \sin(2t), \qquad \text{avec } t \in [0, 2\pi] \\ y & = & \cos(t) \end{array}\right.$$

1. La courbe Γ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
2. Le vecteur

$$\begin{pmatrix} \sin(2t) \\ -\cos(t) \end{pmatrix}$$

   est un vecteur directeur de la tangente à la courbe Γ au point de paramètre t.
3. La tangente à la courbe Γ au point M de paramètre $t = \frac{\pi}{4}$ est horizontale.
4. La représentation graphique suivante est celle de Γ :



5. Une équation cartésienne de la courbe Γ est $x^2 = 4y^2(1 - y^2)$.