Q1.

1. Ecrire le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 des fonctions suivantes
$$\arctan(x), \qquad \ln(1+x), \qquad 1-\cos(\pi x)$$
2. Ecrire le développement limité à l'ordre 1 au voisinage de 0 de la fonction suivante
$$f(x) = \frac{\arctan(x) - \ln(1+x)}{1-\cos(\pi x)}$$
3. Déterminer les limites de f pour $x \to 0$, $x \to 1^-$, $x \to (-1)^+$

Corrigé.

1.
$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3), \quad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$
$$1-\cos(\pi x) = 1 - \left(1 - \frac{(\pi x)^2}{2!} + o(x^3)\right) = \frac{\pi^2 x^2}{2} + o(x^3)$$
2.
$$f(x) = \frac{x - \frac{x^3}{3} - \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right) + o(x^3)}{\frac{\pi^2 x^2}{2} + o(x^3)} = \frac{\frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} + o(x^3)}{\frac{\pi^2 x^2}{2} + o(x^3)}$$
$$= \frac{\frac{1}{2} - \frac{2x}{3} + o(x)}{\frac{\pi^2}{2} + o(x)} = \frac{1}{\pi^2} - \frac{4x}{3\pi^2} + o(x)$$
3. D'après le développement limité,
$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \frac{1}{\pi^2}.$$
Par simple passage à la limite, on a
$$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{\frac{\pi}{4} - \ln(2)}{1-(-1)} = \frac{\pi}{8} - \frac{\ln(2)}{2}$$
Quand $x \to (-1)^+$, le dénominateur tend encore vers 2 et l'arctangente vers $-\frac{\pi}{4}$. Par contre $\ln(1+x) \to -\infty$. Finalement
$$\lim_{x\to(-1)^+} f(x) = +\infty.$$

Q2.

1. Exprimer $\cos(2a)$ en fonction de $\cos^2 a$ et $\sin^2 a$.
2. Exprimer $\cos^2 a$ et $\sin^2 a$ en fonction de $\cos(2a)$.
3. En déduire la valeur des expressions suivantes :
$$\sqrt{2+2\cos 2a}, \quad \sqrt{2-2\cos 2a}, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\cos x}dx, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\cos x}dx$$
4. Dans chaque cas, déterminer l'angle θ ($0 < \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$) correspondant :
$$\cos\theta_1 = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}, \quad \sin\theta_2 = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{2}}}}{2},$$

Corrigé.

1. $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a$
2.
$$\cos^2 a = \frac{\cos(2a)+1}{2}; \sin^2 a = \frac{1-\cos(2a)}{2};$$
3. On a $\cos(2a)+1 = 2\cos^2 a$ et $1-\cos(2a) = 2\sin^2 a$ donc
$$\sqrt{2+2\cos 2a} = \sqrt{2}\sqrt{1+\cos 2a} = \sqrt{2}\sqrt{2\cos^2 a} = 2|\cos a|;$$
$$\sqrt{2-2\cos 2a} = \sqrt{2}\sqrt{1-\cos 2a} = \sqrt{2}\sqrt{2\sin^2 a} = 2|\sin a|$$
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\cos x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2\cos^2\frac{x}{2}}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2}\cos\frac{x}{2}dx = \left[2\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2$$
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\cos x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2\sin^2\frac{x}{2}}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2}\sin\frac{x}{2}dx = \left[-2\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -1$$

Q3. On considère le plan complexe $\mathbb{C}$.

1. Tracer le cercle de centre 0 et de rayon 1, puis placer dessus les solutions de l'équation $z^3 = i$.
2. Soit S l'ensemble des solutions de l'équation $z^3 = i$. Simplifier l'expression ci-dessous et donner ses valeurs possibles :
$$\frac{1-\bar{z}}{1-z+z^2-z^3+z^4-z^5}$$
3. On considère l'équation
$$\left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^n + \left(\frac{\bar{z}}{z}\right)^n = -2, \quad n \in \mathbb{N}^*, |z| \neq 0$$
On note S^* l'ensemble de ses solutions dans $\mathcal{C}$ et on note ρ et θ le module et l'argument de z. Déterminer la forme de l'argument θ lorsque $z \in S^*$
4. Dans le cas $n = 3$, tracer sur la figure l'ensemble des éléments de S^* tels que $\rho < 1$.

Corrigé.

1. On a $z=\rho e^{i\theta}$ donc $z^3=i$ devient $\rho^3 e^{i3\theta}=e^{i\frac{\pi}{2}}$. Donc $\rho=1$ et

$$3\theta=\frac{\pi}{2}+2k\pi \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3} \Rightarrow \theta\in\left\{\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6},\frac{9\pi}{6}=\frac{3\pi}{2}\right\}$$

   Point C,D,E en bleu sur le dessin.

2. Comme z est solution de $z^3=i$, on a $z^6=-1$ et $z\bar{z}=|z|^2=1$

$$\frac{(1-\bar{z})(1+z)}{(1-z+z^2-z^3+z^4-z^5)(1+z)}=\frac{1+z-\bar{z}-z\bar{z}}{1-z^6}=\frac{z-\bar{z}}{2}=i\Im m(z)$$

   Donc les valeurs possibles sont $\frac{i}{2}$ et $-i$.

3. On pose $z=\rho e^{i\theta}$, donc $\bar{z}=\rho e^{-i\theta}$ et on a

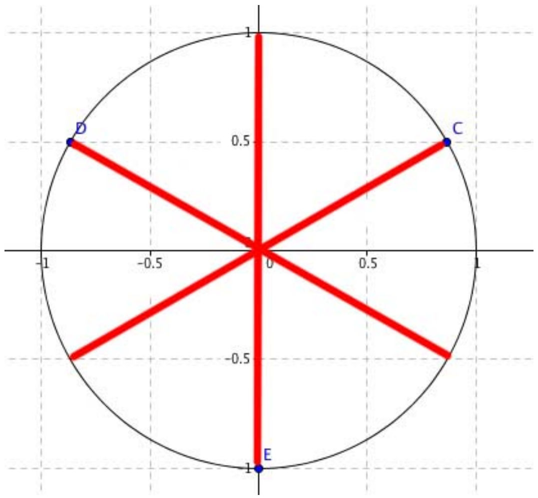
$$-2=\left(\frac{\rho e^{i\theta}}{\rho e^{-i\theta}}\right)^n+\left(\frac{\rho e^{-i\theta}}{\rho e^{i\theta}}\right)^n=e^{i2n\theta}+e^{-i2n\theta}=2\cos(2n\theta)$$

   Donc $\cos(2n\theta)=-1$ donc $2n\theta=\pi+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$, donc

$$\theta=\frac{\pi}{2n}+\frac{k\pi}{n},\quad k\in\mathbb{Z}$$

4. Il n'y a aucune condition sur ρ donc les solutions forment des demi-droites partant de l'origine et formant un angle θ avec l'axe Ox (en rouge sur le dessin). Pour $n=3$, on a

$$\theta\in\left\{\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{6},\frac{7\pi}{6},\frac{3\pi}{2},\frac{11\pi}{6}\right\}$$



Q4.

1. Décomposer en somme de fractions simples :

$$\frac{3x^2+4x-3}{x^4-1}$$

2. En déduire pour tout $t>1$ la primitive F suivante, ainsi que sa limite en $+\infty$:

$$F(t)=\int_{\sqrt{3}}^{t}\frac{3x^2+4x-3}{x^4-1}dx$$

Corrigé.

1. On a $x^4-1=(x^2-1)(x^2+1)=(x-1)(x+1)(x^2+1)$ donc

$$\frac{3x^2+4x-3}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+1}+\frac{cx+d}{x^2+1}$$

   On multiplie tout par $x-1$ et on prend $x=1$, il vient $a=1$. On multiplie tout par $x+1$ et on prend $x=-1$, il vient $b=1$. On multiplie tout par x et on fait $x\to\infty$, il vient $0=2+c$ donc $c=-2$. On termine en prenant $x=0$ et on a $3=-1+1+d$ donc $d=3$.

$$\frac{3x^2+4x-3}{x^4-1}=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}+\frac{-2x+3}{x^2+1}=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}-\frac{2x}{x^2+1}+3\frac{1}{x^2+1}$$

2.
$$\begin{aligned}F(t)&=\left[\ln|x-1|+\ln|x+1|-\ln|x^2+1|+3\arctan x\right]_{\sqrt{3}}^{t}\\&=\ln\left(\frac{t^2-1}{t^2+1}\right)+3\arctan t+\ln 2-\pi\end{aligned}$$

   On factorise par le terme dominant dans le ln, et on a

$$\lim_{t\to+\infty}F(t)=\ln 1+3\frac{\pi}{2}+\ln 2-\pi=\ln 2+\frac{\pi}{2}$$

Q5. On pose pour $t>0$:

$$I_{n,k}(t)=\int_0^t x^k(t-x)^{n-k}dx$$

1. Calculer $I_{n,k+1}(t)$ en fonction de $I_{n,k}(t)$ pour $0\leqslant k<n$.
2. En déduire la valeur de $I_{n,k}(t)$ en fonction de k,n et t pour $0\leqslant k<n$.
3. Calculer $I_{n,n}(t)$ puis

$$\sum_{k=0}^{n}C_n^k I_{n,k}(t)$$

Corrigé.

1. On fait une intégration par partie pour dériver x^{k+1} :

$$I_{n,k+1}(t) = \int_0^t x^{k+1}(t-x)^{n-k-1}dx$$

$$= [x^{k+1}\frac{-(t-x)^{n-k}}{n-k}]_0^t - \int_0^t (k+1)x^k\frac{-(t-x)^{n-k}}{n-k}dx$$

$$= \frac{k+1}{n-k}\int_0^t x^k(t-x)^{n-k}dx = \frac{k+1}{n-k}I_{n,k}(t)$$

2.

$$I_{n,k}(t) = \frac{k}{n-(k-1)}I_{n,k-1}(t) = \frac{k}{n-(k-1)}\frac{k-1}{n-(k-2)}I_{n,k-2}(t)$$

$$= \frac{k!}{(n-(k-1))(n-(k-2))\dots(n-(k-k))}I_{n,k-k}(t) = \frac{k!(n-k)!}{n!}I_{n,0}(t)$$

On a

$$I_{n,0}(t) = \int_0^t (t-x)^n dx = [-\frac{(t-x)^{n+1}}{n+1}]_0^t = \frac{t^{n+1}}{n+1}$$

Donc

$$I_{n,k}(t) = \frac{t^{n+1}}{(n+1)C_n^k}$$

3.

$$I_{n,n}(t) = \int_0^t x^n dx = [\frac{x^{n+1}}{n+1}]_0^t = \frac{t^{n+1}}{(n+1)} = \frac{t^{n+1}}{(n+1)C_n^n}$$

Donc (il y a $n+1$ termes dans la somme)

$$\sum_{k=0}^n C_n^k I_{n,k}(t) = \sum_{k=0}^n \frac{t^{n+1}}{(n+1)} = (n+1)\frac{t^{n+1}}{(n+1)} = t^{n+1}$$

Q6. On considère l'équation différentielle $y" + 2y' + 2y = f(x)$

1. Pour $f(x) = 0$, déterminer la solution générale.
2. Pour $f(x) = 2x^2$, déterminer la solution telle que $y(0) = 0$ et $y'(0) = -1$.

Corrigé.

1. $y" + 2y' + 2y = 0$ donc équation caractéristique $r^2 + 2r + 2$ avec $\Delta = -4$, donc $r = -1 \pm i$.

$$y(x) = e^{-x}(A\cos x + B\sin x), \quad A, B \in \mathbb{R}$$

2. On a déjà la solution homogène. on cherche $y_p = ax^2 + bx + c$ et on reporte :

$$2a+2(2ax+b)+2(ax^2+bx+c) = 2x^2 \Rightarrow 2ax^2+(4a+2b)x+(2a+2b+2c) = 2x^2$$

Donc $a = 1$, puis $4 + 2b = 0$ donc $b = -2$, puis $2 - 4 + 2c = 0$ donc $c = 1$.

$$y(x) = e^{-x}(A\cos x + B\sin x) + x^2 - 2x + 1$$

$y(0) = 0$ donne $A = -1$. On dérive

$$y(x) = e^{-x}(-A\sin x + B\cos x - A\cos x - B\sin x) + 2x - 2$$

$y'(0) = -1$ donne $B + 1 - 2 = -1$ donc $B = 0$

$$y(x) = -\cos x e^{-x} + x^2 - 2x + 1$$

Q7. On considère l'équation différentielle $y'(x) + \tan x . y(x) = f(x)$

1. Pour $f(x) = 0$, déterminer la solution générale.
2. Pour $f(x) = 2\cos^2 x$, déterminer la solution telle que $y(0) = 1$.

Corrigé.

1. Une primitive de $\tan x$ est $-\ln\cos x$ donc

$$y(x) = Ke^{--\ln\cos x} = K\cos x, \quad K \in \mathbb{R}$$

2. On fait la variation de la constante pour la solution particulière $y_p = K(x)\cos x$ donc $y_p' = K'(x)\cos x - K(x)\sin x$ et on reporte

$$K'(x)\cos x - K(x)\sin x + \tan x . K(x)\cos x = 2\cos^2 x \Rightarrow K'(x)\cos x = 2\cos^2 x$$

$$K'(x) = 2\cos x \Rightarrow K(x) = 2\sin x$$

Donc

$$y(x) = (K + 2\sin x)\cos x, \quad K \in \mathbb{R}$$

$y(0) = 1$ donne $K = 1$ donc $y(x) = (1 + 2\sin x)\cos x$

Q8. Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = y^3 + 3x^2(y-1) - 6y$$

1. Calculer
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y), \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(x,y), \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(x,y), \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y),$$
2. Préciser la valeur des coordonnées et indiquer la nature (minimum, maximum, col ou point selle) des quatre points stationnaires (ou critique) de f.

Corrigé.

1.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 6x(y-1), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3y^2 + 3x^2 - 6$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(x,y) = 6(y-1), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(x,y) = 6y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) = 6x$$

2. Les points critiques sont ceux où $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0$. Or $6x(y-1)=0$ si $x=0$ ou $y=1$ qu'on reporte dans la deuxième dérivée :
   — Si $x=0$ alors on a $3y^2-6=0$ donc $y=\sqrt{2}$ ou $-\sqrt{2}$.
   — Si $y=1$, alors $3+3x^2-6=0$ donc $x=1$ ou $x=-1$
   On obtient quatre points critiques : $M_1(0,\sqrt{2})$, $M_2(0,-\sqrt{2})$, $M_3(1,1)$, $M_4(-1,1)$. En chaque point, on étudie la quantité
$$d=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}$$
   — $M_1(0,\sqrt{2})$, on a $d=-36\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)<0$ donc c'est un extremum. Comme $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}=6(\sqrt{2}-1)>0$, c'est un minimum.
   — $M_2(0,-\sqrt{2})$, on a $d=36\sqrt{2}(-\sqrt{2}-1)<0$ donc c'est un extremum. Comme $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}=6(-\sqrt{2}-1)<0$, c'est un maximum.
   — $M_3(1,1)$, on a $d=36>0$, donc c'est un point col.
   — $M_4(-1,1)$, on a $d=36>0$, donc c'est un point col.

Q9. On considère dans $\mathbb{R}^3$ rapporté à la base canonique $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ le vecteur de coordonnées
$$\vec{v}=\begin{pmatrix}(2x+y-z)yz\\(x+2y-z)xz\\(x+y-2z)xy\end{pmatrix}$$

1. Calculer $\overrightarrow{Rot}\vec{v}$
2. Déterminer une fonction scalaire $f(x,y,z)$ telle que $\overrightarrow{grad}f(x,y,z)=\vec{v}$

Corrigé.

1.
$$\overrightarrow{Rot}\vec{v}=\begin{pmatrix}\frac{\partial v_z}{\partial y}-\frac{\partial v_y}{\partial z}\\\frac{\partial v_x}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial x}\\\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x^2+2xy-2xz-(x^2+2xy-2xz)\\2xy+y^2-2yz-(2xy+y^2-2zy)\\(2xz+2yz-z^2)-(2xz+2yz-z^2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

2. Le résultat précédent s'explique par $\overrightarrow{Rot}(\overrightarrow{grad}f)=\overrightarrow{0}$. Dans $\vec{v}$ on primitive chaque ligne par rapport à sa variable et on cherche une fonction commune aux trois lignes.
$$\begin{pmatrix}(x^2+xy-zx)yz+c_1(y,z)\\(xy+y^2-zy)xz+c_2(x,z)\\(xz+yz-z^2)xy+c_3(x,y)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(x+y-z)yzx+c_1(y,z)\\(x+y-z)xzy+c_2(x,z)\\(x+y-z)xyz+c_3(x,y)\end{pmatrix}$$
   On a donc $f(x,y,z)=(x+y-z)xyz$.

Q10. Soit
$$A=\begin{pmatrix}-1&2&-2\\2&-1&2\\2&-2&3\end{pmatrix}$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de A sous forme scindée.
2. A se décompose en $A=PDP^{-1}$ avec P inversible et D diagonale. Déterminer P,D et P^{-1}. En déduire A^{-1}.
3. Soit ϕ l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même admettant A comme matrice dans la base canonique $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
4. La transformation géométrique opérée par ϕ sur les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ est-elle :
   — Une symétrie par rapport à une droite ?
   — Une symétrie par rapport à un plan ?
   — Une homothétie suivie d'une symétrie par rapport à un plan ?
   — Une homothétie suivie d'une symétrie par rapport à une droite ?
   — Une rotation suivie d'une symétrie par rapport à un plan ?

Corrigé.

1. On fait $C_3\leftarrow C_3+C_2$ et $C_1\leftarrow C_1+C_2$. Puis $L_2\leftarrow L_2-L_1-L_3$
$$P=\begin{vmatrix}-1-\lambda&2&-2\\2&-1-\lambda&2\\2&-2&3-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1-\lambda&2&0\\1-\lambda&-1-\lambda&1-\lambda\\0&-2&1-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1-\lambda&2&0\\0&-1-\lambda&0\\0&-2&1-\lambda\end{vmatrix}$$
$$=(1-\lambda)^2(-1-\lambda)$$

2. On cherche E_1 les vecteurs propres de la valeurs propre 1 (d'ordre 2) :
$$\begin{cases}-x&+2y&-2z&=x\\2x&-y&+2z&=y\\2x&-2y&+3z&=z\end{cases}\begin{cases}-2x&+2y&-2z&=0\\2x&-2y&+2z&=0\\2x&-2y&+2z&=0\end{cases}\begin{cases}x&=&y-z\\y\\z\end{cases}$$
$$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$
   On cherche E_{-1} les vecteurs propres de la valeurs propre -1 (d'ordre 1) :
$$\begin{cases}-x&+2y&-2z&=-x\\2x&-y&+2z&=-y\\2x&-2y&+3z&=-z\end{cases}\begin{cases}&+2y&-2z&=0\\2x&&+2z&=0\\2x&-2y&+4z&=0\end{cases}\begin{cases}y&=&z\\x&=&-z\\z\end{cases}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$$
   Donc
$$P=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix};D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix};P^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&-1&2\\-1&1&-1\end{pmatrix}$$
   Et $A^{-1}=PD^{-1}P^{-1}=PDP^{-1}=A$ car $D=D^{-1}$
3. D'après D, ϕ est la symétrie par rapport au plan E_1 (parallèlement à la droite E_{-1}).