ATS Mathématiques - Revisions

Exercice 1.

1. On suppose d'abord que $-\sqrt{\frac{\pi}{2}} < x < \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ et on considère

$$f(x) = \text{Arcsin}\left(\sqrt{\frac{1-\cos(4x^2)}{4(1+\cos(2x^2))}}\right).$$

Simplifier $f(x)$.

2. Déterminer la valeur du réel a tel que $I = [-a, a]$ soient l'ensemble des réels x tels que $f(x) \leqslant 1$.
3. On considère ensuite sur l'intervalle I l'équation différentielle

$$y'(x)\sqrt{1-f(x)} - y(x) = 0$$

Donner la solution de cette équation vérifiant $y(0) = 1$. Dans ce cas, calculer $y(a)$ et $y(-a)$.

4. Donner le sens de variation de cette solution y sur l'intervalle I.

Corrigé.

1. On utilise les formule $\cos(2a) = 2\cos^2 a - 1$ et $\sin(2a) = 2\sin a \cos a$ et $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$. Au numérateur :

$$1-\cos(4x^2) = 1-(2\cos^2(2x^2)-1) = 2(1-\cos^2(2x^2)) = 2\left(\sin(2x^2)\right)^2 = 2\left(2\sin(x^2)\cos(x^2)\right)^2$$
$$= 8\sin^2(x^2)\cos^2(x^2)$$

Au dénominateur :

$$4(1+\cos(2x^2)) = 4(1+\cos^2(x^2)-1) = 8\cos^2(x^2)$$

Donc la fraction se simplifie :

$$\frac{1-\cos(4x^2)}{4(1+\cos(2x^2))} = \frac{8\sin^2(x^2)\cos^2(x^2)}{8\cos^2(x^2)} = \sin^2(x^2)$$

Comme $x^2 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, alors $\sin x \geqslant 0$, donc

$$\sqrt{\frac{1-\cos(4x^2)}{4(1+\cos(2x^2))}} = \sqrt{\sin^2(x^2)} = |\sin(x^2)| = \sin(x^2)$$

Finalement,

$$f(x) = \text{Arcsin}\left(\sin(x^2)\right) = x^2.$$

2.
$$f(x) \leqslant 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 \leqslant 1 \quad \Leftrightarrow \quad -1 \leqslant x \leqslant 1$$

Donc $a = 1$.

3. Sur l'intervalle $I = [-1, 1]$ l'équation différentielle devient

$$y'(x)\sqrt{1-x^2} - y(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y'(x) - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}y(x) = 0$$

Une primitive de $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ étant $-\text{Arcsin}\, x$, les solutions de cette équation sont

$$y(x) = Ae^{\text{Arcsin}\, x}, \qquad A \in \mathbb{R}$$

Avec $y(0) = 1$, on a $Ae^{\text{Arcsin}\, 0} = 1$, c'est à dire $A = 1$. Finalement

$$y(x) = e^{\text{Arcsin}\, x}$$

On a donc

$$y(1) = e^{\text{Arcsin}\, 1} = e^{\frac{\pi}{2}}, \qquad y(-1) = e^{\text{Arcsin}\, -1} = e^{-\frac{\pi}{2}}$$

4. Les fonctions Arcsin et exp sont croissantes sur leur intervalles de définition, donc leur composée est une fonction croissante.
   On peut aussi calculer dérivée $y'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} e^{\text{Arcsin}\, x} > 0$.

Exercice 2. Pour $x > 0$, on pose
$$f(x) = x^{\text{Arctan}(x)}.$$

1. Calculer f' la dérivée de f.
2. on suppose $0 < x < 1$. Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse :
   (a) $0 < \frac{1}{1+x^2} < 1$
   (b) $x < \text{Arctan}\, x$
   (c) $\text{Arctan}\, x < x$
   (d) $\text{Arctan}(x) \times \ln(x) < x \ln(x)$
   (e) $x \ln(x) < \text{Arctan}(x) \times \ln(x)$
   (f) $x \,\text{Arctan}(x) < x \ln(x)$
3. Calculer les limites suivantes
$$\lim_{x \to 0} (x \ln x), \qquad \lim_{x \to 0} (\text{Arctan}(x) \times \ln(x)), \qquad \lim_{x \to 0} f(x).$$

Corrigé. On remarque d'abord que
$$f(x) = x^{\text{Arctan}(x)} = \exp(\text{Arctan}(x) \times \ln(x))$$

1. La dérivée de f est donc
$$f(x) = \left(\frac{\ln x}{1+x^2} + \frac{\text{Arctan}\, x}{x} \right) \exp(\text{Arctan}(x) \times \ln(x))$$
2. on suppose $0 < x < 1$. Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse :
   (a) $0 < \frac{1}{1+x^2} < 1$ est vrai. On part de $0 < x < 1$ et on a
$$0 < x^2 < 1 \quad \Leftrightarrow \quad 1 < 1 + x^2 < 2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} < \frac{1}{1+x^2} < 1 \quad \Rightarrow 0 < \frac{1}{1+x^2} < 1$$
   (b) $x < \text{Arctan}\, x$ est faux. On considère la fonction $g(x) = x - \text{Arctan}\, x$ sur $[0, 1[$ et on la dérive $g'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} > 0$ d'après l'item précédant. Donc g est strictement croissante sur $[0, 1[$. On a $g(0) = 0$ donc $g(x) > 0$ sur $]0, 1[$, c'est à dire $x > \text{Arctan}\, x$.
   (c) $\text{Arctan}\, x < x$ est donc vraie.
   (d) $\text{Arctan}(x) \times \ln(x) < x \ln(x)$ est fausse car on multiplie l'inégalité de l'item précédent par $\ln x$ qui est négative sur $]0, 1[$, donc ça renverse l'inégalité
$$\text{Arctan}\, x < x \qquad \Leftrightarrow \qquad \text{Arctan}(x) \times \ln(x) > x \ln(x)$$
   (e) $x \ln(x) < \text{Arctan}(x) \times \ln(x)$ est donc vraie
   (f) $x \,\text{Arctan}(x) < x \ln(x)$ est fausse. Le terme $x \,\text{Arctan}(x)$ est strictement positif sur $]0, 1[$ alors que $x \ln(x)$ est strictement négatif.
3. C'est une limite du cours :
$$\lim_{x \to 0} (x \ln x) = 0$$
   Quand $x \to 0$, on a $\text{Arctan}\, x \sim x$ donc $\text{Arctan}(x) \times \ln(x) \sim x \ln x$, donc
$$\lim_{x \to 0} (\text{Arctan}(x) \times \ln(x)) = 0$$
   On sait que $f(x) = \exp(\text{Arctan}(x) \times \ln(x))$, donc
$$\lim_{x \to 0} f(x) = e^0 = 1$$

Exercice 3. On considère dans le plan complexe la transformation qui associe au point d'affixe $z \neq -1+i$ le point d'affixe Z avec

$$Z = \frac{1}{z+1-i}$$

1. Soient $z = x+iy$ et $Z = X+iY$ les formes cartésiennes de z et Z. Calculer la partie réelle X et la partie imaginaire Y de Z en fonction de x et y.
2. Calculer X^2+Y^2.
3. On considère la droite Δ définie par $z = x(1-i)$. On note L_Δ le lieu géométrique décrit par le point d'affixe Z lorsque le point z parcourt Δ pour $x \neq -1$. Tracer Δ et L_Δ sur une figure.
4. On note L_{C_R} le lieu géométrique décrit par le point d'affixe z lorsque le point Z parcourt C_R le cercle de centre O et de rayon R. Déterminer la nature de L_{C_R} ainsi que les caractéristiques permettant de le tracer.
5. Sur une figure, dessiner C_R et L_{C_R} pour $R=1$ et $R=2$.

Corrigé.

1. On met Z sous forme algébrique :

$$Z = \frac{1}{x+iy+1-i} = \frac{1}{(x+1)+i(y-1)} = \frac{(x+1)-i(y-1)}{((x+1)+i(y-1))((x+1)-i(y-1))}$$

$$Z = \frac{(x+1)-i(y-1)}{(x+1)^2+(y-1)^2}$$

Donc

$$X = \frac{(x+1)}{(x+1)^2+(y-1)^2}, \qquad Y = \frac{-(y-1)}{(x+1)^2+(y-1)^2}$$

2. On a

$$X^2+Y^2 = \frac{(x+1)^2}{((x+1)^2+(y-1)^2)^2} + \frac{(y-1)^2}{((x+1)^2+(y-1)^2)^2} = \frac{(x+1)^2+(y-1)^2}{((x+1)^2+(y-1)^2)^2} = \frac{1}{(x+1)^2+(y-1)^2}$$

3. La droite Δ définie par $z = x(1-i)$ passe par l'origine du repère $(x=0)$ et par le point de coordonnées $(1,-1)$ $(x=1)$.
On remplace $z = x(1-i)$ dans Z :

$$Z = \frac{1}{x(1-i)+1-i} = \frac{1}{(x+1)(1-i)} = \frac{1}{2(x+1)}(1+i)$$

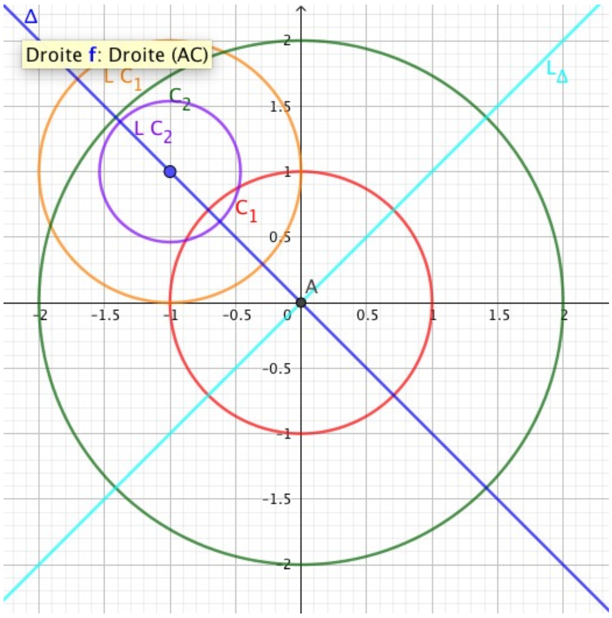
Donc L_Δ est la droite passant par l'origine et le point de coordonnées $(1,1)$, mais on exclut l'origine car $\frac{1}{2(x+1)}$ ne peut pas être nul.

4. Quand Z parcourt le cercle de centre O et de rayon R, on a $|Z|^2 = X^2+X^2 = R^2$, donc

$$\frac{1}{(x+1)^2+(y-1)^2} = R^2 \quad \Leftrightarrow \quad (x+1)^2+(y-1)^2 = \frac{1}{R^2}$$

Donc z est sur le cercle de centre $(-1,1)$ et de rayon $\frac{1}{R}$.

5. Voir figure.



Exercice 4.

1. On considère la fraction rationnelle

$$f(x) = \frac{2x^2 - 13x + 15}{(x^2 - x - 2)(x^2 - 4x + 5)}$$

Donner la décomposition de f comme somme de fractions simples.

2. Pour $t \geqslant 3$, en déduire la primitive suivante

$$F(t) = \int_3^t \frac{2x^2 - 13x + 15}{(x^2 - x - 2)(x^2 - 4x + 5)} dx$$

3. Déterminer la valeur $F(3)$ et la limite de F quand $t \to +\infty$.
4. Sur $[3, +\infty[$, déterminer la valeur t_0 où F atteint son extremum. Déterminer si cet extrémum est un minimum ou un maximum.

Corrigé.

1. On remarque déjà que le degré du numérateur est inférieur à celui du dénominateur. Cherchons à factoriser davantage le dénominateur. Le polynôme $x^2 - x - 2$ a pour discriminant 9 et pour racines 2 et -1, donc il se factorise en $(x-2)(x+1)$. Par contre, $x^2 - 4x + 5$ a pour discriminant -4, donc pas de racines réelles. Donc f se décompose sous la forme

$$f(x) = \frac{2x^2 - 13x + 15}{(x-2)(x+1)(x^2 - 4x + 5)} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+1} + \frac{cx + d}{x^2 - 4x + 5} \quad (\star)$$

On multiplie $(\star)$ par $(x-2)$ et on prend $x = 2$:

$$\frac{2x^2 - 13x + 15}{(x+1)(x^2 - 4x + 5)} = a + \frac{b(x-2)}{x+1} + \frac{cx+d}{x^2 - 4x + 5}(x-2) \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{8 - 26 + 15}{(3)(9)} = -1$$

On multiplie $(\star)$ par $(x+1)$ et on prend $x = -1$:

$$\frac{2x^2 - 13x + 15}{(xx-2)(x^2 - 4x + 5)} = \frac{a(x+1)}{x-2} + b + \frac{cx+d}{x^2 - 4x + 5}(x+1) \quad \Leftrightarrow \quad b = \frac{2 + 13 + 15}{(-3)(10)} = -1$$

On remplace dans $(\star)$

$$f(x) = \frac{2x^2 - 13x + 15}{(x-2)(x+1)(x^2 - 4x + 5)} = \frac{-1}{x-2} + \frac{-1}{x+1} + \frac{cx + d}{x^2 - 4x + 5} \quad (\star)$$

On prend $x = 0$ et il vient

$$\frac{15}{-10} = \frac{1}{2} - 1 + \frac{d}{5} \quad \Leftrightarrow \quad d = -5$$

On remplace dans $(\star)$. On prend $x = 1$ et il vient

$$\frac{2 - 13 + 15}{(-1)(2)(1 - 4 + 5)} = \frac{-1}{-1} + \frac{-1}{2} + \frac{c - 5}{1 - 4 + 5} \quad \Leftrightarrow \quad c = 2$$

Finalement

$$f(x) = \frac{-1}{x - 2} + \frac{-1}{x + 1} + \frac{2x - 5}{x^2 - 4x + 5} \quad (\star)$$

2. On utilise cette décomposition :

$$F(t) = \int_3^t \frac{-1}{x - 2} + \frac{-1}{x + 1} + \frac{2x - 5}{x^2 - 4x + 5} dx = \int_3^t \frac{-1}{x - 2} + \frac{-1}{x + 1} + \frac{2x - 4}{x^2 - 4x + 5} - \frac{1}{x^2 - 4x + 5} dx$$

$$= \left[- \ln(x - 2) - \ln(x + 1) + \ln(x^2 - 4x + 5) \right]_3^t - \int_3^t \frac{1}{(x - 2)^2 + 1} dx$$

$$= \ln \left(\frac{t^2 - 4t + 5}{(t - 2)(t + 1)} \right) - \ln \frac{1}{2} - [\text{Arctan}(x - 2)]_3^t$$

$$= \ln \left(\frac{t^2 - 4t + 5}{(t - 2)(t + 1)} \right) + \ln 2 - \text{Arctan}(t - 2) + \frac{\pi}{4}$$

3. On a

$$F(3) = \int_3^3 f(x) dx = 0$$

On factorise par les termes dominant dans le ln

$$F(x) = \ln \left(\frac{t^2 (1 - 4/t + 5/t^2)}{t^2 (1 - 2/t)(1 + 1/t)} \right) + \ln 2 - \text{Arctan}(t - 2) + \frac{\pi}{4}$$

$$F(x) = \ln \left(\underbrace{\frac{(1 - 4/t + 5/t^2)}{(1 - 2/t)(1 + 1/t)}}_{\to 1} \right) + \ln 2 - \underbrace{\text{Arctan}(t - 2)}_{\to \pi/2} + \frac{\pi}{4}$$

Donc

$$\lim_{t \to +\infty} F(t) = \ln 1 + |n2 - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \ln 2 - \frac{\pi}{4}$$

4. Comme $F' = f$, on étudie le signe de f. On sait déjà les racine du dénominateur (qui sont hors de l'intervalle $[3, +\infty[$), donc le dénominateur est strictement positif. Il reste le numérateur à étudier. $2x^2 - 13x + 15$ a pour discriminant 49, et pour racines $3/2$ (qui est hors de l'intervalle $[3, +\infty[$ et 5. On obtient le tableau de signe et de variations suivant :

x	3		5		
$f(x)$		$-$	0	$+$	
$F(x)$	0	$\searrow$	$F(5)$	$\nearrow$	

Donc l'extremum est atteint pour $t_0 = 5$ et c'est un minimum.

Exercice 5. On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad y" - 2y' + y = e^x \cos x$$

1. Donner les solutions de l'équation homogène associée à (E).

2. Déterminer la seule solution de (E) vérifiant $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.

Corrigé.

1. l'équation homogène associée à (E) est $y" - 2y' + y = 0$. L'équation caractéristique est $r^2 - 2r + 1 = 0 = (r-1)^2$ donc 1 est une racine double. Les solutions de l'équation homogène sont
$$y_h(x) = (Ax + B)e^x$$

2. On cherche une solution particulière en passant aux complexes : $z" - 2z + z = e^x e^{ix} = e^{(1+i)x}$. Comme $(1 + i)$ n'est pas une racine de l'équation caractéristique, on pose $z_p(x) = Ce^{(1+i)x}$ avec C une constante à déterminer. On a
$$z_p'(x) = C(1+i)e^{(1+i)x}, \qquad z"_p(x) = C(1+i)^2 e^{(1+i)x} = C2ie^{(1+i)x}$$
On reporte dans l'équation complexe :
$$C2ie^{(1+i)x} - 2C(1+i)e^{(1+i)x} + Ce^{(1+i)x} = e^{(1+i)x} \quad \Leftrightarrow \quad -C = 1 \quad \Leftrightarrow \quad C = -1$$
Donc
$$z_p(x) = -e^{(1+i)x} = -e^x e^{ix} = -e^x(\cos x + i \sin x)$$
Donc $y_p(x) = \Re(z_p(x)) = -e^x \cos x$. Finalement, les solutions de (E) sont :
$$y(x) = (Ax + B)e^x - e^x \cos x = (Ax + B - \cos x)e^x, \qquad y'(x) = (A + \sin x + Ax + B - \cos x)e^x$$
On veut que $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$, donc
$$0 = y(0) = B - 1, \qquad 1 = y'(0) = A + B - 1$$
$$B = 1, \qquad A = 1$$
Finalement
$$y(x) = (x + 1 - \cos x)e^x$$

Exercice 6. On considère l'équation différentielle :
$$(E) \qquad (x^2+1)y'(x) - (2x+1)y(x) = (1+x^2)e^{\operatorname{Arctan} x}$$

1. Donner les solutions de l'équation homogène associée à (E).
2. Déterminer la seule solution de (E) vérifiant $y(0) = 1$.

Corrigé.

1. L'équation homogène associée à (E) est $(x^2+1)y'(x) - (2x+1)y(x) = 0$ qui devient $y'(x) - \frac{2x+1}{x^2+1}y(x) = 0$. On cherche une primitive de
$$a(x) = -\frac{2x+1}{x^2+1} = -\frac{2x}{x^2+1} - -\frac{1}{x^2+1} \Rightarrow A(x) = -\ln(x^2+1) - \operatorname{Arctan} x$$
Donc les solutions de l'équation homogène sont
$$y_h(x) = Ae^{\ln(x^2+1) + \operatorname{Arctan} x} = Ae^{\ln(x^2+1)}e^{\operatorname{Arctan} x} = A(x^2+1)e^{\operatorname{Arctan} x}, \qquad A \in \mathbb{R}$$

2. On cherche une solution particulière par la méthode de variation de la constante. On pose
$$y_p(x) = A(x)(x^2+1)e^{\operatorname{Arctan} x},$$
$$\begin{aligned} y_p'(x) &= A'(x)(x^2+1)e^{\operatorname{Arctan} x} + A(x)2xe^{\operatorname{Arctan} x} + A(x)(x^2+1)\frac{1}{x^2+1}e^{\operatorname{Arctan} x} \\ &= A'(x)(x^2+1)e^{\operatorname{Arctan} x} + A(x)2xe^{\operatorname{Arctan} x} + A(x)e^{\operatorname{Arctan} x} \end{aligned}$$
On reporte dans (E) :
$$(x^2+1)\left[A'(x)(x^2+1)e^{\operatorname{Arctan} x} + A(x)2xe^{\operatorname{Arctan} x} + A(x)e^{\operatorname{Arctan} x}\right] - (2x+1)A(x)(x^2+1)e^{\operatorname{Arctan} x} = (1+x^2)e^{\operatorname{Arctan} x}$$

$$A'(x)(x^2+1)^2 e^{\operatorname{Arctan} x} = (1+x^2)e^{\operatorname{Arctan} x}$$
$$A'(x) = \frac{1}{x^2+1} \quad \Rightarrow \quad A(x) = \operatorname{Arctan} x$$

Donc $y_p(x) = \operatorname{Arctan} x(x^2+1)e^{\operatorname{Arctan} x}$. Et les solutions de (E) sont

$$y(x) = \operatorname{Arctan} x(x^2+1)e^{\operatorname{Arctan} x} + A(x^2+1)e^{\operatorname{Arctan} x} = (A + \operatorname{Arctan} x)(x^2+1)e^{\operatorname{Arctan} x}$$

On veut $y(0) = 1$:

$$1 = (A + \operatorname{Arctan} 0)(0^2+1)e^{\operatorname{Arctan} 0} = A$$

Finalement

$$y(x) = (1 + \operatorname{Arctan} x)(x^2+1)e^{\operatorname{Arctan} x}$$

Exercice 7. On considère, sur l'intervalle $]0, 2[$, l'équation différentielle

$$\sqrt{2x-x^2}y' + \left(\sqrt{2x-x^2} - 1\right) y^2 = 0$$

Déterminer la solution de cette équation telle que $y(1) = 1$.
Corrigé. On a

$$\sqrt{2x-x^2}y' = -\left(\sqrt{2x-x^2} - 1\right) y^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y'}{y^2} = -\frac{\left(\sqrt{2x-x^2} - 1\right)}{\sqrt{2x-x^2}} = -1 + \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$$

On intègre de chaque coté de 1 à t :

$$\int_1^t \frac{y'(x)}{y^2(x)} dx = \int_1^t -1 + \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}} dx$$
$$\left[\frac{-1}{y(x)}\right]_1^t = [-x]_1^t + \int_1^t \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}} dx$$
$$\frac{-1}{y(t)} + \frac{1}{y(1)} = 1 - t + \int_1^t \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}} dx$$

Pour calculer l'intégrale restante, on note que $2x - x^2 = (2-x)x$. On fait le changement de variable $z = x - 1$ et on a $(2-x)x = (1-z)(1+z) = 1 - z^2$. Il vient

$$\frac{-1}{y(t)} + \frac{1}{1} = 1 - t + \int_0^{t-1} \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} dz = 1 - t + [\operatorname{Arcsin} z]_0^{t-1} = 1 - t + \operatorname{Arcsin}(t-1)$$

Donc

$$\frac{-1}{y(t)} = -t + \operatorname{Arcsin}(t-1) \quad \Leftrightarrow \quad y(t) = \frac{-1}{-t + \operatorname{Arcsin}(t-1)}$$

Exercice 8. Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = (x-y)^2 + (x-2)^2 + (x^2+1)y$$

1. Déterminer les dérivées partielle première de f : $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$
2. Déterminer les dérivées partielle seconde de f : $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.
3. Déterminer les coordonnées de chacun des points critiques de f, ainsi que leur nature (Maximum, minimum ou point col).

Corrigé.

1.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2(x-y) + 2(x-2) + 2xy = 4x - 2y + 2xy - 4, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -2(x-y) + x^2 + 1 = -2x + 2y + x^2 + 1$$

2.
$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4 + 2y, \qquad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2, \qquad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -2 + 2x$$

3. Les points critiques de f vérifient
$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{\partial f}{\partial x} & = & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} & = & 0 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} 4x - 2y + 2xy - 4 & = & 0 \\ -2x + 2y + x^2 + 1 & = & 0 \end{array} \right.$$

Dans L_2, on a $(x^2 - 2x + 1) + 2y = 0$ donc $y = \frac{-1}{2}(x-1)^2$ qu'on reporte dans la ligne 1
$$\left\{ \begin{array}{rcl} 4x - (x-1)^2 - x(x-1)^2 - 4 & = & 0 \\ y & = & \frac{-1}{2}(x-1)^2 \end{array} \right.$$

On développe la première ligne :
$$4x - (x^-2x + 1) - x(x^-2x + 1) - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -x^3 + 3x^2 + x - 3 = 0$$

On remplace $x = 1$ et on a $-1 + 3 + 1 - 3 = 0$ donc 1 est racine. On remplace $x = -1$ et on a $1 + 3 - 1 - 3 = 0$ donc -1 est racine. Donc ce polynôme est divisible par $(x-1)(x+1) = x^2 - 1$. On a après division euclidienne
$$-x^3 + 3x^2 + x - 3 = (x-1)(x+1)(-x+3)$$

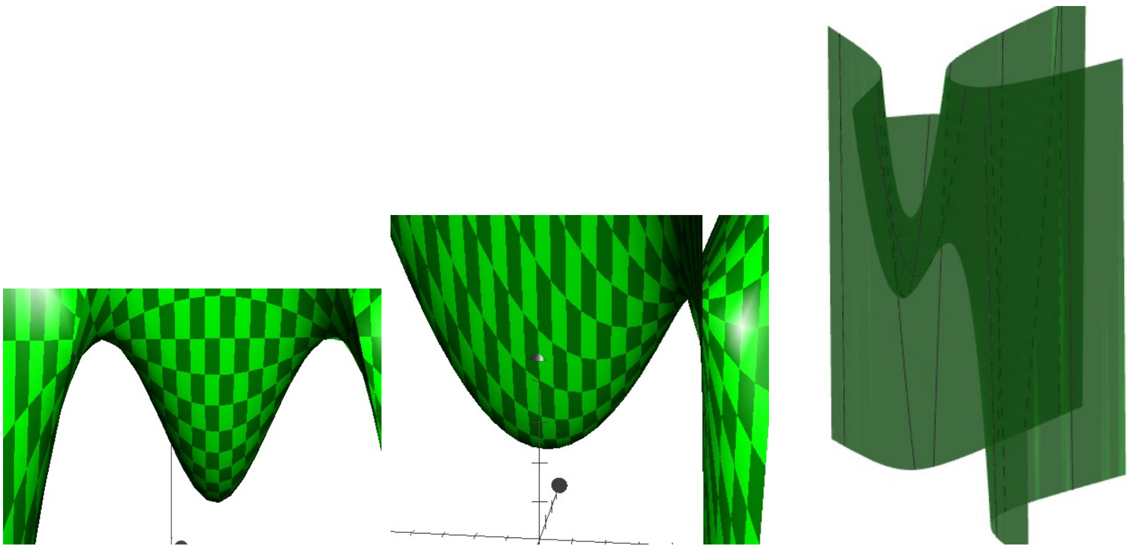
Donc les valeurs de x qui annulent la ligne 1 sont $1, -1, 3$. Pour chaque valeur, on calcule $y = \frac{-1}{2}(x-1)^2$, $f(x,y)$ et $s^2 - rt = (-2+2x)^2 - 2(4+2y)$.
$$x = 1, \quad y = 0, \quad f(1,0) = 2 \quad s^2 - rt = -8 < 0, \quad r = 4 > 0$$

Donc le point critique pour $(1,0)$ est $f(1,0) = 2$ et c'est un extremum, plus précisément un minimum de f.
$$x = -1, \quad y = -2, \quad f(-1,-2) = 6 \quad s^2 - rt = 16 > 0$$

Donc un point critique pour $(-1,-2)$ est $f(1,0) = 6$ et c'est un point col.
$$x = 3, \quad y = -2, \quad f(3,-2) = 6 \quad s^2 - rt = 4 > 0$$

Donc un point critique pour $(3,-2)$ est $f(3,-2) = 6$ et c'est un point col.

Quelques points de vue sur la courbe de f, avec le minimum et les deux cols :



Exercice 9. On considère dans $\mathbb{R}^3$ rapporté à la base canonique $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ les vecteurs
$$\overrightarrow{OA} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}, \qquad \overrightarrow{OB} = 2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k},$$

et on désigne par $(\mathcal{P})$ le plan dont une base est $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$

1. Déterminer les longueurs de $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$.
2. Déterminer un vecteur $\overrightarrow{OC}$ orthogonal au plan $(\mathcal{P})$ et de même longueur que $\overrightarrow{OA}$. Donner $\overrightarrow{OC}$ sous forme d'une combinaison linéaire dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
3. On note Q la matrice de passage de la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ à la base $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$. Donner Q, sa transposée Q^t et calculer QQ^t.
4. En déduire Q^{-1} l'inverse de Q.
5. On considère maintenant la transformation géométrique T qui associe à une point M de l'espace le point $T(M)$ déduit du symétrique de M par rapport au plan $(\mathcal{P})$ en multipliant par 2 sa composante relative à $\overrightarrow{OC}$.
   On note respectivement S et S' les matrices représentant T dans les bases $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$ (départ et arrivée). Déterminer S' et en déduire S.
6. Le point M de coordonnées $(2, -5, 4)$ dans $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ a pour image $T(M)$. Déterminer les coordonnées de $T(M)$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
   Parmi les affirmations suivantes sur M, lesquelles sont correctes ?
   (a) $\overrightarrow{OM}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AC}$
   (b) $\overrightarrow{OM}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AC}$
   (c) $\overrightarrow{OM}$ est orthogonal au plan $(\mathcal{P})$.
   (d) M est sur le plan $(\mathcal{P})$.

Corrigé. Notons que les coordonnées sont :

$$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

1. Les longueurs sont

$$\|\overrightarrow{OA}\| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{9} = 3, \quad \|\overrightarrow{OB}\| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2} = 3,$$

2. Un vecteur $\overrightarrow{OC}$ est orthogonal au plan $(\mathcal{P})$ si ey seulement si il est orthogonal à $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$. Or on sait que $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}$ est un vecteur orthogonal à $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$:

$$\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

La longueur de ce vecteur est $\sqrt{9 + 36 + 36} = \sqrt{81} = 9$, Donc il suffit de diviser le vecteur par 3 pour obtenir un vecteur de longueur 3 (longueur de $\overrightarrow{OA}$). Donc

$$\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$$

,

3. On a

$$Q = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad Q^t = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad QQ^t = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = 9I_3$$

4. D'après ce qui précède ;

$$Q\left(\frac{1}{9}Q^t\right) = I_3 \quad \Rightarrow \quad Q^{-1} = \frac{1}{9}Q^t = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

5. D'après la description de T, on $T(\overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{OA}$, $T(\overrightarrow{OB}) = \overrightarrow{OB}$ et $T(\overrightarrow{OC}) = -2\overrightarrow{OC}$ (Léger abus d'écriture, ce sont des points, pas des vecteurs qui sont censé interagir avec T.) Or les coordonnées respectives de $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ et $-2\overrightarrow{OC}$ sont respectivement $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ et $(0,0,-2)$, donc en mettant en colonnes, on obtient
$$S' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$
On utilise la formule de changement de base pour une matrice.
$$S = QSQ^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 6 & -6 & -6 \\ -6 & -3 & -12 \\ -6 & -12 & -3 \end{pmatrix}$$

6. On a
$$T(M) = S \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 6 & -6 & -6 \\ -6 & -3 & -12 \\ -6 & -12 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$$
On constate que M est invariant par T, donc $\overrightarrow{OM}$ appartient au plan de la symétrie, c'est à dire au plan $(\mathcal{P})$.
   (a) $\overrightarrow{OM}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AC}$.FAUX. On a $\overrightarrow{OM} = (2,-5,4)$ et $\overrightarrow{AC} = (1-2, 2-(-2), 2-1) = (-1,4,1)$. On voit que les coordonnées ne sont pas proportionnelles. Donc les vecteurs ne sont pas colinéaires.
   (b) $\overrightarrow{OM}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AC}$. FAUX car $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{AC} = -2 - 20 + 4 = -18 \neq 0$.
   (c) $\overrightarrow{OM}$ est orthogonal au plan $(\mathcal{P})$.FAUX car $\overrightarrow{OM}$ appartient au plan $(\mathcal{P})$
   (d) M est sur le plan $(\mathcal{P})$. FAUX. Techniquement, le plan $(\mathcal{P})$ est un plan vectoriel, donc il ne peut contenir de point.