Question 1. On se propose d'étudier quelques propriétés de la fonction $f : x \to \frac{\ln(\cos^2 x)}{x^2 e^{\sin x}}$ au voisinage de 0. Dans les développements limités (DL) qui suivent, ϵ représente une fonction qui a pour limite 0 en 0 et qui n'est pas nécessairement la même à chaque item.

1. La fonction f est définie sur $]-\pi, \pi[$.
2. La fonction f est périodique de période 2π.
3. Un développement limité de $\cos^2 x$ à l'ordre 5 en 0 est $1 - x^2 + \frac{x^4}{12} + x^5\epsilon(x)$.
4. Pour avoir un DL de $\ln(\cos^2 x)$ au voisinage de 0 à l'ordre 5, il suffit d'un DL de $\cos^2 x$ en 0 à l'ordre 5 et un DL de $\ln(1+u)$ au voisinage de 0 à l'ordre 2.
5. un DL de $\ln(\cos^2 x)$ au voisinage de 0 à l'ordre 5 est $-x^2 - \frac{x^4}{6} + x^5\epsilon(x)$.

Question 2.

1. Un DL de $e^{\sin x}$ à l'ordre 3 en 0 est $1 - x + \frac{x^2}{2} + x^3\epsilon(x)$.
2. Un DL de $\frac{1}{e^{\sin x}}$ à l'ordre 3 en 0 est $1 + x + \frac{x^2}{2} + x^3 + x^3\epsilon(x)$.
3. Un DL de f à l'ordre 3 en 0 est $-1 + x - \frac{2x^2}{3} + \frac{x^3}{6} + x^3\epsilon(x)$.
4. La fonction f est prolongeable par continuité en $x = 0$.
5. Au voisinage de 0, la courbe représentative de f reste au-dessus de la parabole d'équation $y = -1+x-\frac{2x^2}{3}$.

Question 3. On veut calculer $I_6 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6(x)dx$. On exprimera d'abord $\cos^2 x, \cos^3 x, \cos^6 x$ en fonction de $\cos(nx)$ pour $n = 1$ à 6, en utilisant les formules d'addition du cosinus.

1. On a $\cos(2x) = 2\cos^2(x) + 1$
2. On a $2\cos a \cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b)$
3. On a $\cos^3(x) = \frac{\cos(3x)+3\cos(x)}{4}$
4. On a $\cos^6 x = \frac{1}{32}\left(\cos(6x) + 6\cos(4x) + 12\cos(2x) + 10\right)$
5. On a $I_6 = \frac{5\pi}{32}$

Question 4. Soient les intégrales $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)dx$ et $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2}(x)\sin^2(x)dx$. Exprimer J_n en fonction de I_n et I_{n-2}, puis intégrer par partie J_n (on prendra $dv = \cos^{n-2}(x)\sin(x)dx$). En déduire une relation de récurrence entre I_n et I_{n-2}. Calculer alors I_0 etI_{10}.

1. $I_n = J_n + I_{n-2}$
2. On a $v = \frac{1}{n-1}\cos^{n-1} x$
3. En intégrant par partie J_n, on trouve $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$
4. $I_{2k} = \frac{\pi}{2}\frac{1.3.5...(2k-1)}{2.4.6...(2k)}$
5. On a $I_{10} = \frac{63\pi}{256}$

Question 5. Pour un entier naturel non nul n, on considère le polynôme P_n défini par

$$P_n(x) = (1+ix)^n - (1-ix)^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

On résoudra dans $\mathcal{C}$ l'équation $X^n = 1$ avec $X = \frac{1+ix}{1-ix}$, on en déduira les racines (réelles ou complexes) de P_n selon la parité de n.

1. Le degré de P_n est toujours égal à n.
2. L'équation $P_n(x) = 0$ a les même solutions que l'équation $\left(\frac{1+ix}{1-ix}\right)^n = 1$.
3. Si n est pair, P admet $n-1$ racines distinctes de la forme $x_k = \frac{1-\exp\frac{2\pi ik}{n}}{i(1+\exp\frac{2\pi ik}{n})}$ avec k entier, $k \in [0, n-1]$ et $k \neq n/2$.
4. Si n est impair, P_n admet n racines distinctes de la forme $x_k = \tan\frac{k\pi}{n}$ avec k entier et $k \in [0, n-1]$.

Question 6. 0 est racine de P_n. Les racines non nulles sont celle de $Q_m = \sum_{k=1}^{m} a_k x^{x-1}$ avec $m = deg(P_n)$. On rappelle que la somme de ces racines est $S = -\frac{a_{m-1}}{a_m}$, leur produit est $P = (-1)^{m-1}\frac{a_1}{a_m}$. on se propose de calculer le produit des racines non nulles selon la parité de n (il faut déterminer m).

1. On a $\forall k,\ a_k = C_n^k i^k(1-(-1)^k)$
2. On a toujours $S = 2n$
3. On a toujours $a_1 = 2i$
4. Si n est pair avec $n = 2p$, alors $m = n-1 = 2p-1$ et $P = (-1)^{p-1}n$.
5. Si n est impair avec $n = 2p+1$, alors $\prod_{k=1}^{n-1} \tan\frac{k\pi}{n} = (-1)^p n$.

Question 7.

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère le triangle (OAB) rectangle en O, d'angle α, β en A et B, avec $\overrightarrow{OA} = (\cos\alpha, 0)$ et $\overrightarrow{OB} = (0, \sin\alpha)$. on note Ω le centre du cercle inscrit dans le triangle (OAB), J et H les projections orthogonales de Ω sur (OA) et (AB). On a $\Omega J = \Omega H = r$ (rayon du cercle inscrit), les angles $(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{A\Omega}) = \frac{\alpha}{2}$ et $(\overrightarrow{B\Omega}, \overrightarrow{BH}) = \frac{\beta}{2}$. (voir fig.1)

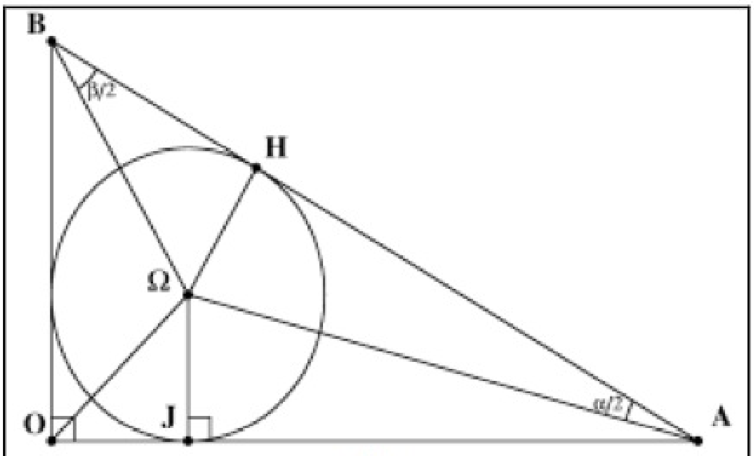

fig.1

On calculera, en fonction de $u = \tan\frac{\alpha}{2}$, les longueurs AB, $d = AH$, BH, $v = \tan\frac{\beta}{2}$, r. On rappelle que $\cos\alpha = \frac{1-u^2}{1+u^2}$, $\sin\alpha = \frac{2u}{1+u^2}$.

1. On a $d = AH = ru$
2. On a $r = (1-d)v$
3. On a $v = \frac{1-u}{1+u}$
4. On a $d = \frac{1-u}{1+u^2}$
5. On a $r = \frac{u(1-u)}{1+u^2}$

Question 8.

On introduit le point K, projection orthogonale de O sur (AB). on note (ω_1, r_1) et (ω_2, r_2) les centres et rayons des cercles inscrits dans les triangles (OKA) et OKB. On calculera, en fonction de $u = \tan\frac{\alpha}{2}$, les quantités OK, r_1, r_2 et $S = r + r_1 + r_2$

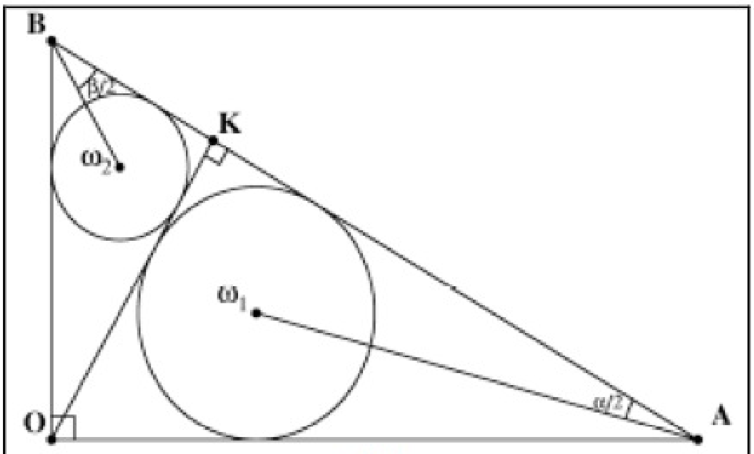

fig.2

1. Les triangles (AOB), (AKO) et (BKO) sont semblables.
2. Pour un triangle T semblable à (AOB), d'hypothénuse h, le rayon du cercle inscrit est hr
3. On a $r_1 = r\sin\alpha$
4. On a $S = r\frac{1+u}{1+u^2}$
5. On a $S = OK$.

Un examen comporte 10 questions auxquelles il faut répondre par "vrai" ou "faux". Si la réponse à une question est juste, elle rapporte 1 point, si elle est fausse, elle fait perdre 1 point. Les candidats répondent tous aux 10 questions. Pour la note (sur 10), on calcule $S = N_J - (10 - N_J) = 2N_j - 10$ ou N_J est le nombre de réponses justes. La note est fixée ainsi : $N = S$ si $S \geqslant 0$ et $N = 0$ si $S < 0$.

L'ensemble des candidats se décompose en deux catégories, les candidats sérieux (événement S) et les non-sérieux (événement $\bar{S}$). Si on tire au hasard un candidat, on considère que $\mathbb{P}(S) = \mathbb{P}(\bar{S}) = \frac{1}{2}$. Si un candidat est sérieux, la probabilité qu'il donne une réponse juste à une question est $\frac{3}{4}$, s'il n'est pas sérieux, la probabilité qu'il donne une réponse juste à une question est $\frac{1}{2}$. Les réponses aux différentes questions sont indépendantes. On rappelle que la probabilité conditionnelle de A sachant B se note $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A|B)$.

Question 9.

1. Les notes possibles sont les entiers de 0 à 10
2. Si un candidat n'est pas sérieux, la probabilité qu'il donne 9 bonnes réponses et une fausse, et donc qu'il obtienne 8/10 est $\mathbb{P}_{\bar{S}}(N = 8) = \mathbb{P}(N = 8|\bar{S}) = \frac{10}{2^{10}}$.
3. Si un candidat n'est pas sérieux, la probabilité qu'il donne 10 bonnes réponses, et donc qu'il obtienne 10/10 est $\mathbb{P}_{\bar{S}}(N = 10) = \mathbb{P}(N = 10|\bar{S}) = \frac{1}{20}$.
4. Si un candidat n'est pas sérieux, la probabilité qu'il obtienne 0/10 est $\mathbb{P}(N = 0|\bar{S}) = \frac{1}{2}$.
5. Si un candidat n'est pas sérieux, la probabilité qu'il obtienne 1/10 est $\mathbb{P}(N = 1|\bar{S}) = 0$.

Question 10.

1. Il est impossible qu'un candidat sérieux ait 0
2. Si un candidat est sérieux, la probabilité qu'il donne 10 bonnes réponses, et donc qu'il obtienne 10/10 est $\mathbb{P}_S(N = 10) = \mathbb{P}(N = 10|S) = \frac{3^{10}}{4^{10}}$.
3. Pour un candidat dont on ne sait pas s'il est sérieux ou non, qu'il obtienne 10/10 est $\mathbb{P}(N = 10) = \frac{3^{10}+2^{10}}{2\times 4^{10}}$.
4. Sachant qu'un candidat a eu 10/10, la probabilité qu'il soit sérieux est $\mathbb{P}(S|N = 10) = \frac{1}{1+(2/3)^{10}}$
5. La probabilité qu'un élève obtiennent la note 10 est $\left(\frac{3}{4}\right)^{10} + \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$.

Question 11. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. On se propose de réduire cette matrice, puis d'utiliser cette réduction pour étudier une suite récurrente.

1. Le polynôme caractéristique de A est $P_A(x) = -x^3 + x^2 + x + 1$
2. A admet une valeur propre entière et deux valeurs propres complexes conjuguées.
3. A n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$
4. A n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{C}$
5. On peut diagonaliser A avec une matrice de passage P de la forme $P = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 1 & c & d \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ dans lequel a, b, c, d sont des complexes.

Question 12. On considére la suite définie par récurrence par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_2 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+3} = u_{n+2} - u_{n+1} + u_n$. En notant $U_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$, on remarque que cela peut s'écrire $U_{n+1} = AU_n$.

1. On a $A^2 = I$ (matrice identité)
2. On a $A^3 = A^{-1}$
3. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = A^n U_0$
4. $u_{1000} = 0$
5. $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.