ATS Mathématiques - Revisions

Exercice 1. On considère la fonction f définie pour $|x| < \frac{\pi}{4}, x \neq 0$ par

$$f(x) = \frac{1-\cos(2x) - \ln(\cos(2x))}{x^2}$$

Calculer $x^2 f'(x) + 2xf(x)$.

Exercice 2.

1. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$ et $x \in \mathbb{R}\backslash\{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, on considère le complexe $\frac{1-e^{i2nx}}{1-e^{i2x}}$. Ecrire ce complexe sous la forme $e^{i\alpha x}\frac{\beta(x)}{\gamma(x)}$ avec $\alpha(x), \gamma(x), \beta(x)$ des fonctions réelles.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$ et $x \in \mathbb{R}\backslash\{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, on considère

$$z_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} e^{i2kx}$$

   Décomposer $z_n(x)$ sous la forme $z_n(x) = u_n(x) + iv_n(x)$ avec $u_n(x)$ et $v_n(x)$ des fonctions réelles.
3. En déduire la valeur de la somme suivante :

$$S = 1 + \cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5} + \cos\frac{6\pi}{5} + \cos\frac{8\pi}{5}$$

4. A l'aide du cercle trigonométrique, calculer $\cos\frac{4\pi}{5}$ et $\cos\frac{6\pi}{5}$ en fonction de $\cos\frac{\pi}{5}$
5.
6. Exprimer $\cos\frac{2\pi}{5}$ et $\cos\frac{8\pi}{5}$ en fonction de $\cos^2\frac{\pi}{5}$
7. En déduire une expression de S sous la forme d'un polynôme en $X = \cos\frac{\pi}{5}$.
8. En déduire la valeur de $\cos\frac{\pi}{5}$.

Exercice 3. On considère dans le plan complexe la transformation f qui associe au point d'affixe $z \neq 1$ le point d'affixe $Z = f(z)$ avec

$$f(z) = i\frac{1+z}{1-z}$$

On pose $z = x + iy$ et $Z = X + iY$.

1. Calculer X et Y en fonction de x et y.
2. Déterminer la fonction f^{-1}, c'est-à-dire exprimer $z = f^{-1}(Z)$ en fonction de Z
3. En déduire les expressions de x et y en fonction de X et Y.
4. Déterminer Z en fonction de $\frac{\theta}{2}$ lorsque $z = e^{i\theta}$ parcourt le cercle unité privé de 1.
5. On note L_z le lieu géométrique décrit par le point d'affixe z lorsque le point d'affixe Z parcourt l'axe $\mathbb{R}$ des réels. Calculer $|z|$ lorsque $Z \in \mathbb{R}$ et déterminer L_z.

Exercice 4.

1. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle suivante :

$$5\frac{x-3}{x^3+x^2+9x+9}$$

2. En déduire la primitive suivante pour $t > 3$

$$F(t) = 5\int_t^{+\infty} \frac{x-3}{x^3+x^2+9x+9}dx$$

3. La fonction F est-elle croissante, décroissante ou aucun des deux ?

Exercice 5. On considère l'équation différentielle (E) : $y" + 4y = f(x)$.

1. Pour $f(x) = 0$, résoudre (E).
2. Pour $f(x) = -4(\cos(2x) + \sin(2x))$, trouver la solution de (E) telle que $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.

Exercice 6. On considère sur l'intervalle $]-1, 1[$ l'équation différentielle (E) : $\sqrt{1-x^2} \cdot y' - y = 0$. Déterminer la solution de (E) telle que $y(0) = 3$.

Exercice 7. On considère l'équation différentielle $x^3 y' = (x-4)y^2$ avec $x \in \mathbb{R}^\star$. Déterminer la solution de cette équation telle que $y(1) = 1$.

Exercice 8. Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x(x+1)^2 - y(y+1)^2$.

1. Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$
2. Déterminer les coordonnées des quatre points stationnaires (ou critiques) de f et indiquer leur nature (maximum, minimum, col ou point selle).

Exercice 9. On considère dans $\mathbb{R}^3$ rapporté à la base canonique $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ les vecteurs $\overrightarrow{OA} = \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$ et $\overrightarrow{OB} = 2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$. On désigne par (P) le plan dont une base est $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.

1. Calculer les longueurs de $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$.
2. Donner la décomposition dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ du vecteur $\overrightarrow{OC}$ orthogonal au plan (P) et de même longueur que $\overrightarrow{OA}$.
3. Soit Q la matrice de passage de la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ à la base $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$, Q^t sa transposée et Q^{-1} sa matrice inverse. Donner les matrices Q, QQ^t et Q^{-1}.
4. On considère maintenant la transformation géométrique S qui associe à tout point de l'espace son symétrique par rapport au plan (P), et on note respectivement S' et S les matrices représentant cette transformation géométrique relativement aux bases $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$ et $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ (départ et arrivée). Donner les matrices S' et S.
5. Donner les coordonnées dans $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de $S(M)$ le symétrique par rapport à (P) du point M de coordonnées $(-4, 1, 1)$ dans $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.