Q1. Calculer la dérivée de la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{e^x}$.

Corrigé. On a $f(x) = e^{-x}$, qui est de la forme e^u. La dérivée est $u'e^u$. Donc

$$f(x) = -e^{-x} = -\frac{1}{e^x}$$

Q2. Soient les nombres complexes $z_1 = 5+3i$ et $z_2 = -2+i$ avec $i^2 = -1$. Calculer $Z = z_1 \times z_2$, donner la partie réelle et la partie imaginaire de Z.

Corrigé.

$$Z = (5+3i)\times(-2+i) = -10+5i-6i-3 = -13-i$$

$$\Re e(Z) = -13, \qquad \Im m(z) = -1$$

Q3. Déterminer la fonction $F(x) = \int 3x^7.dx$.

Corrigé. Cette fonction est donc la primitive de $3x^7$. Pour rappel, la primitive de x^n est $\frac{1}{n+1}x^{n+1}$.

$$F(x) = \int 3x^7 dx = \frac{3}{7+1}x^{7+1} + C = \frac{3}{8}x^8 + C$$

avec C une constante.

Q4. Parmi les expressions suivantes, quelle est la factorisation correcte de l'expression x^2+y^2 :

$$(x-y)(x+y), \quad (x-y)^2, \quad (x+y)^2, \quad (x-iy)(x+iy)$$

Corrigé. Pour rappel, les identités remarquables sont

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2, \quad (a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$$

$$a^2-b^2 = (a-b)(a+b)$$

Donc les trois premières expressions ne conviennent pas. Par contre,

$$x^2+y^2 = x^2-(-y^2) = x^2-(-iy)^2 = (x-iy)(x+iy)$$

Q5. Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite géométrique telle que $U_0 = 2$, $U_1 = 16$ et $U_2 = 128$. Déterminer la raison q de cette suite.

Corrigé. Méthode 1 : La formule d'une suite géométrique est $U_{n+1} = qU_n$ (formule par récurrence) ou alors $U_n = U_0q^n$ (formule fonction de n). On en déduit que

$$U_1 = qU_0 \quad \Leftrightarrow \quad 16 = 2q \quad \Leftrightarrow \quad q = 8$$

On peut vérifier avec $U_2 = qU_1 = 8\times 16 = 128$.

Méthode 2 : La formule d'une suite géométrique est $U_n = U_0q^n$ (formule fonction de n). On a donc

$$U_1 = U_0q \quad \Leftrightarrow \quad 16 = 2q \quad \Leftrightarrow \quad q = 8$$

On peut vérifier avec $U_2 = U_0q^2 = 2\times 8^2 = 2\times 64 = 128$.

Q6. On considère la fonction f suivante :

$$f(x) = \frac{3x^2+4x-1}{5x^2+8}$$

Calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

Corrigé. En 0, il suffit de remplacer x par 0.

$$f(0) = \frac{-1}{8}$$

En $+\infty$, on factorise par le terme dominant :

$$f(x) = \frac{3x^2\left(1+\frac{4}{3x}-\frac{1}{3x^2}\right)}{5x^2\left(1+\frac{8}{5x^2}\right)} = \frac{3\left(1+\frac{4}{3x}-\frac{1}{3x^2}\right)}{5\left(1+\frac{8}{5x^2}\right)}$$

On a $\lim_{+\infty}\frac{4}{3x} = 0$, $\lim_{+\infty}\frac{4}{3x} = 0$, $\lim_{+\infty}\frac{1}{3x^2} = 0$, $\lim_{+\infty}\frac{8}{5x^2} = 0$. On a donc

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{3}{5}.$$

Q7. Calculer la dérivée de la fonction f définie par

$$f(x) = x^4 + \frac{1}{x}$$

Corrigé. On rappelle que la dérivée de x^n est nx^{n-1}, ce qui est valable aussi pour les n négatifs, et donc aussi pour $\frac{1}{x} = x^{-1}$*.

$$f'(x) = 4x^3 + (-1)x^{-2} = 4x^3 - \frac{1}{x^2}$$

Q8. Déterminer le domaine de définition de la fonction f suivante :

$$f(x) = \ln\left(\frac{x-3}{5-x}\right)$$

Corrigé. On sait que $\ln y$ est défini quand $y > 0$, on doit donc étudier le signe de $\frac{x-3}{5-x}$. On fait un tableau de signe.

x		3		5	
$x-3$	$-$	0	$+$		$+$
$5-x$	$+$		$+$		$-$
y	$-$	0	$+$	0	$-$

Le domaine de définition est $D_f =]3,5[$.

Q9. Déterminer le module r et une mesure de l'argument θ du complexe $z = -2+2i$.

Corrigé. On a

$$r = \|z\| = \sqrt{(-2)^2+2^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

On en déduit que

$$\cos\theta = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin\theta = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Donc $\theta = \frac{3\pi}{4}$.

Q10. Déterminer les primitives de la fonction f définie pour $x > 0$ par

$$f(x) = \frac{4x+2}{x^2+x}$$

Corrigé. On cherche à faire apparaitre la forme $\frac{u'}{u}$ qui a pour primitive $\ln u$ (car $u > 0$).

$$f(x) = 2\frac{2x+1}{x^2+x}, \quad F(x) = 2\ln(x^2+x) + C$$

Avec C une constante. Une autre manière d'écrire F est $F(x) = \ln\left((x^2+x)^2\right) + C$.

Q11. Déterminer le domaine de définition de la fonction $f(x) = \sqrt{x^2-4}$.

Corrigé. $\sqrt{y}$ est définie quand $y \leqslant 0$, on doit donc étudier le signe de $y = x^2 - 4$. C'est un polynôme qui a pour racine 2 et -2, il est du signe de $a = 1$ à l'extérieur des racines.

x		-2		2	
x^2-4	$+$	0	$-$	0	$+$

Donc le domaine de définition est

$$D_f =]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$$

Q12. Soit (u_n) la suite arithmétique telle que $u_3 = 10$ et $U_8 = 0$. Déterminer le terme initial U_0 et la raison r de cette suite.

Corrigé. Méthode 1. On sait que $u_n = u_0 + nr$, on a donc

$$\left\{\begin{array}{rcl} 10 &=& u_0 + 3r \\ 0 &=& u_0 + 8r, L_1 - L_2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 10 &=& u_0 + 3r \\ 10 &=& -5r \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{ll} u_0 & = 10 \quad -3r \\ r & = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} u_0 & = 10 + 6 \quad = 16 \\ r & = -2 \end{array}\right.$$

Q13. Soient les vecteurs

$$\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix}-1\\2\\-2\end{pmatrix}$$

Déterminer la valeur du produit vectoriel $\vec{a} \wedge \vec{b}$.

Corrigé.

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{pmatrix}3\times(-2) - 0\times 2\\ 0\times 1 - 1\times(-2)\\ 1\times 2 - 3\times(-1)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6\\2\\5\end{pmatrix}$$

Q14. On considère le cercle C d'équation $(x+2)^2 + (y+5)^2 = 9$. Donner le centre et le rayon du cercle.

Corrigé. On a

$$(x+2)^2 + (y+5)^2 = 9 \Leftrightarrow \sqrt{(x-(-2))^2 + (y-(-5))^2} = 3$$

Donc le centre du cercle est $(-2, -5)$ et son rayon est 3.

Q15. Calculer le produit AB des deux matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix}3 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Corrigé.

$$AB = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\times 3 + 0\times 0 & 1\times 2 + 0\times 1\\ 2\times 3 + 3\times 0 & 2\times 2 + 3\times 1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}3 & 2\\ 6 & 7\end{pmatrix}$$

Q16. On jette un dé deux fois de suite et on note les valeurs obtenues sur les faces supérieures. Quelle est la probabilité d'obtenir un 2 puis un 5 ?

Corrigé. La probabilité d'obtenir un 2 au premier tirage est $\frac{1}{6}$. La probabilité d'obtenir un 5 au premier tirage est $\frac{1}{6}$. Les tirages sont indépendants, donc la probabilités est $\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$

Q17. Soit l'équation (E) : $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$. Combien cette équation a-t-elle de solutions réelles distinctes ?

Corrigé. On regarde les diviseurs de -2, à savoir 1, -1, 2 et -2, qu'on reporte dans l'équation.

$$1 + 2 - 1 - 2 = 0; \quad -1 + 2 + 1 - 2 = 0$$

$$8 + 8 - 2 - 2 = 12; \quad -8 + 8 + 2 - 2 = 0$$

Donc 1, -1 et -2 sont racines du polynôme. Il est de degré trois donc il n'y a pas d'autres racines. Il y a donc trois solutions réelles distinctes.

Q18. Soient les vecteurs

$$\vec{u} = \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix}11\\-1\end{pmatrix}$$

Déterminer le vecteur $\vec{w}$ tel que $3\vec{w} - 2\vec{u} = \vec{v}$.

Corrigé.

$$3\vec{w} - 2\vec{u} = \vec{v} \quad \Leftrightarrow \vec{w} = \frac{1}{3}(\vec{v} + 2\vec{u})$$

$$\vec{w} = \frac{1}{3}\left(\begin{pmatrix}11\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{3}\left(\begin{pmatrix}15\\-3\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix}$$

Q19. Déterminer le produit scalaire $\vec{u}\cdot\vec{v}$ des vecteurs suivants :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix}3\\-1\\4\end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix}2\\5\\-1\end{pmatrix}$$

Corrigé.

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = 3\times 2 + (-1)\times 5 + 4\times(-1) = 6 - 5 - 4 = -3$$

Q20. Déterminer l'équation de la droite D passant par les points $A(1;12)$ et $B(3;22)$.

Corrigé. Soit $M(x;y) \in D$, alors les vecteurs $\overrightarrow{AM}(x-1; y-12)$ et $\overrightarrow{AB}(2;10)$ sont colinéaires. Donc leur déterminant est nul :

$$0 = \begin{vmatrix}x-1 & 2\\ y-12 & 10\end{vmatrix} = 10(x-1) - 2(y-12) = 10x - 2y + 14$$

On divise par 2 et on obtient $5x - y + 7 = 0$ ou encore $y = 5x + 7$.

Q21. Soit l'équation différentielle (E) : $y'(x) = -2y(x) + 10x + 19$ et les fonction $f_1(x) = 5x + 7$, $f_2(x) = 10x + 19$. Est-ce que f_1 ou f_2 sont des solutions de (E) ? Déterminer la solution générale de (E).

Corrigé. On reporte f_1 dans (E) et on a

$$5 = -2(5x+7) + 10x + 19 \Leftrightarrow 5 = -10x - 14 + 10x + 19 = 5$$

Donc f_1 est solution de (E). C'est une solution particulière.

On reporte f_2 dans (E) et on a

$$10 = -2(10x+19) + 10x + 19$$

$$\Leftrightarrow 10 = -20x - 38 + 10x + 19 = -10x - 19$$

Donc f_2 n'est pas solution de (E).

L'équation homogène associée à (E) est $y' + 2y = 0$, donc les solutions homogènes sont $y_h(x) = Ke^{-2x}$ avec K une constante.

Finalement, la solution générale de (E) est

$$y(x) = Ke^{-2x} + 5x + 7$$

Q22. Simplifier l'expression $\cos(3x) + 3\cos(x)$

Corrigé. Avec la formule de Moivre, on a

$$\cos(3x) + i\sin(3x)\,(\cos x + i\sin x)^3$$

$$= \cos^3 x + 3i\cos^2 x \sin x - 3\cos x \sin^2 x - i\sin^3 x$$

On ne garde que la partie réelle, qu'on simplifie avec $\sin^2 = 1 - \cos^2$

$$\cos(3x) = \cos^3 x - 3\cos x\sin^2 x = \cos^3 x - 3\cos x(1-\cos^2 x)$$

$$= 4\cos^3 x - 3\cos x$$

Donc

$$\cos(3x) + 3\cos(x) = 4\cos^3 x$$

Q23. Calculer la limite de la suite $u_n = \frac{1}{n} + \left(\frac{1}{3}\right)^n$ définie pour $n \in \mathbb{N}^\star$.

Corrigé. On a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0, \quad \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$$

donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Q24. Un tireur tire trois fois de suite sur une cible. A chaque tir, la probabilité qu'il touche la cible est égale à 0,7. La variable aléatoire X désigne le nombre de fois où le tireur a atteint sa cible. Calculer l'espérance et la variance de X.

Corrigé. X suit une loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = 0,7$. Donc

$$E(x) = np = 3 \times 0,7 = 2,1$$

$$Var(X) = np(1-p) = 3 \times 0,7 \times 0,3 = 0,63$$

Q25. Soient les points $A(0,0,1)$, $B(1,0,0)$ et $C(0,1,0)$ et P le plan passant par ces trois points. Parmi les équations suivantes, quelle est l'équation de P ?

$$(E_1) : 2x - z + 1 = 0, \quad (E_2) : x + 2y - 2z = 2$$

$$(E_3) : x + y + z - 1 = 0, \quad (E_4) : x + y + z = 3$$

Corrigé. P contient les trois points, donc les trois points doivent vérifier l'équation de P.

Pour (E_1), A marche, mais pas B. Pour (E_2), A ne marche pas. Pour (E_3), les points A, B et C marchent, donc c'est l'équation de P. Pour (E_4), A ne marche pas.

Q26. Calculer la primitive de la fonction $f(x) = x\cos(2x)$.

Corrigé. On calcule $F(x) = \int x\cos(2x)dx$ par une intégration par partie. On pose $u = x$, donc $u' = 1$ et $v' = \cos(2x)$ donc $v = \frac{\sin(2x)}{2}$.

$$F(x) = \int x\cos(2x)dx = \left[x\frac{\sin(2x)}{2}\right] - \int \frac{\sin(2x)}{2}dx$$

$$= \left[\frac{x\sin(2x)}{2}\right] - \left[\frac{-\cos(2x)}{4}\right] = \frac{x\sin(2x)}{2} + \frac{\cos(2x)}{4} + C$$

avec C une constante.

Q27. On considère le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} x & +y & +z & = 3 \\ x & +2y & +3z & = 6 \\ & y & +2z & = 3 \end{cases}$$

Déterminer le nombre de solutions de S.

Corrigé. On prend x en pivot dans L_1 et on fait $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et on a

$$\begin{cases} x & +y & +z & = 3 \\ & y & +2z & = 3 \\ & y & +2z & = 3 \end{cases}$$

On prend y en pivot dans L_2 et on fait $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$. On obtient

$$\begin{cases} x & +y & +z & = 3 \\ & y & +2z & = 3 \\ & & 0 & = 0 \end{cases}$$

Donc z est une variable auxiliaire, donc il y a une infinité de solutions.

Q28. Déterminer S l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $\cos x = \frac{1}{2}$.

Corrigé. On sait que $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ donc les solutions sont

$$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \text{ ou } x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

avec k un entier. Donc

$$S = \left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi; -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Q29. Calculer la dérivée de la fonction $f(x) = \cos(3x^2 + 1)$.

Corrigé. On a une forme $\cos u$ donc dérivée $u' \times (-\sin u)$.

$$f'(x) = -6x\sin(3x^2 + 1)$$

Q30. On considère l'intégrale

$$I = \int_1^2 \frac{dt}{2t - 1}$$

Appliquer le changement de variable $u = 2t - 1$ à I.

Corrigé. On a $du = 2dt$ donc $dt = \frac{1}{2}du$. La borne $t = 1$ devient $u = 1$ et la borne $t = 2$ devient $u = 3$. Donc

$$I = \int_1^3 \frac{\frac{1}{2}du}{u} = \int_1^3 \frac{du}{2u}$$

Q31. Calculer l'inverse de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Corrigé. Par le pivot de Gauss.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En prenant 1 comme premier Pivot, on fait $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

On prend -1 comme pivot et on fait $L_1 \leftarrow L_1 + 2L_1$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

On multiplie L_2 par -1 et on échange les deux lignes. On en déduit que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Q32. Calculer le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 9 & 3 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & -4 & -1 \end{vmatrix}$$

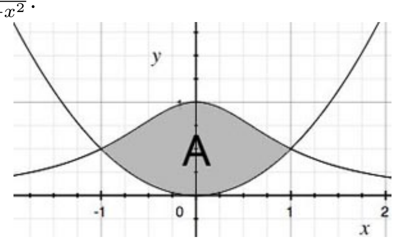
Corrigé. On simplifie en faisant $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 9 & 3 \\ 1 & -4 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

On développe selon la dernière ligne :

$$\Delta = -2 \begin{vmatrix} 9 & 3 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} = -2(-9+12) = -6$$

Q33. Déterminer l'aire A de la région suivante, délimitée par les courbes d'équations $y = \frac{x^2}{2}$ et $y = \frac{1}{1+x^2}$.



Corrigé. On remarque que les deux fonctions sont paires (symétrique par rapport à 0), donc l'aire A est

$$A = 2\int_0^a \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{x^2}{2}\right) dx$$

où a est l'abscisse du point d'intersection des deux courbes sur $[0, +\infty[$

On cherche la valeur des points d'intersection de deux courbes, c'est à dire qu'on résout

$$\frac{x^2}{2} = \frac{1}{1+x^2} \quad \Leftrightarrow (1+x^2)x^2 = 2$$

On développe et on pose $X = x^2$. On obtient

$$X^2 + X - 2 = 0 \quad \Delta = 9, X_1 = 1, X_2 = -2$$

Comme $X = x^2$ est positif, on ne garde que X_1. Donc

$$x^2 = 1 \quad \Leftrightarrow x_1 = 1, x_2 = -1$$

Finalement

$$A = 2\int_0^1 \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{x^2}{2}\right) dx = 2\left[\arctan(x) - \frac{x^3}{6}\right]_0^1$$

$$= 2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{6} - 0\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}$$

Q34. Soit l'échantillon composé des quatre valeurs : 3, 5, 8 et 12. Calculer sa moyenne et son écart-type.

Corrigé. On a

$$m = \frac{3+5+8+12}{4} = 7$$

$$Var = \frac{3^2+5^2+8^2+12^2}{4} - 7^2 = \frac{242}{4} - 49 = 11,5$$

$$\sigma = \sqrt{11,5}$$

Q35. Donner l'ensemble S des solutions de l'inéquation $x - 5 \geqslant \frac{14}{x}$.

Corrigé. On remarque que cette inéquation est définie pour $x \neq 0$. Pour pouvoir multiplier par x l'inégalité, il faut tenir compte de son signe. On fait donc deux cas.

1. Si $x > 0$, on a

$$x(x-5) \geqslant 14 \Leftrightarrow x^2 - 5x - 14 \geqslant 0$$

Le polynôme a pour discriminant $\Delta = 81$, et pour racines $x_1 = 7$, et $x_2 = -2$, son signe est

x		-2		7	
$x^2-5x-14$	$+$	0	$-$	0	$+$

Comme on a de plus $x > 0$, les solutions sont $S_1 = [7, +\infty[$.

2. Si $x < 0$, on a changement du sens de l'inégalité.

$$x(x-5) \leqslant 14 \Leftrightarrow x^2 - 5x - 14 \leqslant 0$$

D'après le tableau de signe différent et sachant que $x < 0$, les solutions sont $S_2 = [-2, 0[$.

Finalement

$$S = [-2, 0[\cup[7, +\infty[$$

Q36. Soit C la courbe représentative de la fonction

$$y = f(x) = \frac{3x+8}{x+2}$$

dans un repère xOy. On définit un nouveau repère $X\Omega Y$ où $\Omega(-3, 2)$, ΩX parallèle à Ox et ΩY parallèle à Oy. Donner $Y = g(X)$ l'expression de C dans ce nouveau repère.

Corrigé. Soit M un point du plan, de coordonnées (x, y) dans xOY et (X, Y) dans $X\Omega Y$. On note $\vec{i}$ et $\vec{j}$ les vecteurs unitaires directeurs des axes des repères (ce sont les mêmes vecteurs dans les deux repères par parralélisme). On a

$$\overrightarrow{O\Omega} = -3\vec{i} + 2\vec{j}, \quad \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}, \quad \overrightarrow{\Omega M} = X\vec{i} + Y\vec{j}$$

Par Chasles, on a

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O\Omega} + \overrightarrow{\Omega M} = (X-3)\vec{i} + (Y+2)\vec{j}$$

Donc les équations de changement de coordonnées sont $x = X - 3$ et $y = Y + 2$, qu'on reporte dans f :

$$Y + 2 = \frac{3(X-3)+8}{(X-3)+2} = \frac{3X-1}{X-1}$$

$$Y = \frac{3X-1}{X-1} - 2 = \frac{3X-1-2(X-1)}{X-1} = \frac{X+1}{X-1}$$

Donc

$$g(X) = \frac{X+1}{X-1}$$

Q37. Donner la solution générale de l'équation différentielle

$$(E) : y"(x) + 3y'(x) - 10y(x) = -40x + 82$$

Indication : $f(x) = 4x - 7$.

Corrigé. L'équation caractéristiques est $r^2 + 3r - 10$, avec $\Delta = 49$, $r_1 = 2$, $r_2 = -5$ donc les solutions homogènes sont

$$y_h(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-5x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

On reporte $f(x)$ dans l'équation et on obtient

$$0 + 3 \times 4 - 10(4x - 7) = 12 - 40x + 70 = -40x + 82$$

Donc f est une solution particulière de l'équation. Donc les solutions de (E) sont

$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-5x} + 4x - 7, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Q38. Soit la fonction

$$f(x, y) = x e^{xy^2}$$

Calculer $g(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial y}$

Corrigé. On a

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{xy^2} + x \times y^2 e^{xy^2} = (1 + xy^2) e^{xy^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x \times 2xy e^{xy^2} = 2x^2 y e^{xy^2}$$

Donc

$$g(x, y) = (1+xy^2) e^{xy^2} \times 2x^2 y e^{xy^2} = (2x^2 y + 2x^3 y^3) e^{2xy^2}$$

Q39. Donner la différentielle df de la fonction $f(x, y) = \ln(1 + x^2 y^4)$

Corrigé. On a

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2xy^4}{1 + x^2 y^4}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{4x^2 y^3}{1 + x^2 y^4}$$

Donc

$$df = \frac{2xy^4}{1 + x^2 y^4} dx + \frac{4x^2 y^3}{1 + x^2 y^4} dy = \frac{2xy^4 dx + 4x^2 y^3 dy}{1 + x^2 y^4}$$

Q40. Quelle est la nature géométrique de l'ensemble E des points M du plan complexe dont l'affixe z vérifie $z + 2\bar{z} = 1$?

Corrigé. On pose $z = a + ib$ et on remplace dans l'équation

$$a + ib + 2(a - ib) = 1 \quad \Leftrightarrow 3a - ib = 1$$

$$\begin{cases} 3a & = 1 \\ b & = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow z = \frac{1}{3} + i0 \Leftrightarrow M\left(\frac{1}{3}, 0\right)$$

Donc E est un point.