

Question 1. Déterminer, en justifiant vos réponses, les limites suivantes :

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x^2) - \sqrt{x}, \quad b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x - e^{-x}}, \quad c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(2x^2)}{x \sin x}.$$

Question 2. Calculer les intégrales suivantes.

$$a) \int_0^1 x \cos(3x^2 - 5) dx, \quad b) \int_1^2 t \ln t dt, \quad \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t)^4} dt$$

Question 3. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation différentielle suivante :

$$y' + (\sin x)y = \sin x$$

Question 4. Résoudre sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ l'équation différentielle suivante

$$y' + (\tan x)y = \sin(2x)$$

Question 5. On considère la fonction f suivante :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longrightarrow x^2 y e^{\sqrt{x^2+1}} \end{aligned}$$

Calculer $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1, 0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 1)$.

Question 6. On considère la fonction f suivante : $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longrightarrow x + \ln x$. Parmi les réponses a), b) et c), donnez celles qui sont correctes, en vous justifiant.

- a) Pour tout entier naturel n , l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution sur \mathbb{R}_+^* .
- b) La fonction f n'est pas majorée sur \mathbb{R}_+^* .
- c) La fonction f est minorée sur \mathbb{R}_+^* .

Question 7. Déterminer le module et la partie imaginaire du nombre complexe suivant : $Z = e^{i\frac{\pi}{3}}(1+i)$.

Question 8. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation suivante : $z^2 + z + 2 = 1$.

Question 9. On considère la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

- a) Calculer A^2
- b) La matrice A est-elle inversible ? (Justifier)
- c) La matrice A admet-elle zéro comme valeur propre ? (Justifier)

Question 10. On considère la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- a) Déterminer les valeurs propres de A . (Justifier)
- b) La matrice A est-elle diagonalisable ? (Justifier)
- c) La matrice A est-elle inversible ? (Justifier)

Question 11. On considère la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

- a) Déterminer les valeurs propres de A .
 b) La matrice A est-elle diagonalisable? (Justifier)

Question 12. Dans une classe, 30 élèves étudient l'anglais et 17 l'allemand. Sachant que tous les élèves étudient au moins l'une des deux langues : l'anglais ou l'allemand, et qu'il y a 11 élèves qui étudient à la fois l'anglais et l'allemand, quel est l'effectif de la classe?

Question 13. Dans un groupe de N personnes, 40% sont des hommes et les trois quarts d'entre eux portent des lunettes. Dans ce groupe, combien y-a-t-il d'hommes portant des lunettes?

Question 14. Quelle est la négation de la propriété suivante : « Tous les éléments de l'ensemble E sont des réels différents de 0 »?

Question 15. Combien y-a-t-il de matrices carrées d'ordre 6 (6 lignes et 6 colonnes) dont tous les coefficients appartiennent à l'ensemble $\{0, 1\}$?

Question 16. Quelle est la négation de la propriété suivante : « Il existe au moins un élève de la promotion qui porte des lunettes. »?

Question 17. Ecrire sous forme algébrique le nombre complexe suivant : $Z = \frac{3-2i}{(i-1)e^{i\frac{\pi}{2}}}$

Question 18. Résoudre sur \mathbb{R} l'équation différentielle suivante : $y'' + 2y' - 3y = 0$.

Question 19. Calculer la dérivée de la fonction suivante $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \rightarrow (1+x^2)^2$

Question 20. Déterminer, en justifiant vos réponses, les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\ln \left(\frac{1}{2x} \right) - \ln \left(\frac{1}{x} \right) \right), \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 + x - 6}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n}$$

Question 21. Calculer les intégrales suivantes.

$$\int_0^1 (1 + \tan^2 x) \tan^3 x dx, \quad \int_1^2 t \sin t \cos t dt, \quad \int_0^{+\infty} t e^{-t^2} dt$$

Question 22. Combien y-a-t-il de matrices carrées d'ordre 8 (8 lignes et 8 colonnes) formées de 3 colonnes ne contenant que des 1, les autres colonnes ne contenant que des 0.

Question 23. On considère la matrice suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer A^2 .
2. Montrer que la matrice A est de rang 2.
3. La matrice A est-elle inversible? (Justifier).

Question 24. Résoudre sur \mathbb{R}_+^* l'équation différentielle suivante : $xy' - y = x^2 \cos x$.