Question 1. On se propose d'étudier quelques propriétés de la fonction $f : x \to \frac{\ln(\cos^2 x)}{x^2 e^{\sin x}}$ au voisinage de 0. Dans les développements limités (DL) qui suivent, ϵ représente une fonction qui a pour limite 0 en 0 et qui n'est pas nécessairement la même à chaque item.

1. La fonction f est définie sur $]-\pi, \pi[$.
2. La fonction f est périodique de période 2π.
3. Un développement limité de $\cos^2 x$ à l'ordre 5 en 0 est $1 - x^2 + \frac{x^4}{12} + x^5\epsilon(x)$.
4. Pour avoir un DL de $\ln(\cos^2 x)$ au voisinage de 0 à l'ordre 5, il suffit d'un DL de $\cos^2 x$ en 0 à l'ordre 5 et un DL de $\ln(1+u)$ au voisinage de 0 à l'ordre 2.
5. un DL de $\ln(\cos^2 x)$ au voisinage de 0 à l'ordre 5 est $-x^2 - \frac{x^4}{6} + x^5\epsilon(x)$.

Corrigé. Remarque de notation : $x^n\epsilon(x)$ est la même chose que $o(x^n)$.

1. FAUX. La fonction est définie si $\cos^2 x > 0$ et $x^2 e^{\sin x} \neq 0$.
   — Comme un carré est positif ou nul, la première condition devient $\cos^2 x \neq 0$. On étudie l'équation
   $$\cos^2 x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos x = 0 \quad \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$
   — Une exponentielle n'est jamais nulle, donc la deuxième condition devient $x^2 \neq 0$, c'est à dire $x \neq 0$
   Finalement, la fonction est définie sur
   $$\mathbb{R}\backslash\{0; \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\}$$
2. FAUX, à cause du x^2. Précisément :
   $$f(x+2\pi) = \frac{\ln(\cos^2(x+2\pi))}{(x+2\pi)^2 e^{\sin(x+2\pi)}} = \frac{\ln(\cos^2(x))}{(x+2\pi)^2 e^{\sin(x)}} \neq f(x)$$
3. FAUX
   $$\cos^2 x = \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right)^2 = 1 + \frac{x^4}{4} - 2\frac{x^2}{2} + 2\frac{x^4}{24} + o(x^5) = 1 - x^2 + \frac{x^4}{3} + x^5\epsilon(x)$$
4. VRAI. On a $\ln(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + \cdots$. Mais comme $y = -x^2 + \frac{x^4}{3} + x^5\epsilon(x)$ démarre à la puissance 2, le terme y^3 est au minimum en x^6, donc il n'apparaît pas dans le développement limité. On se contente donc de $\ln(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + o(y^2)$ (à l'ordre 2).
5. VRAI.
   $$\ln(\cos^2 x) = \ln\left(1 + \left[-x^2 + \frac{x^4}{3} + o(x^5)\right]\right) = \left(-x^2 + \frac{x^4}{3}(x) + o(x^5)\right) - \frac{1}{2}\left(-x^2 + \frac{x^4}{3} + o(x^5)\right)^2 + o(x^5)$$
   $$= -x^2 + \frac{x^4}{3} - \frac{x^4}{2} + o(x^5) = -x^2 - \frac{x^4}{6} + x^5\epsilon$$

Question 2.

1. Un DL de $e^{\sin x}$ à l'ordre 3 en 0 est $1 - x + \frac{x^2}{2} + x^3\epsilon(x)$.
2. Un DL de $\frac{1}{e^{\sin x}}$ à l'ordre 3 en 0 est $1 + x + \frac{x^2}{2} + x^3 + x^3\epsilon(x)$.
3. Un DL de f à l'ordre 3 en 0 est $-1 + x - \frac{2x^2}{3} + \frac{x^3}{6} + x^3\epsilon(x)$.
4. La fonction f est prolongeable par continuité en $x = 0$.
5. Au voisinage de 0, la courbe représentative de f reste au-dessus de la parabole d'équation $y = -1 + x - \frac{2x^2}{3}$.

Corrigé.

1. FAUX
   $$e^{\sin x} = e^{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)} = 1 + \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2 + \frac{1}{6}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^3 + x^3\epsilon(x)$$
   $$= 1 + x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3\epsilon(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^3\epsilon(x)$$

2. FAUX

$$\frac{1}{e^{\sin x}} = \frac{1}{1+\left[x+\frac{x^2}{2}+x^3\epsilon(x)\right]} = 1-\left(x+\frac{x^2}{2}\right)+\left(x+\frac{x^2}{2}\right)^2-\left(x+\frac{x^2}{2}+\right)^3+x^3\epsilon(x)$$

$$= 1-x-\frac{x^2}{2}+x^2+x^3-x^3+x^3\epsilon(x) = 1-x+\frac{x^2}{2}+x^3\epsilon(x)$$

3. VRAI. Ne pas oublier le x^2 supplémentaire au dénominateur :

$$\frac{\ln(\cos^2 x)}{x^2 e^{\sin x}} = \frac{\left(-x^2-\frac{x^4}{6}+x^5\epsilon\right)}{x^2}\left(1-x+\frac{x^2}{2}+x^3\epsilon(x)\right) = \left(-1-\frac{x^2}{6}+x^3\epsilon\right)\left(1-x+\frac{x^2}{2}+x^3\epsilon(x)\right)$$

$$= -1+x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^2}{6}+\frac{x^3}{6}+x^3\epsilon = -1+x-\frac{2x^2}{3}+\frac{x^3}{6}+x^3\epsilon(x)$$

4. VRAI. Grâce au développement limité, on peut faire tendre x vers 0, et on a $\lim_0 f(x) = -1$. Donc f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = -1$.
5. FAUX. D'après le développement limité, on a au voisinage de 0 :

$$f(x)-\left[-1+x-\frac{2x^2}{3}\right] = \frac{x^3}{6}+x^3\epsilon(x)\begin{cases}\geqslant 0, & \text{pour } x\geqslant 0 \quad \text{donc } f \text{ est au-dessus de la parabole}\\ \leqslant 0, & \text{pour } x\leqslant 0 \quad \text{donc } f \text{ est en-dessous de la parabole}\end{cases}$$

La parabole traverse la courbe.

Question 3. On veut calculer $I_6 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6(x)dx$. On exprimera d'abord $\cos^2 x, \cos^3 x, \cos^6 x$ en fonction de $\cos(nx)$ pour $n = 1$ à 6, en utilisant les formules d'addition du cosinus.

1. On a $\cos(2x) = 2\cos^2(x)+1$
2. On a $2\cos a\cos b = \cos(a+b)+\cos(a-b)$
3. On a $\cos^3(x) = \frac{\cos(3x)+3\cos(x)}{4}$
4. On a $\cos^6 x = \frac{1}{32}\left(\cos(6x)+6\cos(4x)+12\cos(2x)+10\right)$
5. On a $I_6 = \frac{5\pi}{32}$

Corrigé. La méthode suggérée par l'exercice est de travailler uniquement avec les formules de trigonométrie. Mais on peut en fait aller plus vite dans les question 3 et 4 avec la formule d'Euler.

1. FAUX La formule de trigoométrie est

$$\cos(2x) = \cos^2(x)-\sin^2(x) = \cos^2(x)-(1-\sin^2(x)) = 2\cos^2(x)-1$$

2. VRAI
3. VRAI

$$\cos^3(x) = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3 = \frac{e^{i3x}+3e^{ix}+3e^{-ix}+e^{-i3x}}{8} = \frac{\cos(3x)+3\cos(x)}{4}$$

4. FAUX

$$\cos^6(x) = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^6 = \frac{e^{i6x}+6e^{i4x}+15e^{i2x}+20+15e^{-i2x}+6e^{-i4x}+e^{-i6x}}{2^6}$$

$$= \frac{1}{32}\left(\cos(6x)+6\cos(4x)+15\cos(2x)+10\right)$$

5. VRAI

$$I_6 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{32}\left(\cos(6x)+6\cos(4x)+15\cos(2x)+10\right)dx = \frac{1}{32}\left[\frac{\sin(6x)}{6}+\frac{6}{4}\sin(4x)+\frac{15}{2}\sin(2x)+10x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{5\pi}{32}$$

Question 4. Soient les intégrales $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)dx$ et $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2}(x)\sin^2(x)dx$. Exprimer J_n en fonction de I_n et I_{n-2}, puis intégrer par partie J_n (on prendra $dv = \cos^{n-2}(x)\sin(x)dx$). En déduire une relation de récurrence entre I_n et I_{n-2}. Calculer alors I_0 etI_{10}.

1. $I_n = J_n + I_{n-2}$

2. On a $v = \frac{1}{n-1}\cos^{n-1} x$
3. En intégrant par partie J_n, on trouve $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$
4. $I_{2k} = \frac{\pi}{2}\frac{1.3.5...(2k-1)}{2.4.6...(2k)}$
5. On a $I_{10} = \frac{63\pi}{256}$

Corrigé.

1. FAUX. Dans I_n, on sépare $\cos^n$ en $\cos^{n-2} \times \cos^2$:

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2}(x)\cos^2(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2}(x)(1-\sin^2(x))dx = -J_n + I_{n-2}$$

2. FAUX. L'indication $dv = \cos^{n-2}(x)\sin(x)dx$ doit se comprendre comme $v'(x) = \cos^{n-2}(x)\sin(x)$. On reconnait une expression $u'u^k$ qui a une primitive en $\frac{u^{k+1}}{k+1}$. Mais attention, il manque le signe $-$ de la dérivée du cosinus.

$$v(x) = -\frac{1}{n-1}\cos^{n-1} x$$

3. VRAI. On fait apparaître le v' de la question précédente en séparant $\sin^2$ en $\sin \times \sin$:

$$J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\underbrace{\cos^{n-2}(x)\sin(x)}_{v'}\right)\underbrace{\sin x}_{u}\,dx = \left[-\frac{1}{n-1}\cos^{n-1} x \sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{n-1}\cos^{n-1} x \cos x dx$$

$$J_n = \frac{1}{n-1} I_n$$

Donc en reportant dans l'expression de la question 1 :

$$I_n = -\frac{1}{n-1}I_n + I_{n-2} \quad \Rightarrow I_{n-2} = I_n + \frac{1}{n-1}I_n = \frac{n}{n-1}I_n$$

4. VRAI

$$I_{2k} = \frac{2k-1}{2k}I_{2k-2} = \frac{2k-1}{2k}\frac{2k-3}{2k-2}I_{2k-4} = \cdots = \frac{(2k-1)(2k-3)\dots 1}{(2k)(2k-1)\dots 2}I_0$$

Avec $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1dx = \frac{\pi}{2}$.

5. FAUX, Il manque un 2 au dénominateur :

$$I_{10} = \frac{9\times 7\times 5\times 3\times 1}{10\times 8\times 6\times 4\times 2}\frac{\pi}{2} = \frac{9\times 7}{2\times 8\times 2\times 4\times 2}\frac{\pi}{2} = \frac{63}{256}\frac{\pi}{2}$$

Question 5. Pour un entier naturel non nul n, on considère le polynôme P_n défini par

$$P_n(x) = (1+ix)^n - (1-ix)^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

On résoudra dans $\mathcal{C}$ l'équation $X^n = 1$ avec $X = \frac{1+ix}{1-ix}$, on en déduira les racines (réelles ou complexes) de P_n selon la parité de n.

1. Le degré de P_n est toujours égal à n.
2. L'équation $P_n(x) = 0$ a les même solutions que l'équation $\left(\frac{1+ix}{1-ix}\right)^n = 1$.
3. Si n est pair, P admet $n-1$ racines distinctes de la forme $x_k = \frac{1-\exp\frac{2\pi ik}{n}}{i(1+\exp\frac{2\pi ik}{n})}$ avec k entier, $k \in [0, n-1]$ et $k \neq n/2$.
4. Si n est impair, P_n admet n racines distinctes de la forme $x_k = \tan\frac{k\pi}{n}$ avec k entier et $k \in [0, n-1]$.

Corrigé.

1. FAUX. Quand on développe les puissances n avec le binôme de newton, le terme de degré n (le seul qu'on calcule) est

$$i^n x^n - (-1)^n i^n x^n$$

Mais ce terme est nul pour n pair, donc dans ce cas, le degré de P_n est inférieur à n.

2. VRAI.

$$P_n(x) = 0 \Leftrightarrow (1+ix)^n - (1-ix)^n = 0$$

Si $x = -i$, on a $P_n(-i) = 2^n \neq 0$, donc on peut diviser l'équation par $(1-ix)^n$ sans changer les solutions

$$P_n(x) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1+ix}{1-ix}\right)^n = 0$$

3. FAUX. Les solutions de $X^n = 1$ sont les racines n-ièmes de l'unité $e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ avec $k = 0, \ldots, n-1$. Donc on a :

$$\frac{1+ix}{1-ix} = e^{\frac{2ik\pi}{n}} \quad \Rightarrow 1 + ix = e^{\frac{2ik\pi}{n}} - ixe^{\frac{2ik\pi}{n}} \quad \Rightarrow xi(1+e^{\frac{2ik\pi}{n}}) = e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1$$

Si n est pair, alors pour $k = n/2$, on a l'égalite $0 = 0$. Donc pour $k = 0, \ldots, n-1$ et $k = n/2$ (ce qui fait bien $n-1$ valeurs)

$$x = \frac{e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1}{i(1+e^{\frac{2ik\pi}{n}})}$$

4. VRAI. Si n est impair, on garde toutes les valeurs de k donc n racines :

$$x = \frac{e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1}{i(1+e^{\frac{2ik\pi}{n}})} = \frac{e^{\frac{ik\pi}{n}}\left(e^{\frac{ik\pi}{n}} - e^{-\frac{ik\pi}{n}}\right)}{ie^{\frac{ik\pi}{n}}\left(e^{-\frac{ik\pi}{n}} + e^{\frac{ik\pi}{n}}\right)} = \frac{2i\sin\frac{k\pi}{n}}{i2\cos\frac{k\pi}{n}} = \tan\frac{k\pi}{n}$$

Question 6. 0 est racine de P_n. Les racines non nulles sont celle de $Q_m = \sum_{k=1}^{m} a_k x^{x-1}$ avec $m = deg(P_n)$. On rappelle que la somme de ces racines est $S = -\frac{a_{m-1}}{a_m}$, leur produit est $P = (-1)^{m-1}\frac{a_1}{a_m}$. on se propose de calculer le produit des racines non nulles selon la parité de n (il faut déterminer m).

1. On a $\forall k$, $a_k = C_n^k i^k(1-(-1)^k)$
2. On a toujours $S = 2n$
3. On a toujours $a_1 = 2i$
4. Si n est pair avec $n = 2p$, alors $m = n-1 = 2p-1$ et $P = (-1)^{p-1}n$.
5. Si n est impair avec $n = 2p+1$, alors $\prod_{k=1}^{n-1} \tan\frac{k\pi}{n} = (-1)^p n$.

Corrigé.

1. VRAI. On utilise la formule du binôme de Newton :

$$P_n(x) = (1+ix)^n - (1-ix)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k i^k x^k - \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-i)^k x^k = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{C_n^k i^k(1-(-1)^k)}\, x^k$$

2. FAUX.

$$S = -\frac{a_{m-1}}{a_m} = -\frac{C_n^{m-1} i^{m-1}(1-(-1)^{m-1})}{C_n^m i^m (1-(-1)^m)}$$

avec m le haut degré (coefficient non nul)

— Si n est impaire, $(-1)^n = -1$ donc $a_n = C_n^n i^n(1-(-1)^n) = 2i^n \neq 0$, donc $m = n$ est impair. Par conséquent $m-1$ est pair, donc $(1-(-1)^{m-1}) = 1-1 = 0$. Donc $S = 0$

— Si n est paire, $(-1)^n = 1$ donc $a_n = C_n^n i^n(1-(-1)^n) = 0$ n'est pas le terme de plus haut degré. On a ensuite

$$a_{n-1} = C_n^{n-1} i^{n-1}(1-(-1)^{n-1}) = 2ni^{n-1} \neq 0$$

donc $m = n-1$ est impair. Par conséquent $m-1$ est pair, donc $(1-(-1)^{m-1}) = 1-1 = 0$. Donc $S = 0$

Donc on a toujours

$$S = 0$$

3. FAUX

$$a_1 = C_n^1 i^1(1-(-1)^1) = 2in$$

4. FAUX. Le terme de plus haut degré est $m = n-1$ donc $m = 2p-1$. On connait $a_1 = 2in$ et on calcule

$$a_{n-1} = C_n^{n-1} i^{n-1}(1-(-1)^{n-1}) = n \times i^{2p-1} \times (1-(-1)^{2p-1}) = n \times (i^2)^p i^{-1} \times 2$$
$$= n \times (-1)^p(-i) \times 2 = 2ni(-1)^{p+1} \neq 0$$

On reporte dans P :

$$P = (-1)^{n-2}\frac{a_1}{a_{n-1}} = (-1)^{2p-2}\frac{2in}{2ni(-1)^{p+1}} = (-1)^{p-3} = (-1)^{p-1}(-1)^{-2} = (-1)^{p-1}$$

5. FAUX. D'après la question 8 item 4, les racines sont $\tan \frac{k\pi}{n}$ pour k allant de 0 à $n-1$. P est le produit des racines non nulles donc on exclut $k = 0$.

$$P = \prod_{k=1}^{n-1} \tan \frac{k\pi}{n}$$

D'autre part, $n = 2p+1$ étant impair, le terme de plus au degré est $n = m$ et on a

$$a_n = C_n^n i^n (1-(-1)^n) = 2i^{2p+1} = 2(i^2)^p i = 2i(-1)^p$$

Donc
$$P = (-1)^{n-1}\frac{a_1}{a_n} = (-1)^{2p+1-1}\frac{2in}{2i(-1)^p} = (-1)^p n.$$

On a donc
$$\prod_{k=1}^{n-1} \tan \frac{k\pi}{n} = (-1)^p n.$$

Question 7.

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère le triangle (OAB) rectangle en O, d'angle α, β en A et B, avec $\overrightarrow{OA} = (\cos\alpha, 0)$ et $\overrightarrow{OB} = (0, \sin\alpha)$. on note Ω le centre du cercle inscrit dans le triangle (OAB), J et H les projections orthogonales de Ω sur (OA) et (AB). On a $\Omega J = \Omega H = r$ (rayon du cercle inscrit), les angles $(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{A\Omega}) = \frac{\alpha}{2}$ et $(\overrightarrow{B\Omega}, \overrightarrow{BH}) = \frac{\beta}{2}$. (voir fig.1)

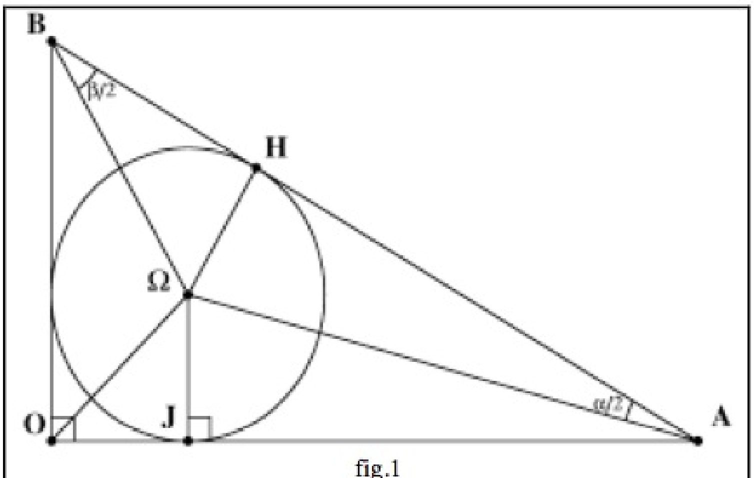

fig.1

On calculera, en fonction de $u = \tan\frac{\alpha}{2}$, les longueurs AB, $d = AH$, BH, $v = \tan\frac{\beta}{2}$, r. On rappelle que $\cos\alpha = \frac{1-u^2}{1+u^2}$, $\sin\alpha = \frac{2u}{1+u^2}$.

1. On a $d = AH = ru$
2. On a $r = (1-d)v$
3. On a $v = \frac{1-u}{1+u}$
4. On a $d = \frac{1-u}{1+u^2}$
5. On a $r = \frac{u(1-u)}{1+u^2}$

Corrigé.

1. On a $d = AH = ru$. FAUX. Dans le triangle rectangle ΩAH, on a

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{AH}{A\Omega} \Leftrightarrow AH = A\Omega \cos\frac{\alpha}{2}$$

Dans le triangle rectangle ΩAJ, on a

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{J\Omega}{A\Omega} = \frac{r}{A\Omega} \Leftrightarrow A\Omega = \frac{r}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

Donc

$$d = AH = A\Omega\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{r}{\sin\frac{\alpha}{2}}\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{r}{\tan(\alpha/2)} = \frac{r}{u}$$

2. VRAI. De la même manière $BH = \frac{r}{v}$. Or dans le triangle rectangle OAB, on a

$$AB^2 = OB^2 + OA^2 = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

donc $BH = BA - AH = 1 - d$, c'est à dire $\frac{r}{v} = 1 - d$ et donc $r = (1-d)v$.

3. VRAI La somme des angles du triangle OAB étant π on a donc $\beta + \alpha + \pi/2 = \pi$ donc

$$\frac{\beta}{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}$$

Donc

$$v = \tan\frac{\beta}{2} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2})}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2})}$$

$$= \frac{\cos\frac{\alpha}{2}\left(1 - \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}\right)}{\cos\frac{\alpha}{2}\left(1 + \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}\right)} = \frac{1-\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan\frac{\alpha}{2}} = \frac{1-u}{1+u}$$

4. VRAI. On a

$$d = \frac{r}{u} = \frac{(1-d)v}{u} = (1-d)\frac{v}{u} = \frac{v}{u} - d\frac{v}{u}$$

donc en regroupant les d :

$$d\left(1+\frac{v}{u}\right) = \frac{v}{u} \quad \Leftrightarrow \quad d\left(\frac{v+u}{u}\right) = \frac{v}{u} \quad \Leftrightarrow \quad d = \frac{v}{v+u}$$

On remplage v par son expression :

$$d = \frac{\frac{1-u}{1+u}}{\frac{1-u}{1+u}+u} = \frac{\frac{1-u}{1+u}}{\frac{1-u+u+u^2}{1+u}} = \frac{1-u}{1+u^2}$$

5. VRAI

$$r = du = \frac{(1-u)u}{1+u^2}$$

Question 8.

On introduit le point K, projection orthogonale de O sur (AB). on note (ω_1, r_1) et (ω_2, r_2) les centres et rayons des cercles inscrits dans les triangles (OKA) et OKB. On calculera, en fonction de $u = \tan\frac{\alpha}{2}$, les quantités OK, r_1, r_2 et $S = r + r_1 + r_2$

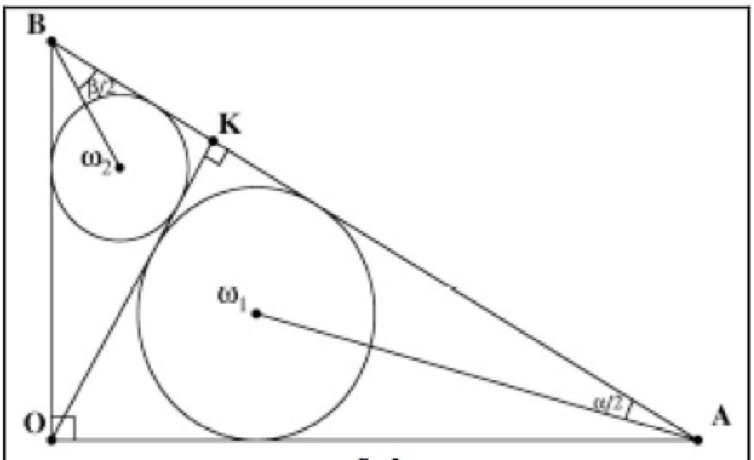

fig.2

1. Les triangles (AOB), (AKO) et (BKO) sont semblables.
2. Pour un triangle T semblable à (AOB), d'hypothénuse h, le rayon du cercle inscrit est hr

3. On a $r_1 = r\sin\alpha$
4. On a $S = r\frac{1+u}{1+u^2}$
5. On a $S = OK$.

Corrigé.

1. VRAI. Triangle semblable signifient qu'ils ont les trois mêmes angles. Mais comme la somme des trois angles d'un triangle vaut π, il suffit qu'il y ait deux angles égaux, le troisième se fera par déduction. Dans OBA, il y a les angles $\alpha, \frac{\pi}{2}, \beta$. Dans AKO, on connait les angles $\frac{\pi}{2}$ et β, donc il est semblable à OBA. Dans OKA, on connait les angles $\frac{\pi}{2}$ et α donc il est semblable à OBA.. Donc les trois sont semblables.
2. VRAI. OAB a pour hypoténuse 1 et pour rayon du cercle inscrit r. Or un triangle semblable à OAB a toutes ses longueurs proportionnelle à celle de OAB. Comme l'hypoténuse a une longueur h, c'est donc le coefficient de proportionnalité. Donc le rayon du cercle inscrit sera bien hr.
3. FAUX. r_1 est le rayon du cercle inscrit à OKA, qui a pour hypoténuse OA de longueur $\cos\alpha$, donc $h = \cos\alpha$ et
$$r_1 = r\cos\alpha$$
C'est dans le triangle OKB qu'on a $r_2 = r\sin\alpha$ par le même raisonnement.
4. FAUX
$$S = r + r_1 + r_2 = r(1+\cos\alpha+\sin\alpha) = r(1+\frac{1-u^2}{1+u^2}+\frac{2u}{1+u^2}) = r(\frac{1+u^2+1-u^2+2u}{1+u^2}) = 2r\frac{1+u}{1+u^2}$$
5. VRAI. Dans le triangle OKB, on a $\sin\beta = \frac{OK}{OB}$ donc
$$OK = OB\sin\beta = \sin\alpha\sin\beta = \sin\alpha\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \sin\alpha\cos\alpha = \frac{1-u^2}{1+u^2}\times\frac{2u}{1+u^2}$$
et
$$S = 2r\frac{1+u}{1+u^2} = 2\frac{u(1-u)}{1+u^2}\frac{1+u}{1+u^2} = \frac{2u}{1+u^2}\frac{1-u^2}{1+u^2}$$

Un examen comporte 10 questions auxquelles il faut répondre par "vrai" ou "faux". Si la réponse à une question est juste, elle rapporte 1 point, si elle est fausse, elle fait perdre 1 point. Les candidats répondent tous aux 10 questions. Pour la note (sur 10), on calcule $S = N_J - (10 - N_J) = 2N_j - 10$ ou N_J est le nombre de réponses justes. La note est fixée ainsi : $N = S$ si $S \geqslant 0$ et $N = 0$ si $S < 0$.

L'ensemble des candidats se décompose en deux catégories, les candidats sérieux (événement S) et les non-sérieux (événement $\bar{S}$). Si on tire au hasard un candidat, on considère que $\mathbb{P}(S) = \mathbb{P}(\bar{S}) = \frac{1}{2}$. Si un candidat est sérieux, la probabilité qu'il donne une réponse juste à une question est $\frac{3}{4}$, s'il n'est pas sérieux, la probabilité qu'il donne une réponse juste à une question est $\frac{1}{2}$. Les réponses aux différentes questions sont indépendantes. On rappelle que la probabilité conditionnelle de A sachant B se note $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A|B)$.

Question 9.

1. Les notes possibles sont les entiers de 0 à 10
2. Si un candidat n'est pas sérieux, la probabilité qu'il donne 9 bonnes réponses et une fausse, et donc qu'il obtienne 8/10 est $\mathbb{P}_{\bar{S}}(N=8) = \mathbb{P}(N=8|\bar{S}) = \frac{10}{2^{10}}$.
3. Si un candidat n'est pas sérieux, la probabilité qu'il donne 10 bonnes réponses, et donc qu'il obtienne 10/10 est $\mathbb{P}_{\bar{S}}(N=10) = \mathbb{P}(N=10|\bar{S}) = \frac{1}{20}$.
4. Si un candidat n'est pas sérieux, la probabilité qu'il obtienne 0/10 est $\mathbb{P}(N=0|\bar{S}) = \frac{1}{2}$.
5. Si un candidat n'est pas sérieux, la probabilité qu'il obtienne 1/10 est $\mathbb{P}(N=1|\bar{S}) = 0$.

Corrigé. Pour commencer, ces questions me posent un problème de modélisation : où placer la binomiale ?

Pour une personne fixée, si on considère le nombre de réponses justes sur 10 question, c'est une binomiale X de paramètre $\mathcal{B}(10,p)$ avec p la probabilité pour le candidat de répondre juste à une question. Et pour le nombre de réponse fausse, ça sera $\mathcal{B}(10, 1-p)$

Donc il est nécessaire de connaître la personne qui passe l'examen pour utiliser la binomiale. Dans la première série de question, c'est le candidat non sérieux, donc $p = \frac{1}{2}$ et la binomiale des réponses justes et des réponses fausses sont les mêmes.

1. FAUX, d'après la formule $S = 2N_j - 10$ les notes possibles sont des entiers pairs uniquement !

2. VRAI. On cherche la probabilité de faire 9 réponses justes, donc que $X = 9$ avec X suivant la loi binomiale X de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{1}{2}$:

$$\mathbb{P}(N = 8|\bar{S}) = \mathbb{P}(X = 9) = C_{10}^{9} \left(\frac{1}{2}\right)^{9} \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{1} = \frac{10}{2^{10}}$$

3. VRAI. De la même manière, on a

$$\mathbb{P}_{\bar{S}}(N = 10) = P(X = 10) = C_{10}^{10} \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{0} = \frac{1}{2^{10}}$$

4. FAUX La probabilité sachant $\bar{S}$ est une probabilité, Donc la somme des probabilités de chacune des notes est 1. Les notes possibles sont 0 (correspondant à 5, 6, 7, 8, 9 ou 10 fautes) et les notes non nulles (correspondant à 4, 3, 2, 1 ou 0 fautes). Par symétrie et comme les chances de répondre faux ou juste sont égales, 10 fautes a même probabilité que 0, 9 que 1, ... Mais 5 fautes n'a pas de symétrique ea une probabilité non nulle de $C_{10}^{5}/2^{10}$. Donc la probabilité que la note soit nulle est plus grande que celle de la note non nulle. Donc la probabilité de la note non nulle est strictement plus grande que $\frac{1}{2}$.

   Si on veut le faire précisément : Avoir la note 0, c'est avoir fait 5, 6, 7, 8, 9 ou 10 fautes. En utilisant la binomiale $\mathcal{B}(10, \frac{1}{2})$ qui marche aussi pour le nombre de réponse fausse (car la probabilité de faux et de juste sont égales), on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{\bar{S}}(N = 0) &= \mathbb{P}(X = 5) + \mathbb{P}(X = 6) + \mathbb{P}(X = 7) + \mathbb{P}(X = 8) + \mathbb{P}(X = 9) + \mathbb{P}(X = 10) \\ &= \frac{C_{10}^{5} + C_{10}^{6} + C_{10}^{7} + C_{10}^{8} + C_{10}^{9} + C_{10}^{10}}{2^{10}}\end{aligned}$$

   On sait que la somme des C_{10}^{k} est 2^{10}, c'est à dire

$$2^{10} = C_{10}^{0} + C_{10}^{1} + C_{10}^{2} + C_{10}^{3} + C_{10}^{4} + C_{10}^{5} + C_{10}^{6} + C_{10}^{7} + C_{10}^{8} + C_{10}^{9} + C_{10}^{10}$$

   Par symétrie des coefficients binômiaux, on a $C_{10}^{0} = C_{10}^{10}$, $C_{10}^{1} = C_{10}^{9}$, etc. Donc

$$2^{10} = C_{10}^{5} + 2(C_{10}^{6} + C_{10}^{7} + C_{10}^{8} + C_{10}^{9} + C_{10}^{10})$$

   Donc

$$2^{10} + C_{10}^{5} = 2(C_{10}^{5} + C_{10}^{6} + C_{10}^{7} + C_{10}^{8} + C_{10}^{9} + C_{10}^{10}) \Rightarrow \frac{2^{10} + C_{10}^{5}}{2} = C_{10}^{5} + C_{10}^{6} + C_{10}^{7} + C_{10}^{8} + C_{10}^{9} + C_{10}^{10}$$

   Donc

$$\mathbb{P}_{\bar{S}}(N = 10) = \frac{\frac{2^{10} + C_{10}^{5}}{2}}{2^{10}} = \frac{1}{2} + \frac{C_{10}^{5}}{2^{11}} > \frac{1}{2}$$

5. VRAI. Car une note impaire est un événement impossible, donc de probabilité nulle.

Question 10.

1. Il est impossible qu'un candidat sérieux ait 0
2. Si un candidat est sérieux, la probabilité qu'il donne 10 bonnes réponses, et donc qu'il obtienne 10/10 est $\mathbb{P}_S(N = 10) = \mathbb{P}(N = 10|S) = \frac{3^{10}}{4^{10}}$.
3. Pour un candidat dont on ne sait pas s'il est sérieux ou non, qu'il obtienne 10/10 est $\mathbb{P}(N = 10) = \frac{3^{10}+2^{10}}{2\times 4^{10}}$.
4. Sachant qu'un candidat a eu 10/10, la probabilité qu'il soit sérieux est $\mathbb{P}(S|N = 10) = \frac{1}{1+(2/3)^{10}}$
5. La probabilité qu'un élève obtiennent la note 10 est $\left(\frac{3}{4}\right)^{10} + \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$.

Corrigé. Même raisonnement que précédemment. Pour un candidat sérieux, la loi du nombre X de réponse juste est une binomiale $\mathcal{B}(10, \frac{3}{4})$.

1. FAUX. Avoir 0 n'est pas un événement impossible, il suffit de faire 5 fautes ou plus, ce qui a une probabilité non nulle.
2. VRAI

$$\mathbb{P}(N = 10|S) = \mathbb{P}(X = 10) = C_{10}^{1}0 \left(\frac{3}{4}\right)^{10} = \frac{3^{10}}{4^{10}}$$

3. VRAI

$$\mathbb{P}(N=10) = \mathbb{P}(S \cap N=10) + \mathbb{P}(\bar{S} \cap (N=10)) = \mathbb{P}(N=10|S)\mathbb{P}(S) + \mathbb{P}(N=10|\bar{S})\mathbb{P}(\bar{S})$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{3^{10}}{4^{10}} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^{10}} = \frac{1}{2} \times \frac{3^{10}}{4^{10}} + \frac{1}{2} \times \frac{2^{10}}{(2\times 2)^{10}} = \frac{1}{2} \times \frac{3^{10}+2^{10}}{4^{10}}$$

4. VRAI

$$\mathbb{P}(S|N=10) = \frac{\mathbb{P}(S\cap N=10)}{\mathbb{P}(N=10)} = \frac{\mathbb{P}(N=10|S)\mathbb{P}(S)}{\mathbb{P}(N=10)} = \frac{\frac{3^{10}}{4^{10}} \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} \times \frac{3^{10}+2^{10}}{4^{10}}} = \frac{3^{10}}{3^{10}+2^{10}} = \frac{1}{1+2^{10}/3^{10}}$$

5. VRAI, voir item 3

Question 11. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. On se propose de réduire cette matrice, puis d'utiliser cette réduction pour étudier une suite récurrente.

1. Le polynôme caractéristique de A est $P_A(x) = -x^3 + x^2 + x + 1$
2. A admet une valeur propre entière et deux valeurs propres complexes conjuguées.
3. A n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$
4. A n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{C}$
5. On peut diagonaliser A avec une matrice de passage P de la forme $P = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 1 & c & d \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ dans lequel a, b, c, d sont des complexes.

Corrigé.

1. FAUX

$$P_A(x) = \det(A - XI) = \begin{vmatrix} 1-X & -1 & 1 \\ 1 & -X & 0 \\ 0 & 1 & -X \end{vmatrix} = (1-X)\begin{vmatrix} -X & 0 \\ 1 & -X \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -X \end{vmatrix} = (1-X)X^2 - (X-1)$$

$$= (X-1)(1-X^2) = -X^3 + X^2 - X + 1$$

2. VRAI

$$P_A(x) = -X^3 + X^2 - X + 1 = (X-1)(-1-X^2)$$

Les valeurs propres sont $1, i$ et $-i$.

3. VRAI. Car toutes les valeurs propres ne sont pas réelles.
4. FAUX. Il y a trois valeurs propres distinctes, donc A est diagonalisable et chacun des espaces propres est de dimension 1. Donc il suffit de trouver un vecteur propre pour chaque valeur propre
5. VRAI. Chaque colonne de P est censée correspondre à un vecteur propre pour une valeur propre différente. On commence par la première colonne et on lui applique A :

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donc le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est associé à la valeur propre 1 et c'est bien un vecteur propre.

Les deux autres vecteurs sont semblables, donc on peut décider que le premier sera vecteur propre pour i et le second pour $-i$. Pour i, on est censé avoir

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ c \\ 1 \end{pmatrix} = i\begin{pmatrix} a \\ c \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a - c + 1 &= ia \\ a &= ic \\ c &= i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 - i + 1 &= i(-1) \\ a &= -1 \\ c &= i \end{cases}$$

Donc $\begin{pmatrix} -1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}$ est bien vecteur propre de la valeur propre i.

Pour i, on est censé avoir

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ d \\ 1 \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} b \\ d \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} b - d + 1 & = & -ib \\ b & = & -id \\ d & = & -i \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} -1 + i + 1 & = & -i(-1) \\ b & = & -1 \\ d & = & -i \end{array} \right.$$

Donc $\begin{pmatrix} -1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}$ est bien vecteur propre de la valeur propre $-i$.

Donc P est bien la matrice de passage permettant de diagonaliser A. On a alors

$$A = PDP^{-1} \qquad \text{avec } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$$

Ce n'était pas absolument nécessaire de faire le calcul complet de P en réalité. Pour faire la suite, il suffit de connaître D.

Question 12. On considére la suite définie par récurrence par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_2 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+3} = u_{n+2} - u_{n+1} + u_n$. En notant $U_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$, on remarque que cela peut s'écrire $U_{n+1} = AU_n$.

1. On a $A^2 = I$ (matrice identité)
2. On a $A^3 = A^{-1}$
3. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = A^n U_0$
4. $u_{1000} = 0$
5. $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$.

Corrigé.

1. FAUX
$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
2. VRAI. Pour la suite, il faut remarque que $A^3 = A^{-1}$ est la même chose que $A^4 = I$. Or :
$$A^4 = PD^4P^{-1} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i^4 & 0 \\ 0 & 0 & (-i)^4 \end{pmatrix} P^{-1} = PIP^{-1} = I$$
3. VRAI. $(U_n)_n$ est une suite géométrique de raison A, donc $U_n = A^n U_0$
4. VRAI. On $A^{1000} = PD^{1000}P^{-1} = I$ car 1000 est divisible par 4. Donc $U_{1000} = U_0$, c'est à dire :
$$\begin{pmatrix} u_{1002} \\ u_{1001} \\ u_{1000} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \\ u_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow u_{1000} = 0$$
5. FAUX Comme $A^4 = I$, la suite (U_n) est périodique de période 4. On a bien, par le même calcul que précédemment, $u_{4k} = 0$. Mais on a
$$U_{4k+1} = AU_0$$
$$\begin{pmatrix} u_{4k+3} \\ u_{4k+2} \\ u_{4k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$
Donc pour tout $k \in \mathbb{N}, u_{4k+1} = 1, u_{4k+2} = 2, u_{4k+3} = 1$. La suite ne converge pas vers 0.