**ATS Mathématiques - Revisions**

**Exercice 1.**

1. On suppose d'abord que $-\sqrt{\frac{\pi}{2}} < x < \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ et on considère
$$f(x) = \mathrm{Arcsin}\left(\sqrt{\frac{1-\cos(4x^2)}{4(1+\cos(2x^2))}}\right).$$
Simplifier $f(x)$.
2. Déterminer la valeur du réel $a$ tel que $I = [-a, a]$ soient l'ensemble des réels $x$ tels que $f(x) \leqslant 1$.
3. On considère ensuite sur l'intervalle $I$ l'équation différentielle
$$y'(x)\sqrt{1-f(x)} - y(x) = 0$$
Donner la solution de cette équation vérifiant $y(0) = 1$. Dans ce cas, calculer $y(a)$ et $y(-a)$.
4. Donner le sens de variation de cette solution $y$ sur l'intervalle $I$.

**Exercice 2.** Pour $x > 0$, on pose
$$f(x) = x^{\mathrm{Arctan}(x)}.$$

1. Calculer $f'$ la dérivée de $f$.
2. on suppose $0 < x < 1$. Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse :
   (a) $0 < \frac{1}{1+x^2} < 1$
   (b) $x < \mathrm{Arctan}\, x$
   (c) $\mathrm{Arctan}\, x < x$
   (d) $\mathrm{Arctan}(x) \times \ln(x) < x\ln(x)$
   (e) $x\ln(x) < \mathrm{Arctan}(x) \times \ln(x)$
   (f) $x\,\mathrm{Arctan}(x) < x\ln(x)$
3. Calculer les limites suivantes
$$\lim_{x\to 0}(x\ln x), \qquad \lim_{x\to 0}(\mathrm{Arctan}(x) \times \ln(x)), \qquad \lim_{x\to 0} f(x).$$

**Exercice 3.** On considère dans le plan complexe la transformation qui associe au point d'affixe $z \neq -1+i$ le point d'affixe $Z$ avec
$$Z = \frac{1}{z+1-i}$$

1. Soient $z = x+iy$ et $Z = X+iY$ les formes cartésiennes de $z$ et $Z$. Calculer la partie réelle $X$ et la partie imaginaire $Y$ de $Z$ en fonction de $x$ et $y$.
2. Calculer $X^2 + Y^2$.
3. On considère la droite $\Delta$ définie par $z = x(1-i)$. On note $L_\Delta$ le lieu géométrique décrit par le point d'affixe $Z$ lorsque le point $z$ parcourt $\Delta$ pour $x \neq -1$. Tracer $\Delta$ et $L_\Delta$ sur une figure.
4. On note $L_{C_R}$ le lieu géométrique décrit par le point d'affixe $z$ lorsque le point $Z$ parcourt $C_R$ le cercle de centre $O$ et de rayon $R$. Déterminer la nature de $L_{C_R}$ ainsi que les caractéristiques permettant de le tracer.
5. Sur une figure, dessiner $C_R$ et $L_{C_R}$ pour $R = 1$ et $R = 2$.

**Exercice 4.**

1. On considère la fraction rationnelle
$$f(x) = \frac{2x^2 - 13x + 15}{(x^2-x-2)(x^2-4x+5)}$$
Donner la décomposition de $f$ comme somme de fractions simples.

2. Pour $t \geqslant 3$, en déduire la primitive suivante
$$F(t) = \int_3^t \frac{2x^2 - 13x + 15}{(x^2 - x - 2)(x^2 - 4x + 5)} dx$$
3. Déterminer la valeur $F(3)$ et la limite de $F$ quand $t \to +\infty$.
4. Sur $[3, +\infty[$, déterminer la valeur $t_0$ où $F$ atteint son extremum. Déterminer si cet extrémum est un minimum ou un maximum.

**Exercice 5**. On considère l'équation différentielle
$$(E) \qquad y" - 2y' + y = e^x \cos x$$
1. Donner les solutions de l'équation homogène associée à $(E)$.
2. Déterminer la seule solution de $(E)$ vérifiant $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.

**Exercice 6**. On considère l'équation différentielle :
$$(E) \qquad (x^2 + 1)y'(x) - (2x + 1)y(x) = (1 + x^2)e^{\operatorname{Arctan} x}$$
1. Donner les solutions de l'équation homogène associée à $(E)$.
2. Déterminer la seule solution de $(E)$ vérifiant $y(0) = 1$.

**Exercice 7**. On considère, sur l'intervalle $]0, 2[$, l'équation différentielle
$$\sqrt{2x - x^2} y' + \left(\sqrt{2x - x^2} - 1\right) y^2 = 0$$
Déterminer la solution de cette équation telle que $y(1) = 1$.

**Exercice 8**. Soit $f$ la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par
$$f(x, y) = (x - y)^2 + (x - 2)^2 + (x^2 + 1)y$$
1. Déterminer les dérivées partielle première de $f$ : $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$
2. Déterminer les dérivées partielle seconde de $f$ : $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.
3. Déterminer les coordonnées de chacun des points critiques de $f$, ainsi que leur nature (Maximum, minimum ou point col).

**Exercice 9**. On considère dans $\mathbb{R}^3$ rapporté à la base canonique $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ les vecteurs
$$\overrightarrow{OA} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}, \qquad \overrightarrow{OB} = 2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k},$$
et on désigne par $(\mathcal{P})$ le plan dont une base est $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$
1. Déterminer les longueurs de $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$.
2. Déterminer un vecteur $\overrightarrow{OC}$ orthogonal au plan $(\mathcal{P})$ et de même longueur que $\overrightarrow{OA}$. Donner $\overrightarrow{OC}$ sous forme d'une combinaison linéaire dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
3. On note $Q$ la matrice de passage de la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ à la base $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$. Donner $Q$, sa transposée $Q^t$ et calculer $QQ^t$.
4. En déduire $Q^{-1}$ l'inverse de $Q$.
5. On considère maintenant la transformation géométrique $T$ qui associe à une point $M$ de l'espace le point $T(M)$ déduit du symétrique de $M$ par rapport au plan $(\mathcal{P})$ en multipliant par 2 sa composante relative à $\overrightarrow{OC}$.
   On note respectivement $S$ et $S'$ les matrices représentant $T$ dans les bases $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$ (départ et arrivée). Déterminer $S'$ et en déduire $S$.
6. Le point $M$ de coordonnées $(2, -5, 4)$ dans $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ a pour image $T(M)$. Déterminer les coordonnées de $T(M)$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
   Parmi les affirmations suivantes sur $M$, lesquelles sont correctes ?
   (a) $\overrightarrow{OM}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AC}$
   (b) $\overrightarrow{OM}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AC}$
   (c) $\overrightarrow{OM}$ est orthogonal au plan $(\mathcal{P})$.
   (d) M est sur le plan $(\mathcal{P})$.