Q1.

1. Ecrire le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 des fonctions suivantes
$$\arctan(x), \qquad \ln(1+x), \qquad 1-\cos(\pi x)$$
2. Ecrire le développement limité à l'ordre 1 au voisinage de 0 de la fonction suivante
$$f(x) = \frac{\arctan(x) - \ln(1+x)}{1-\cos(\pi x)}$$
3. Déterminer les limites de f pour $x \to 0$, $x \to 1^-$, $x \to (-1)^+$

Q2.

1. Exprimer $\cos(2a)$ en fonction de $\cos^2 a$ et $\sin^2 a$.
2. Exprimer $\cos^2 a$ et $\sin^2 a$ en fonction de $\cos(2a)$.
3. En déduire la valeur des expressions suivantes :
$$\sqrt{2+2\cos 2a}, \quad \sqrt{2-2\cos 2a}, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\cos x}dx, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\cos x}dx$$
4. Dans chaque cas, déterminer l'angle θ $(0 < \theta \leqslant \frac{\pi}{2})$ correspondant :
$$\cos\theta_1 = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}, \quad \sin\theta_2 = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{2}}}}{2},$$

Q3. On considère le plan complexe $\mathbb{C}$.

1. Tracer le cercle de centre 0 et de rayon 1, puis placer dessus les solutions de l'équation $z^3 = i$.
2. Soit S l'ensemble des solutions de l'équation $z^3 = i$. Simplifier l'expression ci-dessous et donner ses valeurs possibles :
$$\frac{1-\bar{z}}{1-z+z^2-z^3+z^4-z^5}$$
3. On considère l'équation
$$\left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^n + \left(\frac{\bar{z}}{z}\right)^n = -2, \quad n \in \mathbb{N}^*, |z| \neq 0$$
On note S^* l'ensemble de ses solutions dans $\mathcal{C}$ et on note ρ et θ le module et l'argument de z. Déterminer la forme de l'argument θ lorsque $z \in S^*$
4. Dans le cas $n = 3$, tracer sur la figure l'ensemble des éléments de S^* tels que $\rho < 1$.

Q4.

1. Décomposer en somme de fractions simples :
$$\frac{3x^2+4x-3}{x^4-1}$$
2. En déduire pour tout $t > 1$ la primitive F suivante, ainsi que sa limite en $+\infty$:
$$F(t) = \int_{\sqrt{3}}^t \frac{3x^2+4x-3}{x^4-1}dx$$

Q5. On pose pour $t > 0$:
$$I_{n,k}(t) = \int_0^t x^k(t-x)^{n-k}dx$$

1. Calculer $I_{n,k+1}(t)$ en fonction de $I_{n,k}(t)$ pour $0 \leqslant k < n$.
2. En déduire la valeur de $I_{n,k}(t)$ en fonction de k, n et t pour $0 \leqslant k < n$.
3. Calculer $I_{n,n}(t)$ puis
$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k I_{n,k}(t)$$

Q6. On considère l'équation différentielle $y" + 2y' + 2y = f(x)$

1. Pour $f(x) = 0$, déterminer la solution générale.
2. Pour $f(x) = 2x^2$, déterminer la solution telle que $y(0) = 0$ et $y'(0) = -1$.

Q7. On considère l'équation différentielle $y'(x) + \tan x.y(x) = f(x)$

1. Pour $f(x) = 0$, déterminer la solution générale.
2. Pour $f(x) = 2\cos^2 x$, déterminer la solution telle que $y(0) = 1$.

Q8. Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par
$$f(x,y) = y^3 + 3x^2(y-1) - 6y$$

1. Calculer
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y), \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(x,y), \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(x,y), \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y),$$
2. Préciser la valeur des coordonnées et indiquer la nature (minimum, maximum, col ou point selle) des quatre points stationnaires (ou critique) de f.

Q9. On considère dans $\mathbb{R}^3$ rapporté à la base canonique $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ le vecteur de coordonnées

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} (2x+y-z)yz \\ (x+2y-z)xz \\ (x+y-2z)xy \end{pmatrix}$$

1. Calculer $\overrightarrow{Rot}\vec{v}$
2. Déterminer une fonction scalaire $f(x,y,z)$ telle que $\overrightarrow{grad}f(x,y,z) = \vec{v}$

Q10. Soit

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de A sous forme scindée.
2. A se décompose en $A = PDP^{-1}$ avec P inversible et D diagonale. Déterminer P, D et P^{-1}. En déduire A^{-1}.
3. Soit ϕ l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même admettant A comme matrice dans la base canonique $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
4. La transformation géométrique opérée par ϕ sur les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ est-elle :
   – Une symétrie par rapport à une droite ?
   – Une symétrie par rapport à un plan ?
   – Une homothétie suivie d'une symétrie par rapport à un plan ?
   – Une homothétie suivie d'une symétrie par rapport à une droite ?
   – Une rotation suivie d'une symétrie par rapport à un plan ?