Question 1. Déterminer, en justifiant vos réponses, les limites suivantes :

$$a)\ \lim_{x\to+\infty} \ln(x^2)-\sqrt{x}, \qquad b)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{e^x-e^{-x}}, \qquad c)\ \lim_{x\to 0} \frac{\tan(2x^2)}{x\sin x}.$$

Corrigé. $a)$ On a pour tout $x>0$,

$$\ln(x^2)-\sqrt{x} = 2\ln x - \sqrt{x} = -\sqrt{x}\left(\frac{2\ln x}{-\sqrt{x}}+1\right)$$

On a $\lim_{x\to+\infty} -\sqrt{x} = -\infty$ et $\ln x$ est négligeable devant $\sqrt{x}$, donc

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(x^2)-\sqrt{x} = -\infty$$

$b)$ On a $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$, donc $\lim_{x\to+\infty} e^x - e^{-x} = +\infty$ et on en déduit

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{e^x-e^{-x}} = 0$$

$c)$ Pour x au voisinage de 0, on a

$$\frac{\tan(2x^2)}{x\sin x} \sim \frac{2x^2}{x\times x} \sim 2, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\tan(2x^2)}{x\sin x} = 2$$

Question 2. Calculer les intégrales suivantes.

$$a)\ \int_0^1 x\cos(3x^2-5)dx, \qquad b)\ \int_1^2 t\ln t dt, \qquad \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t)^4}dt$$

Corrigé. $a)$ On reconnait une forme $u'\cos u$ avec $u=3x^2-5$, donc $u'=6x$:

$$\int_0^1 x\cos(3x^2-5)dx = \frac{1}{6}\int_0^1 6x\cos(3x^2-5)dx = \frac{1}{6}\left[\sin(3x^2-5)\right]_0^1 = \frac{\sin(-2)-\sin(-5)}{6} = \frac{\sin(5)-\sin(2)}{6}$$

$b)$ On fait une intégration par partie

$$\int_1^2 t\ln t dt = \left[\frac{t^2}{2}\ln t\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{t^2}{2}\frac{1}{t}dt = 2\ln 2 - \int_1^2 \frac{t}{2}dt = 2\ln 2 - \left[\frac{t^2}{4}\right]_1^2 = 2\ln 2 - 1 + \frac{1}{4} = 2\ln 2 - \frac{3}{4}$$

$c)$ On a $\frac{1}{(1+t)^4} \sim \frac{1}{t^4}$ pour $t\to\infty$, donc l'intégrale converge par critère de Riemman.

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t)^4}dt = \left[\frac{-1}{3(1+t)^3}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{3}$$

Question 3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle suivante :

$$y' + (\sin x)y = \sin x$$

Corrigé. On commence par résoudre l'équation homogène $y' + (\sin x)y = 0$. Les solutions de l'équation homogènes sont les fonctions

$$y_h(x) = \lambda e^{\cos x}, \quad \lambda\in\mathbb{R}$$

On remarque que la fonction $y_p(x)=1$ est une solution particulière de l'équation. On en déduit que les solutions sur $\mathbb{R}$ de cette équation sont

$$y(x) = \lambda e^{\cos x} + 1, \quad \lambda\in\mathbb{R}$$

Question 4. Résoudre sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ l'équation différentielle suivante

$$y' + (\tan x)y = \sin(2x)$$

Corrigé. On commence par résoudre l'équation homogène $y' + (\tan x)y = 0$. Une primitive de $\tan x$ étant $-\ln(\cos x)$, les solutions de l'équation homogène sont

$$y_h(x) = \lambda e^{\ln(\cos x)} = \lambda \cos x, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

On cherche une solution particulière sous la forme $y_p(x) = \lambda(x)\cos x$ avec λ une fonction à déterminer. En reportant dans l'équation, on a

$$\lambda'(x)\cos x - \lambda(x)\sin x + (\tan x)\lambda(x)\cos x = \sin(2x)$$

$$\lambda'(x)\cos x - \lambda(x)\sin x + \frac{\sin x}{\cos x}\lambda(x)\cos x = 2\sin(x)\cos(x)$$

$$\lambda'(x) = 2\sin(x)$$

$$\lambda(x) = -2\cos(x)$$

Donc $y_p(x) = -2\cos^2(x)$. Les solutions de l'équation sont donc

$$y(x) = -2\cos^2(x) + \lambda\cos x, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Question 5. On considère la fonction f suivante :

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longrightarrow & x^2 y e^{\sqrt{x^2+1}} \end{array}$$

Calculer $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1, 0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 1)$.

Corrigé. Comme $x^2 + 1 > 0$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$, donc $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)$. On a

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 e^{\sqrt{x^2+1}}$$

Donc

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 2xe^{\sqrt{x^2+1}} + \frac{2x \times x^2}{2\sqrt{x^2+1}}e^{\sqrt{x^2+1}} = \left(2x + \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}\right)e^{\sqrt{x^2+1}}$$

Donc

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1, 0) = \left(2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)e^{\sqrt{2}}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 1) = 0$$

Question 6. On considère la fonction f suivante : $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & x + \ln x \end{array}$. Parmi les réponses *a*), *b*) et *c*), donnez celles qui sont correctes, en vous justifiant.

a) Pour tout entier naturel n, l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+^*$.
b) La fonction f n'est pas majorée sur $\mathbb{R}_+^*$.
c) La fonction f est minorée sur $\mathbb{R}_+^*$.

Corrigé. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $f'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0$. Donc la fonction f est strictement croissante. De plus $\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Donc f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$.

a) est correcte car, pour tout entier naturel n, il existe un unique antécédent x de n par f, c'est à dire $f(x) = n$ avec $x \in \mathbb{R}_+^*$.
b) est correcte, car $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
c) est fausse car $\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$.

Question 7. Déterminer le module et la partie imaginaire du nombre complexe suivant : $Z = e^{i\frac{\pi}{3}}(1+i)$.

Corrigé. On cherche le module :

$$|Z| = \left|e^{i\frac{\pi}{3}}(1+i)\right| = \left|e^{i\frac{\pi}{3}}\right| \times |1+i| = 1 \times \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$$

. On développe pour la partie imaginaire

$$Z = \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)(1+i) = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1+i) = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Donc

$$\mathrm{Im}(Z) = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

Question 8. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $z^2 + z + 2 = 1$.

Corrigé. L'équation devient $z^2 + z + 1 = 0$. Le discriminant est $\Delta = 1 - 3 = -3$ donc les solutions complexes sont

$$z_1 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \quad z_2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$$

Question 9. On considère la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Calculer A^2
b) La matrice A est-elle inversible ? (Justifier)
c) La matrice A admet-elle zéro comme valeur propre ? (Justifier)

Corrigé.
a) on a

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = A$$

b) Par l'absurbe, supposons que A est inversible. Donc A^{-1} existe. D'après ce qui précède $A^2 = A$, qu'on multiplie par A^{-1}. On obtient alors $A = I_3$, ce qui est absurde. Donc A n'est pas inversible.
c) A n'étant pas inversible, elle admet 0 comme valeur propre.

Question 10. On considère la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Déterminer les valeurs propres de A. (Justifier)
b) La matrice A est-elle diagonalisable ? (Justifier)
c) La matrice A est-elle inversible ? (Justifier)

Corrigé.
a) La matrice étant triangulaire supérieure, les valeurs sur la diagonale sont les valeurs propres : 0 et 1.
Si on n'y pense pas, il suffit de calculer le polynôme caractéristique :

$$\det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(1-\lambda)^2$$

Ce polynôme a pour racine 0 et 1.

b) Notons $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Alors $A\vec{i} = \vec{i}$ et $A\vec{k} = \vec{k}$, ce sont donc deux vecteurs propres non colinéaires, donc l'espace propre de la valeur propre 1 $E_1 \subset \text{Vect}\{\vec{i}, \vec{k}\}$. Or la multiplicité de 1 est deux, donc son espace propre est de dimension 2 au maximum. Donc $E_1 = \text{Vect}\{\vec{i}, \vec{k}\}$ est de dimension 2, ce qui correspond à la multiplicité de la valeur propre.
La valeur propre 0 est de multiplicité 1 et donc son espace propre a dimension 1 (Note : le vecteur $(1, 1, 0)$ est un vecteur propre associé à 0). Chaque espace propre ayant pour dimension la multiplicité, la matrice A est diagonalisable.

c) La matrice A n'est pas inversible car 0 est valeur propre de A.

Question 11. On considère la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

a) Déterminer les valeurs propres de A.
b) La matrice A est-elle diagonalisable ? (Justifier)

Corrigé.
a) On détermine le polynôme caractéristique de A (développement selon la dernière ligne).

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 4 & 3 \\ 1 & 1-\lambda & -2 \\ 0 & 0 & -4-\lambda \end{vmatrix} = (-4-\lambda)\left[(-2-\lambda)(1-\lambda) - 4\right]$$

$$= (-4-\lambda)\left[-2 + 2\lambda - \lambda + \lambda^2 - 4\right] = (-4-\lambda)\left[\lambda^2 + \lambda - 6\right]$$

Une valeur propre est -4. On cherche les racines de $\lambda^2 + \lambda - 6$. Le discriminant est $\Delta = 25$, les racines 3 et -2. Les valeurs propres de A sont $-2, -4, 3$.

b) La matrice A est diagonalisable car elle a trois valeurs propres distinctes de multiplicité 1, donc la somme des multiplicité correspond bien à 3.

Question 12. Dans une classe, 30 élèves étudient l'anglais et 17 l'allemand. Sachant que tous les élèves étudient au moins l'une des deux langues : l'anglais ou l'allemand, et qu'il y a 11 élèves qui étudient à la fois l'anglais et l'allemand, quel est l'effectif de la classe ?

Corrigé. On note A l'ensemble des élèves étudiant anglais et B l'ensemble des élèves étudiant allemand. On cherche le cardinal de $A \cup B$:

$$Card(A \cup B) = CardA + CardB - Card(A \cap B) = 30 + 17 - 11 = 36$$

La classe a un effectif de 36.

Question 13. Dans un groupe de N personnes, 40% sont des hommes et les trois quarts d'entre eux portent des lunettes. Dans ce groupe, combien y-a-t-il d'hommes portant des lunettes ?

Corrigé. Dans le groupe, il y a $\frac{40N}{100} = \frac{2N}{5}$ hommes. Donc $\frac{2N}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{3N}{10}$ hommes portant des lunettes.

Question 14. Quelle est la négation de la propriété suivante : « Tous les éléments de l'ensemble E sont des réels différents de 0 » ?

Corrigé. En écriture mathématiques, la phrase est : $\forall e \in E, , e \in \mathbb{R}$ et $e \neq 0$. Sa négation est donc $\exists e \in E, e \notin \mathbb{R}$ ou $e = 0$, c'est-à-dire « Il existe un élément de l'ensemble E qui n'est pas un réel ou qui est nul » .

Question 15. Combien y-a-t-il de matrices carrées d'ordre 6 (6 lignes et 6 colonnes) dont tous les coefficients appartiennent à l'ensemble $\{0, 1\}$?

Corrigé. Dans une matrice carrée d'ordre 6, il y a 36 coefficients. Ces coefficients appartiennent à l'ensemble $\{0, 1\}$ de cardinal 2, donc le nombre de matrice de ce type est 2^{36}.

Question 16. Quelle est la négation de la propriété suivante : « Il existe au moins un élève de la promotion qui porte des lunettes. » ?

Corrigé. En notation mathématiques, on a $\exists$ élève $\in$ promotion, l'élève porte des lunettes. Donc la négation est $\forall$ élève $\in$ promotion, l'élève ne porte pas de lunette. Donc ≪ Aucun élève de la promotion ne porte de lunettes. ≫

Question 17. Ecrire sous forme algébrique le nombre complexe suivant : $Z = \frac{3-2i}{(i-1)e^{i\frac{\pi}{2}}}$

Corrigé.

$$Z = \frac{3-2i}{(i-1)i} = \frac{3-2i}{-1-i} = \frac{(3-2i)(-1+i)}{1+1} = \frac{-3+3i-2i+2}{2} = \frac{-1}{2} + i\frac{1}{2}$$

Question 18. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle suivante : $y" + 2y' - 3y = 0$.

Corrigé. L'équation caractéristique est $r^2 + 2r - 3 = 0$, de discriminant $4 + 12 = 16$ et de racines -3 et 1. Donc les solutions de l'équation sont

$$y(x) = Ae^{-3x} + Be^{x}, \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

Question 19. Calculer la dérivée de la fonction suivante $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & (1+x^2)^2 \end{array}$

Corrigé. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = 2(2x)(1+x^2) = 4x + 4x^3$$

Question 20. Déterminer, en justifiant vos réponses, les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0}\left(\ln\left(\frac{1}{2x}\right) - \ln\left(\frac{1}{x}\right)\right), \qquad \lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x^2+x-6}, \qquad \lim_{x\to+\infty}\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n}$$

Corrigé. On a simplement

$$\ln\left(\frac{1}{2x}\right) - \ln\left(\frac{1}{x}\right) = \ln\left(\frac{1}{2x}\times\frac{x}{1}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right), \qquad \lim_{x\to 0}\left(\ln\left(\frac{1}{2x}\right) - \ln\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2$$

Pour $x = 2$, le numérateur et le dénominateur valent 0, donc 2 est racine de deux polynômes, donc les deux polynômes sont divisibles par $(x-2)$:

$$x^3 - 8 = (x-2)(x^2+2x+4), \qquad x^2+x-6 = (x-2)(x+3)$$

Donc

$$\frac{x^3-8}{x^2+x-6} = \frac{x^2+2x+4}{x+3}, \qquad \lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x^2+x-6} = \frac{12}{5}$$

On factorise les termes dominants

$$\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n} = n\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} - \sqrt{n} = n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

Donc

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n} = +\infty$$

Question 21. Calculer les intégrales suivantes.

$$\int_0^1 (1+\tan^2 x)\tan^3 x dx, \qquad \int_1^2 t\sin t\cos t dt, \qquad \int_0^{+\infty} te^{-t^2}dt$$

Corrigé. On reconnait une forme $u'u^3$ avec $u = \tan x$, donc

$$\int_0^1 (1+\tan^2 x)\tan^3 x dx = \left[\frac{\tan^4 x}{4}\right]_0^1 = \frac{\tan^4 1}{4},$$

On remarque que $\sin t\cos t = \frac{1}{2}\sin(2t)$. Puis on fait une intégration par partie en dérivant t et primitivant $\frac{1}{2}\sin(2t)$:

$$\int_1^2 t\sin t\cos t dt = \left[-\frac{t}{4}\cos(2t)\right]_1^2 - \int_1^2 -\frac{1}{4}\cos(2t)dt, = \frac{-2\cos(4)+\cos(2)}{4} + \left[\frac{1}{8}\sin(2t)\right]_1^2$$

$$= \frac{-2\cos(4)+\cos(2)}{4} + \frac{\sin(4)-\sin(2)}{8}$$

On reconnaît une forme $u'e^u$ avec $u = -t^2$, donc $u' = -2t$.

$$\int_0^{+\infty} te^{-t^2}dt = \left[\frac{e^{-t^2}}{-2}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2}$$

Question 22. Combien y-a-t-il de matrices carrées d'ordre 8 (8 lignes et 8 colonnes) formées de 3 colonnes ne contenant que des 1, les autres colonnes ne contenant que des 0.

Corrigé. Parmi les 8 colonnes, il suffit de choisir les 3 colonnes de 1, le reste étant des zéros. Donc il y a

$$\binom{8}{3} = \frac{8!}{3!5!} = \frac{6\times7\times8}{1\times2\times3} = 49$$

Question 23. On considère la matrice suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer A^2.
2. Montrer que la matrice A est de rang 2.
3. La matrice A est-elle inversible ? (Justifier).

Corrigé.

1. On a

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

2. On fait un pivot total sur A pour voir le nombre de pivot (du coup, je n'écris pas les calculs sur l'identité, c'est inutile)

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ \underline{1} & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \begin{pmatrix} 0 & 2 & \underline{1} \\ \underline{1} & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1, L_3 \leftarrow L_3 + L_1$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & \underline{1} \\ \underline{1} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il y a deux pivots, donc la matrice est de rang 2.
Autre méthode à partir des vecteurs colonnes de la matrice A. On constante que $C_1 + C_2 = 2C_3$, donc la famille des colonnes de A n'est pas libre. Par contre, la famille C_1, C_2 est libre et contient deux vecteurs. Donc A est de rang 2.

3. La matrice A n'est pas de rang 3, donc elle n'est pas inversible.

Question 24. Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle suivante : $xy' - y = x^2\cos x$.

Corrigé. l'équation homogène devient $y' + \frac{-1}{x}y = 0$. Donc les solutions sont $y_h(x) = Ae^{\ln x} = Ax$ avec A une constante réelle.

On cherche une solution particulière sous la forme $y_p(x) = A(x)x$ et on reporte dans l'équation :

$$x\left(A'(x)x + A(x)\right) - A(x)x = x^2 \cos x \Leftrightarrow A'(x) = \cos x \Rightarrow A(x) = \sin x$$

Donc $y_p(x) = x \sin x$ et les solutions de l'équation sont

$$y(x) = x(A + \sin x), \qquad A \in \mathbb{R}$$