Dans les questions 1 et 2, on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(t) = e^{2t^2}\left(a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)\right),$$

où a, b et ω sont des nombres réels. On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f. On note D.L. pour développement limité et $\epsilon(t)$ représente une fonction qui a pour limite 0 en 0 et qui n'est pas nécessairement la même à chaque item.

Question 1.

1. On a $f'(0) = a + b\omega$.
2. Si $f(0) = 0$ alors $a = 0$.
3. Si $a = 0$, $b = 1$ et $f(1) = 0$ alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\omega = k\pi$.
4. Si $f'(0) = 1$, alors $\omega = b$.
5. Un D.L. de $t \to e^{2t^2}$ à l'ordre 4 au voisinage de 0 est $1 + 2t^2 + 2t^4 + t^4\epsilon(t)$.

Corrigé. Attention, les valeurs de b, ω et f ne sont pas les mêmes selon les questions et les items !

1. FAUX.
$$f'(t) = e^{2t^2}\left(4ta\cos(\omega t) + 4tb\sin(\omega t) - a\omega\sin(\omega t) + b\omega\cos(\omega t)\right) \quad \Rightarrow \quad f'(0) = b\omega$$
2. VRAI.
$$f(0) = 0 = e^0\left(a\cos(0) + b\sin(0)\right) = a \quad \Rightarrow \quad a = 0$$
3. VRAI. On a $f(t) = e^{2t^2} b\sin(\omega t)$ par les valeurs de a et b.
$$f(1) = 0 \quad \Rightarrow \quad e^1\sin(\omega) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin(\omega) = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$
4. FAUX.
$$f'(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad b\omega = 1 \quad \Rightarrow \quad b = \frac{1}{\omega}$$
5. VRAI. On rappelle que $o(t^4) = t^4\epsilon(t)$.
$$e^{2t^2} = 1 + (2t^2) + \frac{(2t^2)^2}{2!} + t^4\epsilon(t) = 1 + 2t^2 + 2t^4 + t^4\epsilon(t)$$

Question 2.

1. Un D.L. de $t \to b\sin(\omega t)$ à l'ordre 4 au voisinage de 0 est $b\omega t - \frac{b\omega^3 t^3}{6} + t^4\epsilon(t)$.
2. Si $a = 0$ et $b = \frac{1}{\omega}$ alors un D.L. de $t \to f(t) - t$ à l'ordre 3 au voisinage de 0 est $\left(2 - \frac{\omega^2}{6}\right)t^3 + t^3\epsilon(t)$
3. Si $a = 0$, $b = 1/\omega$ et $\omega = \pi$ alors la tangente à $\mathcal{C}_f$ en 0 est au-dessus de $\mathcal{C}_f$ à droite de 0.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = f(n)$. Si $a = 0, b = 1$ et $\omega = \pi$ alors $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$.
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = f\left(2n + \frac{1}{2}\right)$. Si $a = 0, b = 1$ et $\omega = \pi$ alors $\lim_{n\to\infty} v_n = +\infty$.

Corrigé.

1. VRAI
$$b\sin(\omega t) = b\left((\omega t) - \frac{(\omega t)^3}{3!} + t^3\epsilon(t)\right) = b(\omega t) - b\frac{\omega^3 t^3}{6} + t^3\epsilon(t)$$
2. VRAI. Pour $a = 0$ et $b = \frac{1}{\omega}$, on a
$$f(t) = e^{2t^2} \times \frac{1}{\omega}\sin(\omega t) = \left(1 + 2t^2 + 2t^3\epsilon(t)\right)\left(\frac{1}{\omega}(\omega t) - \frac{1}{\omega} \times \frac{\omega^3 t^3}{6} + t^3\epsilon(t)\right)$$
$$= \left(1 + 2t^2 + 2t^3\epsilon(t)\right)\left(t - \frac{\omega^2 t^3}{6} + t^3\epsilon(t)\right) = t - \frac{\omega^2 t^3}{6} + 2t^3 + t^3\epsilon(t) = t + \left(2 - \frac{\omega^2}{6}\right)t^3 + t^3\epsilon(t)$$
Donc
$$f(t) - t = \left(2 - \frac{\omega^2}{6}\right)t^3 + t^3\epsilon(t)$$

3. FAUX. On prend l'item précédent avec $\omega = \pi$. D'après le D.L de f, sa tangente est la droite D d'équation $y = t$ et on sait que
$$f(t) - t = \left(2 - \frac{\pi^2}{6}\right) t^3 + t^3\epsilon(t)$$
On étudie le signe de $\left(2 - \frac{\pi^2}{6}\right) t^3$ à droite de 0, c'est-à-dire pour $t > 0$. On a $t^3 > 0$ et
$$\frac{\pi^2}{6} \approx \frac{9,8}{6} \approx 1,6 < 2 \quad \Rightarrow \quad \left(2 - \frac{\pi^2}{6}\right) > 0$$
Donc $f(t) - t > 0$ à droite de 0, c'est à dire $f(t) > t$ donc la courbe de f est au dessus de sa tangente à droite en 0.
4. FAUX. On a $f(t) = f(t) = e^{2t^2}\sin(\pi t)$ donc
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = e^{2n^2}\sin(\pi n) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$
5. VRAI
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad v_n = e^{2\left(2n+\frac{1}{2}\right)^2}\sin\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right) = e^{2\left(2n+\frac{1}{2}\right)^2}.$$
Comme $2\left(2n + \frac{1}{2}\right)^2$ tend vers $+\infty$, on a bien $\lim_{n\to 0} v_n = +\infty$.

Question 3. Soit n un nombre entier supérieur ou égal à 1 et k un nombre entier compris entre 0 et n. On note
$$I_{n,k} = \int_0^1 t^k(1-t)^{n-k}dt.$$

1. En faisant le changement de variable $u = 1 - t$, on montre que $I_{n,k} = -I_{n,n-k}$
2. On a $I_{n,0} = \frac{1}{n}$.
3. En faisant une intégration par partie, on a $I_{n,1} = \frac{1}{n(n+1)}$.
4. On a $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}I_{n,k} = 1$
5. On suppose que $n = 4$. On a $I_{4,2} = 1/30$.

Corrigé.

1. FAUX. On a $u = 1 - t$ donc $du = -dt$, la borne 0 devient 1, et la borne 1 devient 0 et on obtient
$$I_{n,k} = -\int_1^0 (1-u)^k u^{n-k}du = \int_0^1 u^{n-k}(1-u)^k du = \int_0^1 u^{n-k}(1-u)^{n-(n-k)}du = I_{n,n-k}$$
2. FAUX.
$$I_{n,0} = \int_0^1 (1-t)^n dt = \left[-\frac{1}{n+1}(1-t)^{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$
3. VRAI.
$$I_{n,1} = \int_0^1 \underbrace{t}_{v}\underbrace{(1-t)^{n-1}}_{u'}dt = \left[-\frac{1}{n}(1-t)^n \times t\right]_0^1 - \int_0^1 -\frac{1}{n}(1-t)^n dt = \frac{1}{n}\int_0^1 (1-t)^n dt = \frac{1}{n(n+1)}$$
4. VRAI.
$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}I_{n,k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\int_0^1 t^k(1-t)^{n-k}dt = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}t^k(1-t)^{n-k}\right)dt$$
On reconnait le binôme de Newton dans l'intégrale
$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}I_{n,k} = \int_0^1 (t + (1-t))^n\,dt = \int_0^1 1dt = 1$$
5. VRAI. Pour $n = 4$, d'après les questions précédentes, on a $I_{4,0} = I_{4,4} = \frac{1}{5}$ ainsi que $I_{4,1} = I_{4,3} = \frac{1}{4\times 5} = \frac{1}{20}$. Comme
$$I_{4,0} + 4I_{4,1} + 6I_{4,2} + 4I_{4,3} + I_{4,4} = 1$$
on en déduit que
$$6I_{4,2} = 1 - 2\times\frac{1}{5} - 2\times\frac{4}{20} = \frac{5-2-2}{5} = \frac{1}{5} \quad\Leftrightarrow\quad I_{4,2} = \frac{1}{30}$$

Question 4. Soit P un polynôme de degré inférieur ou égal à 2. On note $P(x) = ax^2 + bx + c$. A partir de P, on définit une fonction, notée $J(P)$, par

$$J(P)(x) = \int_0^1 (a\sin^2(\pi y) + b\sin(\pi y)x + cx^2)dy$$

1. $J(P)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à 2.
2. Pour $P(x) = 1$, on a $J(P)(x) = x^2$.
3. Pour $P(x) = x$, on a $J(P)(x) = \frac{2}{\pi}x$.
4. Pour $P(x) = x^2$, on a $J(P)(x) = 1$.
5. Pour $P(x) = 2x + 3$, on a $J(P)(x) = \frac{4}{\pi}x + 3$.

Corrigé. Faites bien attention à la différence entre x et y. x est la variable de la fonction $J(P)$ et y est la variable qui sert à calculer l'intégrale.

1. VRAI.
$$J(P)(x) = \int_0^1 a\sin^2(\pi y)dy + \int_0^1 b\sin(\pi y)xdy + \int_0^1 cx^2dy$$
$$= \underbrace{\left(\int_0^1 a\sin^2(\pi y)dy\right)}_{A} + \underbrace{\left(\int_0^1 b\sin(\pi y)dy\right)}_{B} x + \underbrace{\left(\int_0^1 cdy\right)}_{C} x^2 = A + Bx + Cx^2$$
2. VRAI. On a $a = b = 0$ et $c = 1$ donc
$$J(P)(x) = \int_0^1 1dyx^2 = x^2$$
3. VRAI. On a $a = c = 0$ et $b = 1$ donc
$$J(P)(x) = x\int_0^1 \sin(\pi y)dy = x\left[-\frac{\cos(\pi y)}{\pi}\right]_0^1 = x\left(-\frac{\cos(\pi)}{\pi} + \frac{\cos(0)}{\pi}\right)_0^1 = \frac{2}{\pi}x$$
4. FAUX. On a $c = b = 0$ et $a = 1$, et on utilise $\cos(2\pi y) = 1 - 2\sin^2(\pi y)$ pour calculer l'intégrale (ou une formule d'Euler pour linéariser le sinus.
$$J(P)(x) = \int_0^1 \sin^2(\pi y)dy = \int_0^1 \frac{1-\cos(2\pi y)}{2}dy = \left[\frac{y}{2} - \frac{\sin(2\pi y)}{4\pi}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{\sin(2\pi)}{4\pi} - 0 + \frac{\sin(0)}{4\pi} = \frac{1}{2}$$
5. FAUX. On remarque que J est linéaire par rapport à P, c'est à dire que $J(2X+3) = 2J(X) + 3J(1)$, donc on peut utiliser les items précédents :
$$J(P)(x) = 2 \times \frac{2}{\pi}x + 3 \times x^2 = \frac{4}{\pi}x + 3 \times x^2$$

Question 5. Soit le polynôme $P(z) = z^3 - 6z^2 + 12z - 16$. On admet qu'il se factorise sous la forme $P(z) = (z-4)Q(z)$ avec $Q(Z) = \alpha z^2 + \beta z + \gamma$, où α, β, γ sont des réels à déterminer. On note a, b, c les trois racines de P avec $a \in \mathbb{R}$ et $\mathrm{Im}(b) > 0$. On note (A, B, C) les points du plan d'affixes (a, b, c) dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. On a $P(4) = 1$.
2. On a $Q(z) = z^2 - 2z + 4$.
3. L'ensemble des racines de Q est $\{2 + i\sqrt{3}, 2 - i\sqrt{3}\}$.
4. On a $\frac{b-a}{c-a} = e^{i\frac{\pi}{6}}$.
5. Le triangle ABC est équilatéral.

Corrigé. Le début de l'énoncé est très alambiqué, mais il s'agit juste de chercher les racines de P....

1. FAUX. Sans faire aucun calcul : on nous dit que $P(z) = (z-4)Q(z)$, ce qui signifie que 4 est une racine de P donc que $P(4) = 0$. Par rapport aux notations, on a alors $a = 4$.

2. VRAI. On fait la division euclidienne de P par $(z-4)$ et on obtient bien $Q(z)=z^2-2z+4$.
3. FAUX. Le discriminant de Q est $\Delta = 4-4\times 4 = -12$. Donc les racines de Q sont

$$z_1 = \frac{2+i\sqrt{12}}{2} = 1+i\sqrt{3}; \qquad z_2 = \frac{2-i\sqrt{12}}{2} = 1-i\sqrt{3};$$

Avec les notations de l'énoncé, $b=1+i\sqrt{3}$ et $c=1-i\sqrt{3}$.
4. FAUX

$$\frac{b-a}{c-a} = \frac{1+i\sqrt{3}-4}{1-i\sqrt{3}-4} = \frac{-3+i\sqrt{3}}{-3-i\sqrt{3}} = \frac{(-3+i\sqrt{3})^2}{9+3} = \frac{9-6i\sqrt{3}-3}{12} = \frac{6-6i\sqrt{3}}{12} = \frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

5. VRAI D'après le calcul précédent, on a égalité des longueurs AB et AC, ainsi que la mesure de l'angle $\widehat{BAC}=\frac{\pi}{3}$ (ce n'est pas un angle orienté). On peut dire que le triangle est isocèle en A.
On calcule

$$\frac{a-b}{c-b} = \frac{4-1-i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}-1-i\sqrt{3}} = \frac{3-i\sqrt{3}}{-2i\sqrt{3}} = \frac{(3-i\sqrt{3})(2i\sqrt{3})}{4\times 3} = \frac{6+6i\sqrt{3}}{12} = \frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}}$$

donc $AB=BC$ et $\widehat{ABC}=\frac{\pi}{3}$. Donc on peut conclure que c'est bien un triangle équilatéral.

Question 6. On considère le polynôme $R(X)=P(X^2)$. Ses racines sont obtenues en prenant les racines carrées dans $\mathbb{C}$ des nombres a,b,c. En apariant les paires complexes conjuguées de racines, on obtient une factorisation réelles de la forme :

$$R(X)=(X^2-4)(X^2-uX+v)(X^2+sX+t), \text{ avec } u,v,s,t \text{ réels strictement positifs.}$$

1. Pour $r\in\mathbb{R}^+$ et $\theta\in\mathbb{R}$, les racines carrées de $re^{i\theta}$ sont de la forme $\pm\sqrt{r}e^{i\theta/2}$.
2. Les racines carrées de b sont conjuguées complexes de celles de c.
3. Les racines carrées de b sont $\pm e^{i\pi/6}$.
4. L'ensemble des racines de R à partie réelle positive est $\left\{2, \frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{2}}\right\}$
5. On a $u=s=\sqrt{6}$ et $v=t=2$.

Corrigé.

1. VRAI. Les racines carrées de $re^{i\theta}$ sont les complexes $z=\delta e^{i\alpha}$, avec $\delta>0, \alpha\in\mathbb{R}$, tels que

$$z^2=re^{i\theta} \quad\Leftrightarrow\quad \delta^2e^{i2\alpha}=re^{i\theta} \quad\Leftrightarrow\quad \left\{\begin{array}{rcl}\delta^2 & = & r\\ 2\alpha & = & \theta+2k\pi\end{array}\right. \quad\Leftrightarrow\quad \left\{\begin{array}{rcl}\delta & = & \sqrt{r}\\ \alpha & = & \frac{\theta}{2}+k\pi,\end{array}\right. \quad k\in\mathbb{Z}$$

On prend $k=0$ et $k=1$ (les autres valeurs de k re-donnent les mêmes résultats). Donc

$$z=\sqrt{r}e^{i\theta/2}, \quad \text{ou} \quad z=\sqrt{r}e^{i\theta/2+i\pi}=\sqrt{r}e^{i\theta/2}e^{i\pi}=-\sqrt{r}e^{i\theta/2}$$

2. VRAI. On sait que les racines de R sont les racines carrées de $a=4$, $b=1+i\sqrt{3}$ et $c=1-i\sqrt{3}$. On note a_1,a_2,b_1,b_2,c_1,c_2 ces racines. Par définition des racines carrées complexes, $b_1=-b_2$, $c_1=-c_2$ et $a_1=-a_2$.
Dans $\mathbb{C}$, le polynômes P se décompose de la manière suivante : $P=(X-a)(X-b)(X-c)$, donc par définition $R=(X^2-A)(X^2-b)(X^2-c)$, mais cette décomposition ne correspond pas à celle de l'énoncé car les nombres b,c sont complexes non réels. D'autre part, dans $\mathbb{C}$, R se décompose par

$$R=(X-a_1)(X-a_2)(X-b_1)(X-b_2)(X-c_1)(X-c_2)$$

On sait que, pour revenir à une décomposition dans $\mathbb{R}$, il faut regrouper les termes deux à deux, un terme avec son conjugué et que ça doit être possible car R est un polynôme réel. On cherche quel terme peut être le conjugué de b_1.
— Les racines carrées de $a=4$ sont évidemment $a_1=2$ et $a_2=-2$, ce qui correspond au (X^2-4) de la décomposition de R. Ce sont des réels, donc ça ne peut pas être le conjugué de b_1 qui est complexe non réel.

— Raisonnement par l'absurde. Supposons que que b_2 soit le conjugué de b_1, alors $b_1 = \overline{b_2}$. mais comme $b_1 = -b_2$, on obtient $\overline{b_2} = -b_2$, ce qui signifie que b_2 est un imaginaire pur de la forme $b_2 = i\beta$, donc $(b_2)^2 = -\beta^2 \in \mathbb{R}$. Mais $(b_2)^2 = b \notin \mathbb{R}$. Contradiction. On peut conclure que b_1 n'est pas le conjugué de b_2.

— Donc le conjugué de b_1 est soit c_1, soit c_2. On peut choisir $\overline{b_1} = c_1$.

De même, $\overline{b_2} = c_2$. Donc les racines carrées de c sont bien les conjuguées des racines de b. De plus, on a

$$(X-a_1)(X-a_2) = (X^2-4); \qquad (X-b_1)(X-c_1) = (X^2-uX+v); \qquad (X-b_2)(X-c_2) = (X^2+sX+t)$$

à condition de choisir pour b_1 la racine carrée de b à partie réelle positive.

3. FAUX. On écrit $b = 1 + i\sqrt{3}$ sous forme exponentielle :

$$r = \sqrt{1+3} = 2 \quad \cos\theta = \frac{1}{2}, \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}. \qquad \Rightarrow b = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$$

D'après le premier item, les racines de b sont donc $\pm\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}}$.

4. VRAI. Avec nos choix de notations, on déduit de l'item précédent que

$$b_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}} = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}; \quad b_2 = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}; \quad c_1 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}; \quad c_2 = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}.$$

On sait déjà que $a_1 = 2$ et $a_2 = -2$. Donc les racines à partie réelle positive sont bien

$$a_1 = 2; \qquad b_1 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}; \qquad c_1 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}$$

5. VRAI. On développe les relations obtenues dans l'item 3 :

$$(X^2 - uX + v) = (X-b_1)(X-c_1) = \left(X - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right)\left(X - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= X^2 - 2\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}X + \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = X^2 - \sqrt{6}X + 2 \quad \Rightarrow u = \sqrt{6}, v = 2$$

et

$$(X^2 + sX + t) = (X-b_2)(X-c_2) = \left(X + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)\left(X + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= X^2 + 2\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}X + \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = X^2 + \sqrt{6}X + 2 \quad \Rightarrow s = \sqrt{6}, t = 2$$

Question 7. Soit un nombre complexe $a = re^{i\alpha}$ de module $r > 1$ et d'argument α réel. Son conjugué est $\bar{a}$, d'inverse $a_1 = \frac{1}{\bar{a}} = \frac{1}{r}e^{i\alpha}$. On définit la transformation du plan complexe (pour $z \neq a_1$)

$$w = g(z) = \frac{z-a}{\bar{a}z - 1} = \frac{z-a}{\bar{a}(z-a_1)}$$

Pour un complexe de module unité $u = e^{i\theta}$, on note $g(u) = \rho e^{i\varphi}$ et on calcule ρ en fonction de a et l'argument φ en fonction de α et $\beta = \arg\frac{u-a}{u-a_1}$.

1. On a $|u-a|^2 = 1 + r^2 - 2\bar{a}u$.
2. On a $\rho = 1$.
3. Pour $z_1 \in \mathbb{C}$ et $z_2 \in \mathbb{C}^\star$, on a $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$.
4. On a $|\bar{a}u - 1|^2 = (\bar{a}u-1)(a\bar{u}-1)$
5. L'argument φ vaut $\beta - \alpha$.

Corrigé.

1. FAUX. On rappelle que pour un complexe z, on a $z\bar{z} = |z|^2$.

$$|u-a|^2 = (u-a) \times \overline{(u-a)} = u\bar{u} - u\bar{a} - a\bar{u} + a\bar{a} = 1^2 - u\bar{a} - a\bar{u} + r^2 = 1 + r^2 - (u\bar{a} + a\bar{u})$$

Or, $u\bar{a} = \overline{a\bar{u}}$ et on sait que pour un complexe z, on a $z + \bar{z} = 2\Re e(z)$, donc

$$|u-a|^2 = 1 + r^2 - 2\Re e(u\bar{a})$$

2. VRAI. Il s'agit de mettre $g(u)$ sous forme exponentielle. On utilise la deuxième expression de g et l'expression de l'item 1 :

$$g(u) = \frac{u-a}{\bar{a}(u-a_1)} \quad \Leftrightarrow \quad \rho^2 = |g(u)|^2 = \frac{|u-a|^2}{|\bar{a}|^2 \times |u-a_1|^2}$$

D'après l'item 1, on a au numérateur

$$|u-a|^2 = 1 + r^2 - 2\Re e(u\bar{a})$$

D'après l'item 1 appliqué avec a_1 à la place de a, on a au dénominateur :

$$|\bar{a}|^2 \times |u-a_1|^2 = r^2 \times \left(1 + \frac{1}{r^2} - 2\Re e\left(u\bar{a}_1\right)\right) = r^2 + 1 - 2\Re e\left(\overline{ur^2 a_1}\right) = r^2 + 1 - 2\Re e\left(\overline{ur^2 \frac{1}{r} e^{i\alpha}}\right) = r^2 + 1 - 2\Re e\left(\overline{ure^{i\alpha}}\right)$$

Finalement

$$|\bar{a}|^2 \times |u-a_1|^2 = r^2 + 1 - 2\Re e\left(u\bar{a}\right) = |u-a|^2 \quad \Leftrightarrow \quad \rho^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \rho = 1$$

3. VRAI. Formule de cours.
4. VRAI. Toujours la formule $z\bar{z} = |z|^2$:

$$|\bar{a}u - 1|^2 = (\bar{a}u - 1)\overline{(\bar{a}u - 1)} = (\bar{a}u - 1)(a\bar{u} - 1)$$

5. FAUX. On utilise encore

$$g(u) = \frac{u-a}{\bar{a}(u-a_1)} = \frac{\frac{u-a}{u-a_1}}{\bar{a}}$$

D'après l'item 3,

$$\varphi = \arg(g(u)) = \arg\left(\frac{u-a}{u-a_1}\right) - \arg(\bar{a}) = \beta - (-\alpha) = \beta + \alpha$$

Question 8. On suppose ici que $r = 2$ et α est un réel quelconque. L'équation $g(z) = z$ donne une équation du second dégré qui admet deux solutions complexes, qui dépendent de a.

1. Si z est solution de $g(z) = z$, on a $\bar{a}z^2 - 2z + a = 0$.
2. On a $1 + i\sqrt{3} = e^{i\pi/3}$.
3. Les solutions de $g(z) = z$ s'écrivent $a(1 \pm \sqrt{3})$.
4. Les solutions de $g(z) = z$ sont de module 1.
5. Les solutions de $g(z) = z$ ont pour arguments $\pm\frac{\pi}{3}$

Corrigé.

1. VRAI

$$g(z) = z \quad \Rightarrow \quad \frac{z-a}{\bar{a}z - 1} = z \quad \Rightarrow \quad z - a = z(\bar{a}z - 1) = \bar{a}z^2 - z \quad \Rightarrow \quad \bar{a}z^2 - 2z + a = 0$$

2. FAUX, voir question 6.3 : $1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\pi/3}$.
3. FAUX. On calcule le discriminant et les racines de $\bar{a}z^2 - 2z + a = 0$, en utilisant que $r = 2$

$$\Delta = 4 - 4\bar{a}a = 4 - 4r^2 = -12 \quad \Rightarrow \quad z = \frac{2 \pm i\sqrt{12}}{2\bar{a}} = \frac{a(2 \pm i2\sqrt{3})}{2a\bar{a}} = \frac{a(2 \pm i2\sqrt{3})}{2 \times r^2} = \frac{a(1 \pm i\sqrt{3})}{4}$$

4. VRAI. Le module de a est 2, et le module de $1 \pm i\sqrt{3}$ aussi (calcul fait précédement), donc le module de z est $\frac{2\times 2}{4} = 1$

5. FAUX. On a bien $(1 \pm i\sqrt{3})$ qui a pour argument $\pm\frac{\pi}{3}$, mais a a pour argument α donc $\arg(z) = \alpha \pm \frac{\pi}{3}$.

On s'intéresse à une cellule qui est capable de produire deux molécules différentes, l'une notée A et l'autre B. Ces molécules sont produites selon les règles suivantes

— Si la cellule est vivante, elle produit A, respectivement B, avec une probabilité de $P(A) = 1/2$, respectivement $P(B) = 1/2$.

— Si la cellule produit B, elle meurt tout de suite après la production de B.

— Si la cellule produit successivement quatre A, elle meurt tout de suite après la production du quatrième A.

On isole une de ces cellules qui n'a encore rien produit. On note X, respectivement Y, la variable aléatoire qui donne le nombre de A, respectivement B, produits par la cellule avant de mourir.

Question 9.

1. Après la mort de la cellule, les molécules produites peuvent être représentées par l'un des éléments de l'ensemble $\{B, AB, AAB, AAAB, AAAA\}$.
2. On a $P(AB) = 1/5$.
3. On a $P(AAB) = 1/8$.
4. On a $P(X = 2) = 1/4$.
5. On a $P(Y = 1) = 4/5$.

Corrigé. On peut supposer que la production des molécules successives se fait de manière indépendante, donc pour calculer la probabilité d'un événement, il suffit de multiplier les probabilités de chaque production. Comme les probabilités de A et B sont les mêmes, ça revient à multiplier $1/2$ autant de fois que de molécule produite.

1. VRAI. Ce sont tous les événements possibles.
2. FAUX
$$P(AB) = P(A) \times P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$
3. VRAI
$$P(AAB) = P(A) \times P(A) \times P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$
4. FAUX. L'évènement $X = 2$ signifie que la molécule produit exactement deux fois la molécules A. Ce qui implique qu'elle a produit B et qu'elle est morte ensuite. Donc c'est AAB. Donc $P(X = 2) = P(AAB) = \frac{1}{8}$.
5. FAUX. L'évènement $Y = 1$ signifie que la cellule a produit B, donc ça correspond aux évènements $B, AB, AAB, AAAB$. On peut calculer les probabilités de ces événements (on en a déjà fait une partie) et additionner :
$$P(Y = 1) = P(B) + P(AB) + P(AAB) + P(AAAB) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{8 + 4 + 2 + 1}{16} = \frac{15}{16}$$
Mais le plus rapide est de passer par l'événement contraire
$$P(Y = 1) = 1 - P(AAAA) = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$$

Question 10.

1. L'espérance de la variable aléatoire X est de $15/16$.
2. L'espérance de la variable aléatoire Y est de $7/16$.
3. La probabilité que $X = 4$ sachant que $Y = 1$ (notées $P(X = 4|Y = 1)$) est de $1/16$.
4. Les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.
5. On isole cinq cellules qui n'ont encore rien produit. On suppose leur comportement indépendant. Après la mort des cinq cellules, la probabilité que k molécules B aient été produites en tout est de $\binom{5}{k}\left(\frac{1}{16}\right)^{5-k}\left(\frac{15}{16}\right)^{k}$ pour $k \leqslant 5$.

Corrigé.

1. VRAI. X peut valoir 0,1,2,3 ou 4, donc
$$E(X) = 0 \times P(X = 0) + 1 \times P(X = 1) + 2 \times P(X = 2) + 3 \times P(X = 3) + 4 \times P(X = 4)$$
$$= 1 \times P(AB) + 2 \times P(AAB) + 3 \times P(AAAB) + 4 \times P(AAAA) = \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{8} + 3 \times \frac{1}{16} + 4 \times \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$$

2. FAUX. Y ne peut valoir que 0 ou 1, donc

$$E(Y) = 0 \times P(Y = 1) + 1 \times P(Y = 1) = \frac{15}{16}$$

3. FAUX

$$P(X = 4 | Y = 1) = \frac{P(X = 4 \cap Y = 1)}{P(Y = 1)} = 0$$

Car $X = 4 \cap Y = 1$ signifie que la même molécule a produit quatre A et un B. Ce qui est impossible.

4. FAUX. Si elles étaient indépendantes, alors $P(X = 4 \cap Y = 1)$ serait égal à $P(X = 4)P(Y = 1) = \frac{1}{16} \times \frac{15}{16}$.
5. VRAI. Chaque cellule est une expérience indépendante et on considère que le succès de cette expérience est la production de la molécule B. La probabilité de ce succès est $p = P(y = 1) = \frac{15}{16}$. On compte le nombre de succès en cinq expérience, donc ça correspond à une loi binomiale $\mathcal{B}(5, \frac{15}{16})$. Donc la probabilité qu'il y a eu k succès (k entre 0 et 5) est bien $\binom{5}{k} \left(\frac{15}{16}\right)^k \left(\frac{1}{16}\right)^{5-k}$.

Soit a un réel non nul. On considère les matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

On note $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire dont la matrice représentative dans la base canonique est B.

Question 11.

1. A est diagonalisable et admet deux valeurs propres 0 et -1.
2. Le rang de A est égal à 2.
3. Le polynôme caractéristique de A est le polynôme nul.
4. B est diagonalisable et ses valeurs propres sont 1 et 2.
5. $A + B$ est diagonalisable.

Corrigé.

1. VRAI. A est déjà sous la forme d'une matrice diagonale, avec sur sa diagonale les nombre 0 et -1. Notons au passage que la base canonique est donc une base de vecteur propre : $(1, 0, 0)$ et $(0, 1, 0)$ sont vecteur propre pour 0 et $(0, 0, 1)$ est vecteur propre pour 1. Plus précisément $E_1(A) = \text{Vect}(0, 0, 1)$ et $E_0(A) = \text{Vect}\{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$.
2. FAUX. Le rang est la dimension de l'image de A. Or 0 est une valeur propre double et A diagonalisable donc l'espace propre associé à la valeur propre 0 a pour dimension 2. Mais cet espace propre correspond au noyau de A, qui a donc dimension 2. Par théorème du rang, la dimension de l'image de A est donc 1.
3. FAUX. Le polynôme caractéristique contient les valeurs propres donc $P_A(\lambda) = -(\lambda - 0)^2(\lambda - 1) = -\lambda^3 + \lambda^2$.
4. VRAI. B étant une matrice triangulaire supérieure, ses valeurs propres sont sur la diagonale (on peut aussi calculer rapidement le polynôme caractéristique) et sont donc 1 de multiplicité deux, et 2 de multiplicité 1.
   — Comme 2 est une valeur propre de multiplicité 1, on a forcément son espace propre E_2 de dimension 1 (la dimension ne peut pas être 0 vu qu'il y a obligatoirement un vecteur propre pour faire une valeur propre !).
   — 1 est de multiplicité deux, donc la dimension de son espace propre E_1 est soit 1, soit 2. La matrice B représente un endomorphisme en base canonique, et les deux premières colonne sont "diagonalisée", c'est à dire que les deux vecteurs de la base canonique $(1, 0, 0)$ et $(0, 1, 0)$ sont des vecteurs propres de la valeur propre 1 (ça se vérifie facilement). Ces deux vecteurs n'étant pas colinéaires, la dimension de l'espace propre E_1 est au moins deux. Donc $\dim E_1 = 2$ et on a $E_1(B) = \text{Vect}\{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$.

   Chaque espace propre a pour dimension la multiplicité de la valeur propre, donc B est diagonalisable.
5. FAUX. on a

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc (toujours par le même raisonnement) la matrice $A + B$ n'a qu'une seule valeur propre : 1 de multiplicité trois. Par l'absurde, si on pouvait diagonaliser $A + B$, alors il existerait une matrice P inversible et D la diagonale des valeurs propres telle que

$$A + B = PDP^{-1} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} = PI_3P^{-1} = PP^{-1} = I_3$$

Or $A + B \neq I_3$ car $a \neq 0$. Contradiction. Donc $A + B$ n'est pas diagonalisable.

Question 12.

1. $\begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de B associé à la valeur propre 2.
2. A et B ont un sous-espace propre commun.
3. $A^{2015} = A$
4. Le noyau de g est un sous-espace propre de g.
5. L'application linéaire $g - id$ est une projection.

Corrigé.

1. VRAI. On vérifie en calculant

$$B \times \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a + a \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. VRAI. Voir précédemment, $E_0(A) = \mathrm{Vect}\{(1,0,0),(0,1,0)\}$ et $E_1(B) = \mathrm{Vect}\{(1,0,0),(0,1,0)\}$ sont bien le même ensemble.
3. VRAI. En effet

$$A^{2015} = \begin{pmatrix} 0^{2015} & 0 & 0 \\ 0 & 0^{2015} & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^{2015} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = A$$

4. FAUX. Comme 0 n'est pas valeur propre de B, alors $\ker g = \{0\}$ n'est pas un sous-espace propre (car un sous-espace propre doit obligatoirement contenir au moins un vecteur non nul !).
5. VRAI. On sait que B est diagonalisable, donc si on se place dans une base de vecteur propre pour B, la matrice de $g - id$ est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

qui est bien une matrice de projection.