ATS Mathématiques - Revisions

Exercice 1. On considère la fonction f définie pour $|x| < \frac{\pi}{4}, x \neq 0$ par

$$f(x) = \frac{1 - \cos(2x) - \ln(\cos(2x))}{x^2}$$

Calculer $x^2 f'(x) + 2xf(x)$.
Corrigé. On a

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{\left(2\sin(2x) + \frac{2\sin(2x)}{\cos(2x)}\right)x^2 - 2x\left(1 - \cos(2x) - \ln(\cos(2x))\right)}{x^4} \\
&= \frac{2x^2\sin(2x) + x^2 2\tan(2x) - 2x + 2x\cos(2x) + 2x\ln(\cos(2x))}{x^4}
\end{aligned}$$

Donc $x^2 f'(x) + 2xf(x)$

$$= x^2\left(\frac{2x^2\sin(2x) + x^2 2\tan(2x) - 2x + 2x\cos(2x) + 2x\ln(\cos(2x))}{x^4}\right) + 2x\left(\frac{1 - \cos(2x) - \ln(\cos(2x))}{x^2}\right)$$

$$= \frac{2x^2\sin(2x) + x^2 2\tan(2x) - 2x + 2x\cos(2x) + 2x\ln(\cos(2x))}{x^2} + \frac{2x - 2x\cos(2x) - 2x\ln(\cos(2x))}{x^2}$$

$$= 2\sin(2x) + 2\tan(2x)$$

Exercice 2.

1. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$ et $x \in \mathbb{R}\backslash\{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, on considère le complexe $\frac{1-e^{i2nx}}{1-e^{i2x}}$. Ecrire ce complexe sous la forme $e^{i\alpha x}\frac{\beta(x)}{\gamma(x)}$ avec $\alpha(x), \gamma(x), \beta(x)$ des fonctions réelles.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$ et $x \in \mathbb{R}\backslash\{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, on considère

$$z_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} e^{i2kx}$$

   Décomposer $z_n(x)$ sous la forme $z_n(x) = u_n(x) + iv_n(x)$ avec $u_n(x)$ et $v_n(x)$ des fonctions réelles.
3. En déduire la valeur de la somme suivante :

$$S = 1 + \cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5} + \cos\frac{6\pi}{5} + \cos\frac{8\pi}{5}$$

4. A l'aide du cercle trigonométrique, calculer $\cos\frac{4\pi}{5}$ et $\cos\frac{6\pi}{5}$ en fonction de $\cos\frac{\pi}{5}$
5.
6. Exprimer $\cos\frac{2\pi}{5}$ et $\cos\frac{8\pi}{5}$ en fonction de $\cos^2\frac{\pi}{5}$
7. En déduire une expression de S sous la forme d'un polynôme en $X = \cos\frac{\pi}{5}$.
8. En déduire la valeur de $\cos\frac{\pi}{5}$.

Corrigé.

1. On utilise la technique des angles moitiés :

$$\frac{1 - e^{i2nx}}{1 - e^{i2x}} = \frac{e^{inx}(e^{-inx} - e^{inx})}{e^{ix}(e^{-ix} - e^{ix})}$$

   D'après la formule d'Euler, on a

$$= e^{i(n-1)x}\frac{-2i\sin(nx)}{-2i\sin(x)} = e^{i(n-1)x}\frac{\sin(nx)}{\sin(x)}$$

   Donc $\alpha(x) = (n-1)x$, $\beta(x) = \sin(nx)$ et $\gamma(x) = \sin x$.

2. On reconnait la somme de la série géométrique de raison e^{i2x} :

$$z_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{i2x}\right)^k = \frac{1 - \left(e^{i2x}\right)^{(n-1)+1}}{1 - \left(e^{i2x}\right)} = \frac{1 - e^{i2nx}}{1 - e^{i2x}}$$

Donc d'après la question précédente,

$$z_n(x) = e^{i(n-1)x} \frac{\sin(nx)}{\sin(x)} = (\cos((n-1)x) + i \sin((n-1)x)) \frac{\sin(nx)}{\sin(x)}$$

$$= \underbrace{\cos((n-1)x) \frac{\sin(nx)}{\sin(x)}} + i \underbrace{\sin((n-1)x) \frac{\sin(nx)}{\sin(x)}}$$

C'est à dire

$$u_n(x) = \cos((n-1)x) \frac{\sin(nx)}{\sin(x)}; \quad v_n(x) = \sin((n-1)x) \frac{\sin(nx)}{\sin(x)}$$

3. On prend $z_n(x)$ pour $x = \frac{\pi}{5}$ et $n = 5$. Si on développe chaque exponentielle de la somme, on a

$$z_5\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sum_{k=0}^{4} \left(\cos\left(\frac{2k\pi}{5}\right) + i \sin\left(\frac{2k\pi}{5}\right)\right)$$

Donc la partie réelle de $z_5\left(\frac{\pi}{5}\right)$ est

$$u_5\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sum_{k=0}^{4} \cos\left(\frac{2k\pi}{5}\right) = 1 + \cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5} + \cos\frac{6\pi}{5} + \cos\frac{8\pi}{5} = S$$

En utilisant le résultat de la question précédente, on a

$$S = \cos\left(4\frac{\pi}{5}\right) \frac{\sin\left(5\frac{\pi}{5}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)} = \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) \frac{\sin(\pi)}{\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)} = 0$$

4. D'après le cercle trigonométrique

$$\cos\frac{4\pi}{5} = \cos\frac{6\pi}{5} = -\cos\frac{\pi}{5}$$

5. On a

$$\cos\frac{2\pi}{5} = \cos 2\frac{\pi}{5} = 2\cos^2\frac{\pi}{5} - 1$$

et d'après le cercle trigonométrique :

$$\cos\frac{8\pi}{5} = \cos\frac{2\pi}{5} = 2\cos^2\frac{\pi}{5} - 1$$

6. On reporte dans S :

$$S = 1 + 2\cos^2\frac{\pi}{5} - 1 - \cos\frac{\pi}{5} - \cos\frac{\pi}{5} + 2\cos^2\frac{\pi}{5} - 1 = 4\cos^2\frac{\pi}{5} - 2\cos\frac{\pi}{5} - 1 = 4X^2 - 2X - 1$$

7. Comme $S = 0$, ça signifie que $\cos\frac{\pi}{5}$ est une racine du polynôme $4X^2 - 2X - 1$. Le discriminant est $\Delta = 4 + 16 = 20$ donc les racines du polynôme sont

$$x_1 = \frac{2 + \sqrt{20}}{8} = \frac{2 + 2\sqrt{5}}{8} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}; \qquad x_2 = \frac{2 - \sqrt{20}}{8} = \frac{1 - \sqrt{5}}{4}$$

Comme $\sqrt{5} > 1$, la racine $x_2 < 0$. Or d'après le cercle trigonométrique, on a $\cos\frac{\pi}{5} > 0$ donc

$$\cos\frac{\pi}{5} = x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$$

Exercice 3. On considère dans le plan complexe la transformation f qui associe au point d'affixe $z \neq 1$ le point d'affixe $Z = f(z)$ avec

$$f(z) = i\frac{1+z}{1-z}$$

On pose $z = x + iy$ et $Z = X + iY$.

1. Calculer X et Y en fonction de x et y.
2. Déterminer la fonction f^{-1}, c'est-à-dire exprimer $z = f^{-1}(Z)$ en fonction de Z
3. En déduire les expressions de x et y en fonction de X et Y.
4. Déterminer Z en fonction de $\frac{\theta}{2}$ lorsque $z = e^{i\theta}$ parcourt le cercle unité privé de 1.
5. On note L_z le lieu géométrique décrit par le point d'affixe z lorsque le point d'affixe Z parcourt l'axe $\mathbb{R}$ des réels. Calculer $|z|$ lorsque $Z \in \mathbb{R}$ et déterminer L_z.

Corrigé.

1. On calcule la forme algébrique

$$f(z) = i\frac{1+(x+iy)}{1-(x+iy)} = i\frac{(1+x)+iy}{(1-x)-iy} = i\frac{((1+x)+iy)((1-x)+iy)}{(1-x)^2+y^2}$$

$$= i\frac{(1+x)(1-x)+iy(1+x)+(1-x)iy-y^2}{(1-x)^2+y^2} = i\frac{1-x^2+2iy-y^2}{(1-x)^2+y^2} = \frac{i(1-x^2-y^2)-2y}{(1-x)^2+y^2}$$

Donc

$$X = \frac{-2y}{(1-x)^2+y^2}; \qquad Y = \frac{1-x^2-y^2}{(1-x)^2+y^2}$$

2. On isole z dans l'expression

$$Z = i\frac{1+z}{1-z} \quad \Leftrightarrow \quad -iZ(1-z) = 1+z \quad \Leftrightarrow \quad -iZ + iZz = 1+z \quad \Leftrightarrow \quad -iZ-1 = z - iZz = z(1-iZ)$$

$$\Leftrightarrow \quad z = \frac{-1-iZ}{1-iZ} = f^{-1}(Z)$$

3. On met l'expression précédente sous forme algébrique

$$z = \frac{-1-i(X+iY)}{1-i(X+iY)} = \frac{(-1+Y)-iX}{(1+Y)-iX} = \frac{((-1+Y)-iX)((1+Y)+iX)}{(1+Y)^2+X^2}$$

$$= \frac{(-1+Y)(1+Y)-iX(1+Y)+iX(-1+Y)+X^2}{(1+Y)^2+X^2} = \frac{-1+Y^2+X^2-2iX}{(1+Y)^2+X^2}$$

Donc

$$x = \frac{-1+Y^2+X^2}{(1+Y)^2+X^2}; \qquad y = \frac{-2X}{(1+Y)^2+X^2}$$

4. On remplace $z = e^{i\theta}$ dans $f(z)$ et on utilise la formule d'angle moitié

$$Z = f(e^{i\theta}) = i\frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}} = i\frac{e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}}+e^{-i\frac{\theta}{2}}\right)}{e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}}-e^{i\frac{\theta}{2}}\right)} = i\frac{2\cos\frac{\theta}{2}}{-2i\sin\frac{\theta}{2}} = -\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

5. Quand Z parcourt l'axe des réels, on a $Y = 0$, donc

$$z = \frac{X^2-1-2iX}{1+X^2} = \frac{X^2-1}{1+X^2} - i\frac{2X}{1+X^2}$$

On calcule le module de z :

$$|z| = \sqrt{\frac{(X^2-1)^2+4X^2}{(1+X^2)^2}} = \sqrt{\frac{1-2X^2+X^4+4X^2}{(1+X^2)^2}} = \sqrt{\frac{1+2X^2+X^4}{(1+X^2)^2}} = \sqrt{\frac{(1+X^2)^2}{(1+X^2)^2}} = 1$$

Donc z est sur le cercle de centre O l'origine du repère et de rayon 1. Remarquons que la partie réelle de z ne peut pas valoir 1, car on aurait alors $X^2-1 = 1+X^2$, c'est à dire $0 = -2$, ce qui est impossible. Donc L_z est le cercle unité privé du point $(1,0)$.

Exercice 4.

1. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle suivante :

$$5\frac{x-3}{x^3+x^2+9x+9}$$

2. En déduire la primitive suivante pour $t>3$

$$F(t)=5\int_t^{+\infty}\frac{x-3}{x^3+x^2+9x+9}dx$$

3. La fonction F est-elle croissante, décroissante ou aucun des deux ?

Corrigé.

1. On commence par chercher les racines évidentes du dénominateur x^3+x^2+9x+9. -1 est une racine, donc on fait la division euclidienne par $x+1$:

$$X^3+X^2+9X+9=(X+1)(X^2+9)$$

Le polynôme X^2+9 a un discriminant négatif, donc il n'y a pas d'autres racines réelles. Le fraction rationnelle se décompose donc de la manière suivante :

$$5\frac{x-3}{(x+1)(x^2+9)}=\frac{a}{x+1}+\frac{bx+c}{x^2+9}$$

On multiplie chaque coté de l'égalité par $x+1$ et on prend $x=-1$. On obtient

$$a=5\frac{-1-3}{((-1)^2+9)}=-2; \qquad 5\frac{x-3}{(x+1)(x^2+9)}=\frac{-2}{x+1}+\frac{bx+c}{x^2+9}$$

On prend $x=0$ et il vient

$$5\frac{-3}{9}=-2+\frac{c}{9} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{c}{9}=\frac{-15}{9}+\frac{18}{9}=\frac{3}{9} \quad\Leftrightarrow\quad c=3$$

$$5\frac{x-3}{(x+1)(x^2+9)}=\frac{-2}{x+1}+\frac{bx+3}{x^2+9}$$

On multiplie par x l'expression et on fait tendre x vers $+\infty$ et on obtient à la limite $0=-2+b$ donc $b=2$. Finalement

$$5\frac{x-3}{(x+1)(x^2+9)}=\frac{-2}{x+1}+\frac{2x+3}{x^2+9}=\frac{-2}{x+1}+\frac{2x}{x^2+9}+\frac{3}{x^2+9}$$

2. On en déduit

$$F(t)=5\int_t^{+\infty}\frac{x-3}{x^3+x^2+9x+9}dx=\int_t^{+\infty}\frac{-2}{x+1}+\frac{2x}{x^2+9}+\frac{3}{x^2+9}dx$$

La primitive de $\frac{1}{x+1}$ est $\ln|x+1|$. On reconnait la forme $\frac{u'}{u}$ dans $\frac{2x}{x^2+9}$, donc la primitive de cette partie est $\ln|x^2+9|$. On factorise le 9 dans la dernière fraction. On a donc

$$F(t)=\left[-2\ln|x+1|+\ln|x^2+9|\right]_t^{+\infty}+\int_t^{+\infty}\frac{\frac{1}{3}}{\left(\frac{x}{3}\right)^2+1}dx$$

On reconnait la dérivée d'une arctangente. On regroupe les ln :

$$F(t)=\left[\ln\left(\frac{x^2+9}{(x+1)^2}\right)+\arctan\left(\frac{x}{3}\right)\right]_t^{+\infty}$$

Pour calculer la limite en $+\infty$, on factorise le terme dominant dans le ln :

$$\ln\left(\frac{1+9/x^2}{(1+1/x)^2}\right)\to\ln 1=0; \qquad \arctan\left(\frac{x}{3}\right)\to\frac{\pi}{2}$$

Donc

$$F(t)=\frac{\pi}{2}-\ln\left(\frac{t^2+9}{(t+1)^2}\right)-\arctan\left(\frac{t}{3}\right)$$

3. La dérivée de F est la fonction $f(t) = -5\frac{t-3}{(t+1)(t^2+9)}$ (attention, la variable t est en borne inférieure de l'intégrale). Or pour $t > 3$, on a $t-3 > 0$, $(t+1) > 0$ et $t^2+9 > 0$ donc $f(t) < 0$. Donc F est décroissante pour $t > 3$.

Exercice 5. On considère l'équation différentielle (E) : $y" + 4y = f(x)$.

1. Pour $f(x) = 0$, résoudre (E).
2. Pour $f(x) = -4(\cos(2x) + \sin(2x))$, trouver la solution de (E) telle que $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.

Corrigé.

1. L'équation caractéristique associée à $y" + 4y = 0$ est $r^2 + 4 = 0$ qui a pour racines complexes $r_1 = 2i$ et $r_2 = -2i$. Donc les solutions de (E) sont

$$y_h(x) = A\cos(2x) + B\sin(2x)$$

avec A, B des constantes réelles.

2. On cherche une solution particulière sous la forme $y_p(x) = ax\cos(2x) + bx\sin(2x)$. On a donc

$$y_p'(x) = a\cos(2x) - 2ax\sin(2x) + b\sin(2x) + 2bx\cos(2x) = (a + 2bx)\cos(2x) + (b - 2ax)\sin(2x)$$

$$y"_p(x) = (2b + 2b - 4ax)\cos(2x) + (-2a - 2a - 4bx)\sin(2x) = (4b - 4ax)\cos(2x) + (-4a - 4bx)\sin(2x)$$

On remplace dans (E) :

$$(4b - 4ax)\cos(2x) + (-4a - 4bx)\sin(2x) + 4ax\cos(2x) + 4bx\sin(2x) = -4(\cos(2x) + \sin(2x))$$

$$4b\cos(2x) - 4a\sin(2x) = -4(\cos(2x) + \sin(2x)) \quad \Leftrightarrow b = -1, \quad a = 1$$

Donc $y_p(x) = x\cos(2x) - x\sin(2x)$. On rajoute les solutions de l'équation homogène et on obtient

$$y(x) = (A + x)\cos(2x) + (B - x)\sin(2x)$$

On utilise les conditions initiales : $y(0) = 0$ donne $A = 0$. Donc $y(x) = x\cos(2x) + (B - x)\sin(2x)$ et on dérive $y'(x) = \cos(2x) - 2x\sin(2x) - \sin(2x) + 2(B - x)\cos(2x)$. Avec $y'(0) = 1$, il vient $1 + 2B = 1$ donc $B = 0$. Finalement

$$y(x) = x\cos(2x) - x\sin(2x)$$

Exercice 6. On considère sur l'intervalle $]-1, 1[$ l'équation différentielle (E) : $\sqrt{1-x^2} \cdot y' - y = 0$. Déterminer la solution de (E) telle que $y(0) = 3$.

Corrigé. On divise par $\sqrt{1-x^2}$ et on a

$$y' - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}y = 0$$

Une primitive de $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ est $-\arcsin x$, donc $y(x) = Ce^{\arcsin(x)}$ avec C une constante. On utilise les conditions initiales pour déterminer C :

$$y(0) = 3 \quad \Leftrightarrow \quad Ce^{\arcsin(0)} = 3 \quad \Leftrightarrow \quad C = 3$$

Donc

$$y(x) = 3e^{\arcsin(x)}$$

Exercice 7. On considère l'équation différentielle $x^3y' = (x-4)y^2$ avec $x \in \mathbb{R}^\star$. Déterminer la solution de cette équation telle que $y(1) = 1$.

Corrigé. On sépare y et x de chaque coté de l'équation :

$$x^3y' = (x-4)y^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y'}{y^2} = \frac{x-4}{x^3} = \frac{1}{x^2} + \frac{-4}{x^3}$$

On primitive de chaque coté de l'égalité, sans oublier la constante d'intégration :

$$\frac{-1}{y} = \frac{-1}{x} + \frac{4}{2x^2} + C = \frac{-1}{x} + \frac{2}{x^2} + C = \frac{2 - x + Cx^2}{x^2}$$

Donc

$$y(x) = \frac{x^2}{x - 2 + Cx^2}$$

On utilise les conditions initiales $y(1) = 1$ et on a

$$1 = y(1) = \frac{1}{-1+C} \quad \Leftrightarrow \quad -1 + C = 1 \quad \Leftrightarrow \quad C = 2$$

Donc

$$y(x) = \frac{x^2}{x - 2 + 2x^2}$$

Exercice 8. Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x(x + 1)^2 - y(y + 1)^2$.

1. Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$
2. Déterminer les coordonnées des quatre points stationnaires (ou critiques) de f et indiquer leur nature (maximum, minimum, col ou point selle).

Corrigé.

1. On calcule les dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (x + 1)^2 + 2x(x + 1) = (x + 1)(x + 1 + 2x) = (x + 1)(3x + 1) = 3x^2 + 4x + 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -(y + 1)^2 - 2y(y + 1) = -(y + 1)(y + 1 + 2y) = -(y + 1)(3y + 1) = -(3y^2 + 4y + 1)$$

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x + 4 \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -6y - 4 \quad \Leftrightarrow \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$$

2. Les points critiques sont les points où les dérivées partielles premières s'annulent toutes les deux.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} (x + 1)(3x + 1) & = & 0 \\ -(y + 1)(3y + 1) & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} x = -1 & \text{ou} & x = -\frac{1}{3} \\ y = -1 & \text{ou} & y = -\frac{1}{3} \end{array} \right.$$

   On a donc quatre points critiques, pour chacun d'eux, on calcule la quantité $s^2 - rt = (6x + 4)(6y + 4)$
   - Pour le point $(-1, -1)$, on a $s^2 - rt = 4 > 0$, c'est un point col.
   - Pour le point $(-1, -1/3)$, on a $s^2 - rt = -4 < 0$, c'est un extremum local. Comme $r = -2 < 0$, c'est un maximum local.
   - Pour le point $(-1/3, -1)$, on a $s^2 - rt = -4 < 0$, c'est un extremum local. Comme $r = 2 > 0$, c'est un minimum local.
   - Pour le point $(-1/3, -1/3)$, on a $s^2 - rt = 4 > 0$, c'est un point col.

Exercice 9. On considère dans $\mathbb{R}^3$ rapporté à la base canonique $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ les vecteurs $\overrightarrow{OA} = \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$ et $\overrightarrow{OB} = 2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$. On désigne par (P) le plan dont une base est $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.

1. Calculer les longueurs de $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$.
2. Donner la décomposition dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ du vecteur $\overrightarrow{OC}$ orthogonal au plan (P) et de même longueur que $\overrightarrow{OA}$.
3. Soit Q la matrice de passage de la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ à la base $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$, Q^t sa transposée et Q^{-1} sa matrice inverse. Donner les matrices Q, QQ^t et Q^{-1}.
4. On considère maintenant la transformation géométrique S qui associe à tout point de l'espace son symétrique par rapport au plan (P), et on note respectivement S' et S les matrices représentant cette transformation géométrique relativement aux bases $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$ et $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ (départ et arrivée). Donner les matrices S' et S.

5. Donner les coordonnées dans $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de $S(M)$ le symétrique par rapport à (P) du point M de coordonnées $(-4,1,1)$ dans $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Corrigé. Le vecteur $\overrightarrow{OA}$ a pour coordonnées $(1,2,2)$ et $\overrightarrow{OB}$ a pour coordonnées $(2,1,-2)$ dans la base canonique $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, que je noterais $\mathcal{C}$ par la suite.

1. On a
$$\|\overrightarrow{OA}\| = \sqrt{1+4+4} = \sqrt{9} = 3; \qquad \|\overrightarrow{OB}\| = \sqrt{4+1+4} = \sqrt{9} = 3;$$

2. Un vecteur orthogonal au plan (P) est colinéaire au produit vectoriel de $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$. On calcule ce vecteur :
$$\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6\\6\\-3\end{pmatrix}$$
Ce vecteur a donc une norme de 9 (produit des normes des deux vecteurs), et on le divise par 3 pour obtenir un vecteur de norme 3 :
$$\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix}-2\\2\\-1\end{pmatrix}$$

3. On note $\mathcal{B}$ cette nouvelle base et $Q = P(\mathcal{C},\mathcal{B})$.
$$Q = P(\mathcal{C},\mathcal{B}) = \begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & 1 & 2\\ 2 & -2 & -1\end{pmatrix}; \quad Q^t = \begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & -2\\ -2 & 2 & -1\end{pmatrix};$$
On calcule
$$QQ^t = \begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & 1 & 2\\ 2 & -2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & -2\\ -2 & 2 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9 & 0 & 0\\ 0 & 9 & 0\\ 0 & 0 & 9\end{pmatrix} = 9I_3$$
Donc
$$Q^{-1} = \frac{1}{9}Q^t = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & -2\\ -2 & 2 & -1\end{pmatrix}$$

4. On calcule l'image de la base $\mathcal{B}$ par la symétrie S. La symétrie S transforme $\overrightarrow{OA}$ en $\overrightarrow{OA}$, de coordonnées $(1,0,0)$ dans la base $\mathcal{B}$. La symétrie S transforme $\overrightarrow{OB}$ en $\overrightarrow{OB}$. Et la symétrie S transforme $\overrightarrow{OC}$ en $-\overrightarrow{OC}$. Donc la matrice de S dans la base $\mathcal{B}$ est
$$S' = M(\mathcal{B},\mathcal{B}) = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$
On utilise la formule de changement de base pour les matrices pour avoir la matrice de S dans la base $\mathcal{C}$.
$$S = M(\mathcal{C},\mathcal{C}) = P(\mathcal{C},\mathcal{B})M(\mathcal{B},\mathcal{B})P(\mathcal{B},\mathcal{C}) = QS'Q^{-1}$$
$$S = \begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & 1 & 2\\ 2 & -2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\frac{1}{9}\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & -2\\ -2 & 2 & -1\end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}1 & 8 & -4\\ 8 & 1 & 4\\ -4 & 4 & 7\end{pmatrix}$$

5. On a
$$S(M) = S\begin{pmatrix}-4\\1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}1 & 8 & -4\\ 8 & 1 & 4\\ -4 & 4 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-3\\3\end{pmatrix}$$
Donc les coordonnées du symétrique de M sont $(0,-3,3)$.