Dans les questions 1 et 2, on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(t) = e^{2t^2}\left(a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)\right),$$

où a, b et ω sont des nombres réels. On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f. On note D.L. pour développement limité et $\epsilon(t)$ représente une fonction qui a pour limite 0 en 0 et qui n'est pas nécessairement la même à chaque item.

Question 1.

1. On a $f'(0) = a + b\omega$.
2. Si $f(0) = 0$ alors $a = 0$.
3. Si $a = 0$, $b = 1$ et $f(1) = 0$ alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\omega = k\pi$.
4. Si $f'(0) = 1$, alors $\omega = b$.
5. Un D.L. de $t \to e^{2t^2}$ à l'ordre 4 au voisinage de 0 est $1 + 2t^2 + 2t^4 + t^4\epsilon(t)$.

Question 2.

1. Un D.L. de $t \to b\sin(\omega t)$ à l'ordre 4 au voisinage de 0 est $b\omega t - \frac{b\omega^3 t^3}{6} + t^4\epsilon(t)$.
2. Si $a = 0$ et $b = \frac{1}{\omega}$ alors un D.L. de $t \to f(t) - t$ à l'ordre 3 au voisinage de 0 est $\left(2 - \frac{\omega^2}{6}\right)t^3 + t^3\epsilon(t)$
3. Si $a = 0$, $b = 1/\omega$ et $\omega = \pi$ alors la tangente à $\mathcal{C}_f$ en 0 est au-dessus de $\mathcal{C}_f$ à droite de 0.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = f(n)$. Si $a = 0, b = 1$ et $\omega = \pi$ alors $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$.
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = f\left(2n + \frac{1}{2}\right)$. Si $a = 0, b = 1$ et $\omega = \pi$ alors $\lim_{n\to\infty} v_n = +\infty$.

Question 3. Soit n un nombre entier supérieur ou égal à 1 et k un nombre entier compris entre 0 et n. On note

$$I_{n,k} = \int_0^1 t^k(1-t)^{n-k}dt.$$

1. En faisant le changement de variable $u = 1 - t$, on montre que $I_{n,k} = -I_{n,n-k}$
2. On a $I_{n,0} = \frac{1}{n}$.
3. En faisant une intégration par partie, on a $I_{n,1} = \frac{1}{n(n+1)}$.
4. On a $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} I_{n,k} = 1$
5. On suppose que $n = 4$. On a $I_{4,2} = 1/30$.

Question 4. Soit P un polynôme de degré inférieur ou égal à 2. On note $P(x) = ax^2 + bx + c$. A partir de P, on définit une fonction, notée $J(P)$, par

$$J(P)(x) = \int_0^1 (a\sin^2(\pi y) + b\sin(\pi y)x + cx^2)dy$$

1. $J(P)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à 2.
2. Pour $P(x) = 1$, on a $J(P)(x) = x^2$.
3. Pour $P(x) = x$, on a $J(P)(x) = \frac{2}{\pi}x$.
4. Pour $P(x) = x^2$, on a $J(P)(x) = 1$.
5. Pour $P(x) = 2x + 3$, on a $J(P)(x) = \frac{4}{\pi}x + 3$.

Question 5. Soit le polynôme $P(z) = z^3 - 6z^2 + 12z - 16$. On admet qu'il se factorise sous la forme $P(z) = (z - 4)Q(z)$ avec $Q(Z) = \alpha z^2 + \beta z + \gamma$, où α, β, γ sont des réels à déterminer. On note a, b, c les trois racines de P avec $a \in \mathbb{R}$ et $\mathrm{Im}(b) > 0$. On note (A, B, C) les points du plan d'affixes (a, b, c) dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. On a $P(4) = 1$.
2. On a $Q(z) = z^2 - 2z + 4$.
3. L'ensemble des racines de Q est $\{2 + i\sqrt{3}, 2 - i\sqrt{3}\}$.
4. On a $\frac{b-a}{c-a} = e^{i\frac{\pi}{6}}$.

5. Le triangle ABC est équilatéral.

Question 6. On considère le polynôme $R(X) = P(X^2)$. Ses racines sont obtenues en prenant les racines carrées dans $\mathbb{C}$ des nombres a, b, c. En apariant les paires complexes conjuguées de racines, on obtient une factorisation réelles de la forme :

$$R(X) = (X^2 - 4)(X^2 - uX + v)(X^2 + sX + t), \text{ avec } u, v, s, t \text{ réels strictement positifs.}$$

1. Pour $r \in \mathbb{R}^+$ et $\theta \in \mathbb{R}$, les racines carrées de $re^{i\theta}$ sont de la forme $\pm\sqrt{r}e^{i\theta/2}$.
2. Les racines carrées de b sont conjuguées complexes de celles de c.
3. Les racines carrées de b sont $\pm e^{i\pi/6}$.
4. L'ensemble des racines de R à partie réelle positive est $\left\{2, \frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{2}}\right\}$
5. On a $u = s = \sqrt{6}$ et $v = t = 2$.

Question 7. Soit un nombre complexe $a = re^{i\alpha}$ de module $r > 1$ et d'argument α réel. Son conjugué est $\bar{a}$, d'inverse $a_1 = \frac{1}{\bar{a}} = \frac{1}{r}e^{i\alpha}$. On définit la transformation du plan complexe (pour $z \neq a_1$)

$$w = g(z) = \frac{z - a}{\bar{a}z - 1} = \frac{z - a}{\bar{a}(z - a_1)}$$

Pour un complexe de module unité $u = e^{i\theta}$, on note $g(u) = \rho e^{i\varphi}$ et on calcule ρ en fonction de a et l'argument φ en fonction de α et $\beta = \arg \frac{u-a}{u-a_1}$.

1. On a $|u - a|^2 = 1 + r^2 - 2\bar{a}u$.
2. On a $\rho = 1$.
3. Pour $z_1 \in \mathbb{C}$ et $z_2 \in \mathbb{C}^\star$, on a $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$.
4. On a $|\bar{a}u - 1|^2 = (\bar{a}u - 1)(a\bar{u} - 1)$
5. L'argument φ vaut $\beta - \alpha$.

Question 8. On suppose ici que $r = 2$ et α est un réel quelconque. L'équation $g(z) = z$ donne une équation du second dégré qui admet deux solutions complexes, qui dépendent de a.

1. Si z est solution de $g(z) = z$, on a $\bar{a}z^2 - 2z + a = 0$.
2. On a $1 + i\sqrt{3} = e^{i\pi/3}$.
3. Les solutions de $g(z) = z$ s'écrivent $a(1 \pm \sqrt{3})$.
4. Les solutions de $g(z) = z$ sont de module 1.
5. Les solutions de $g(z) = z$ ont pour arguments $\pm\frac{\pi}{3}$

On s'intéresse à une cellule qui est capable de produire deux molécules différentes, l'une notée A et l'autre B. Ces molécules sont produites selon les règles suivantes

— Si la cellule est vivante, elle produit A, respectivement B, avec une probabilité de $P(A) = 1/2$, respectivement $P(B) = 1/2$.

— Si la cellule produit B, elle meurt tout de suite après la production de B.

— Si la cellule produit successivement quatre A, elle meurt tout de suite après la production du quatrième A.

On isole une de ces cellules qui n'a encore rien produit. On note X, respectivement Y, la variable aléatoire qui donne le nombre de A, respectivement B, produits par la cellule avant de mourir.

Question 9.

1. Après la mort de la cellule, les molécules produites peuvent être représentées par l'un des éléments de l'ensemble $\{B, AB, AAB, AAAB, AAAA\}$.
2. On a $P(AB) = 1/5$.
3. On a $P(AAB) = 1/8$.
4. On a $P(X = 2) = 1/4$.
5. On a $P(Y = 1) = 4/5$.

Question 10.

1. L'espérance de la variable aléatoire X est de $15/16$.
2. L'espérance de la variable aléatoire Y est de $7/16$.
3. La probabilité que $X = 4$ sachant que $Y = 1$ (notées $P(X = 4|Y = 1)$) est de $1/16$.
4. Les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.
5. On isole cinq cellules qui n'ont encore rien produit. On suppose leur comportement indépendant. Après la mort des cinq cellules, la probabilité que k molécules B aient été produites en tout est de $\binom{5}{k}\left(\frac{1}{16}\right)^{5-k}\left(\frac{15}{16}\right)^{k}$ pour $k \leqslant 5$.

Soit a un réel non nul. On considère les matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

On note $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire dont la matrice représentative dans la base canonique est B.

Question 11.

1. A est diagonalisable et admet deux valeurs propres 0 et -1.
2. Le rang de A est égal à 2.
3. Le polynôme caractéristique de A est le polynôme nul.
4. B est diagonalisable et ses valeurs propres sont 1 et 2.
5. $A + B$ est diagonalisable.

Question 12.

1. $\begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de B associé à la valeur propre 2.
2. A et B ont un sous-espace propre commun.
3. $A^{2015} = A$
4. Le noyau de g est un sous-espace propre de g.
5. L'application linéaire $g - id$ est une projection.