Q1. Soit le système d'équation (S) :

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} 3x & - & y & = & 4 \\ -9x & + & 3y & = & 12 \end{array}\right.$$

Donner le nombre de solution du système.

Corrigé. On commence un pivot de gauss en faisant $L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1$, et on obtient $0 = 24$, donc il n'y a pas de solutions.

Q2. Soit l'échantillon composé des cinq valeurs : 1, 2, 4, 7 et 11. Calculer la moyenne de l'échantillon.

Corrigé. La moyenne est

$$m = \frac{1+2+4+7+11}{5} = \frac{25}{5} = 5$$

Q3. Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r. On donne $u_1 = 2$ et $u_5 = 14$. Déterminer la raison r.

Corrigé. La formule d'une suite arithmétique est $u_n = u_0 + nr$. On a donc $2 = u_1 = u_0 + r$ et $14 = u_5 = u_0 + 5r$, on soustrait les deux et on a $u_5 - u_1 = 12 = 4r$ donc $r = 3$.

Q4. Soit la fonction

$$f(x) = \frac{8x^3 + x^2 + 7}{4x^3 + x}$$

Donner les limites de f en 0, 1, $+\infty$ et $-\infty$.

Corrigé. Pour $x \to 0$, le dénominateur est nul et le numérateur vaut 7, donc $\lim_0 f = \infty$. En tenant compte du signe du dénominateur au voisinage de 0, on a $\lim_{0^-} f = -\infty$ et $\lim_{0^+} f = +\infty$.

Pour $x \to 1$, on a $f(1) = \frac{16}{5}$.

Pour $x \to -\infty$ et $+\infty$, on fait les termes dominants $f(x) \sim \frac{8x^3}{4x^3} = 2$.

Q5. On considère la fonction f suivante : $f(x) = \sqrt{3x-7}$. Donner le domaine de définition de f.

Corrigé. La racine est définie si $3x - 7 \geqslant 0$, c'est-à-dire si $x \geqslant \frac{7}{3}$.

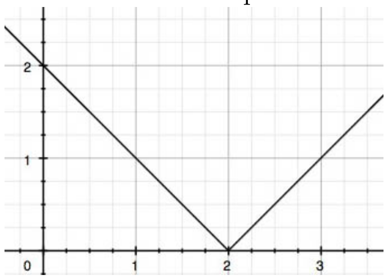
Q6. Soit le polynôme $P(x) = (9x+6)(x+2)+9x^2-4$. Parmi les expressions suivantes, quelle est la forme factorisée de $P(x)$: $2(3x+2)^2$, $18x^2+24x+8$, $2(3x+2)(3x+4)$, $2(3x+2)(3x+4)$?

Corrigé. $18x^2 + 24x + 8$ est la forme développée. En développant la première, on obtient bien

$$2(3x+2)^2 = 2(9x^2+12x+4) = 18x^2 + 24x + 8P$$

.

Q7. La figure suivante montre la courbe représentative



d'une fonction f : A quelle fonction correspond f : $|x-2|$, $\left\{\begin{array}{lll} x-2, & \text{si} & x \geqslant 2 \\ -x-2, & \text{si} & x < 2 \end{array}\right.$, $-x+2$ ou $\frac{1}{2}(x-2)^2$.

Corrigé. On reconnait la courbe de la valeur absolue, décalée de 2 vers la droite. Donc $f(x) = |x-2|$.

Q8. On considère l'équation différentielle (E) suivante : $y'(x) = -\frac{2}{x}y(x)$ avec $x > 0$. Donner la solution générale de (E).

Corrigé. C'est une équation homogène $y' + \frac{2}{x}y = 0$. Une primitive de $\frac{2}{x}$ est $2\ln x$ donc la solution est $y(x) = \lambda e^{-2\ln x} = \frac{\lambda}{(e^{\ln x})^2} = \frac{\lambda}{x^2}$ avec λ une constante.

Q9. Donner l'expression de $\cos^2 x$ en fonction de $\cos(2x)$ et/ou $\sin(2x)$.

Corrigé. On utilise la formule $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x - (1-\cos^2 x) = 2\cos^2 x - 1$, ce qui donne $2\cos^2 x = \cos(2x) + 1$ donc $\cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}$.

Q10. On considère l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et les vecteurs suivants : $\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$ et $\vec{v} = 5\vec{i} - \vec{k}$. Calculer $\vec{w}$ le produit vectoriel de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et exprimer ce vecteur comme une combinaison linéaire sur la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

Corrigé.

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 22 \\ 15 \end{pmatrix} = 3\vec{i} + 22\vec{j} + 15\vec{k}$$

Q11. On considère l'équation $\cos(2x) = \frac{1}{2}$. Déterminer S l'ensemble des solutions de cette équation sur l'intervalle $[0, \pi]$.

Corrigé. $\cos(2x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $2x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$. Donc $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$. La première solution avec $k = 0$ donne $x = \frac{\pi}{6}$, la deuxième solution avec $k = 1$ donne $x = \frac{5\pi}{6}$.

Q12. On considère la fonction $f(x) = -\frac{x}{2} + 1 + 2\ln x$ définie et dérivable sur $]0, +\infty[$. Calculer $f'(x)$.

Corrigé. $f'(x) = -\frac{1}{2} + \frac{2}{x} = -\frac{-x+4}{2x}$

Q13. On considère la fonction suivante $F(x) = \int \frac{2x+1}{x^2+1}dx$. Déterminer F.

Corrigé.

$$\frac{2x+1}{x^2+1} = \frac{2x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1} = \frac{u'}{u} + \frac{1}{x^2+1}$$

donc la primitive est $F(x) = \ln(x^2+1) + \arctan x + c$.

Q14. Le plan P étant rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points $A(1,2)$, $B(2,3)$ et $C(-3;-2)$. Que vaut le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$?

Corrigé. On a $\overrightarrow{AB} = (1,1)$ et $\overrightarrow{AC} = (-4,-4)$ donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -4 - 4 = -8$

Q15. On considère la fonction F suivante $F(x) = \int \frac{5x-7}{(x-1)(x-2)}dx$. Déterminer F.

Corrigé. On décompose la fraction rationnelle :

$$\frac{5x-7}{(x-1)(x-2)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2} = \frac{ax-2a+bx-b}{(x-1)(x-2)}$$

donc $a+b=5$ et $-2a-b=-7$. On additionne les deux et on a $-a=-2$ donc $a=2$. On en déduit $b=3$. Donc $\frac{5x-7}{(x-1)(x-2)} = \frac{2}{x-1} + \frac{3}{x-2}$ qui a pour primitive $F(x) = 2\ln|x-1| + 3\ln|x-2| + c$.

Q16. Soit l'équation (E) : $x^3 - 8x^2 + 17x - 10 = 0$. Combien cette équation a-t-elle de solution réelle ?

Corrigé. On remarque que 1 est solution évidente. On fait la division euclidienne par $x-1$ et on obtient $x^3 - 8x^2 + 17x - 10 = (x-1)(x^2 - 7x + 10)$ On a $\Delta = 9$ donc deux solutions supplémentaires $x=5$ et $x=2$. Il y a trois solutions.

Q17. On considère (U_n) une suite géométrique dont le premier terme est $U_1 = 3$. Si on donne $U_4 = 24$, quelle est la valeur de U_6 ?

Corrigé. On a $U_n = U_0 q^n$ avec q la raison. Donc $3 = U_1 = U_0 q$ et $24 = U_4 = U_0 q^4$. On fait le quotient $\frac{24}{3} = q^3$ donc $q^3 = 8$ donc $q = 2$. On reporte dans U_1 et on trouve $U_0 = \frac{3}{2}$. Donc $U_6 = \frac{3}{2}2^6 = 3 \times 2^5 = 3 \times 32 = 96$

Q18. Soit le nombre complexe défini par $z = \sqrt{3} - i$. Donner l'argument de z.

Corrigé. On a $|z| = \sqrt{3+1} = 2$ donc $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta = -\frac{1}{2}$, donc $\theta = -\frac{\pi}{6}$.

Q19. On considère trois points $A(4;2)$, $B(3,0)$ et G. Le point G vérifie la relation $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{GA}$. Quelles sont les coordonées du point G ?

Corrigé. On simplifie la relation vectorielle avec Chasles $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{GA}$, ce qui signifie que G est le milieu de $[AB]$, donc ses coordonnées sont $\left(\frac{4+3}{2}; \frac{2+0}{2}\right) = \left(\frac{7}{2}; 1\right)$.

Q20. On considère le cercle C qui a pour équation $x^2 + y^2 - 2x = 8$. Donner le rayon du cercle.

Corrigé. l'équation devient $(x-1)^2 - 1 + y^2 = 8$, donc $(x-1)^2 + y^2 = 9 = 3^2$. Donc le rayon est 3.

Q21. Calculer $I = \int_0^1 x e^x dx$.

Corrigé. Intégration par partie $I = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e^1 - 0 - [e^x]_0^1 = e - (e-1) = 1$

Q22. On considère la fonction f suivante : $f(x,y) = 2ye^x(y+1)$. Calculer $\frac{\partial f}{\partial y}$ la dérivée partielle de f par rapport à y.

Corrigé. On a $f(x,y) = 2e^x(y^2+y)$ donc $\frac{\partial f}{\partial y} = 2e^x(2y+1)$.

Q23. Soit le plan xOy et le point A de coordonnées $(1, \sqrt{3}$ dans le repère cartésien (repère R_1). En posant $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$, exprimer les coordonnées (r,θ) du point A dans le système de coordonnées polaires (repère R_2).

Corrigé. On a $r^2 = x^2 + y^2 = 1 + 3 = 4$ donc $r = 2$, puis $\cos\theta = \frac{1}{2}$ et $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $\theta = \frac{\pi}{3}$. Les coordonnées de A dans R_2 sont $(2, \frac{\pi}{3})$

Q24. On considère les nombres complexes $z_1 = 3+2i$ et $z_2 = 4-i$, et $Z = z_1 * z_2$. Exprimer Z sous forme algébrique.

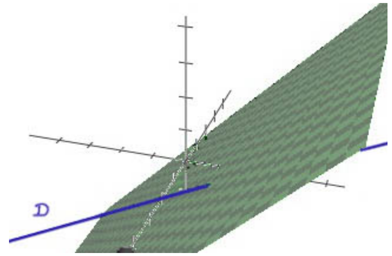
Corrigé. $Z = (3+2i)(4-i) = 12 - 3i + 8i + 2 = 14 + 5i$

Q25. Soient les points $A(1,5)$ et $B(2,7)$, et D la droite passant par A et B. Quelle est l'équation de D parmi els expression suivante : $x+y-6=0$, $2x-y+3=0$, $5x-y-3=0$ ou $y=2x$?

Corrigé. On reporte les coordonnées des point dans les équations. Seule $2x-y+3=0$ marche pour les deux points.

Q26. L'espace E est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, formé des axes Ox, Oy, Oz. Soit P le plan parallèle à Ox et passant par les points $A(0,2,1)$ et $B(0,1,0)$. Soit D la droite du plan xOy d'équation $y = 2-x$. Déterminer l'intersection de P et D.

Corrigé. Sur un dessin, on voit que P et D se



coupent.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}(0,-1,-1)$ et $\vec{i}(1,0,0)$ sont deux vecteurs du plan P, donc un vecteur normal est $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \vec{i} = (0,-1,1)$. Un point $M(x,y,z)$ appartient au plan P ssi $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$, donc $-(y-2) + (z-1) = 0$ donc $-y+z+1 = 0$. La droite D admet pour système d'équation $\{z=0, y=2-x\}$. On regarde donc le système d'équation

$$\left\{\begin{array}{rcl} -y+z & = & -1 \\ z & = & 0 \\ x+y & = & 2 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{rcl} y & = & 1 \\ z & = & 0 \\ x & = & 1 \end{array}\right.$$

Q27. Résoudre l'équation différentielle suivante : $y"(x) + 9y(x) = 0$ avec $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Corrigé. L'équation caractéristique est $r^2 + 9 = 0$ donc deux racines complexes $r = \pm 3i$, donc $y = a\cos 3x + b\sin 3x$. En vérifiant les conditions initiales, on a $y(0) = a = 1$ et $y'(0) = 3b = 0$. Donc la fonction $y = \cos 3x$ est solution de cette équation.

Q28. On considère la fonction f définie par $f(x,y) = xy(x+1) + 2$. Donner df sa différentielle.

Corrigé. On a $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$. Comme $f(x,y) = y(x^2+x) + 2$, on a $\frac{\partial f}{\partial x} = y(2x+1)$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = (x^2+x) = x(x+1)$

Q29. On considère la fonction F suivante $F(x) = \int \frac{3}{x^2}\sqrt{\frac{1+2x}{x}}dx$. Utiliser une des suggestions suivante pour calculer F :

1. $F(x)$ se calcule à l'aide d'une intégration par parties.
2. $F(x) = \frac{3}{x}\sqrt{\frac{1}{x} + 2} + c$
3. $F(x)$ se calcule à l'aide du changement de variable $u(x) = \frac{1}{x} + 2$

4. $F(x)$ se calcule à l'aide du changement de variable $u(x) = \sqrt{|x|}$

Corrigé. L'IPP est peut probable car la racine ne "disparaitra" jamais, et la fraction non plus. Le 2) donne l'impression d'oublier de primitiver la racine. Le 4) est peu probable à cause de la valeur absolue. Essayons le 3) $u(x) = \frac{1}{x} + 2$ donc $du = -\frac{1}{x^2}dx$ donc

$$F(x) = \int \frac{3}{x^2}\sqrt{\frac{1+2x}{x}}dx = \int -3\sqrt{u}dx = [-2u^{\frac{3}{2}}]$$
$$= -2\left(\frac{1}{x}+2\right)^{\frac{3}{2}}$$

Q30. Soit le polynôme $P(z) = (1+i)z^2+(3+3i)z+4-2i$. Parmi ces quatre affirmations, laquelle est vraie ?

1. Les racines de ce polynôme sont conjuguées
2. Les racines sont $-i$ et $3+i$
3. Le produit des racines est $4-2i$
4. La somme des racines est égale à -3

Corrigé. Si on note z_1, z_2 les racines, alors P se factorise en $(1+i)(z-z_1)(z-z_2) = (1+i)z^2 - (1+i)(z_1+z_2)z + (1+i)z_1z_2$. Le produit des racines est donc $\frac{4-2i}{1+i}$ et la somme est donc $-\frac{3+3i}{1+i} = -3$

Q31. Soit A la matrice $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 6 \\ 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$. Calculer le déterminant de A.

Corrigé. Dvlpt première ligne : $det = 5\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} + 6\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = 20 + 12 = 32$

Q32. Soit l'inéquation (E) : $\frac{x^2-9}{x+1} \leqslant 0$. Quel est l'ensemble des solutions de (E) ?

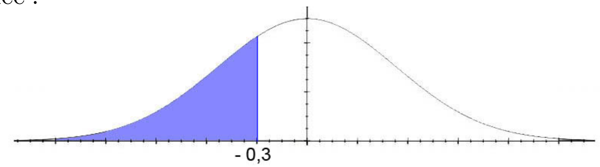
Corrigé.

x		-3		-1		3	
x^2-9	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$x+1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
E	$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$

donc $S =]-\infty; -3] \cup]-1; 3]$

Q33. Soit la variable aléatoire x de loi normale centrée réduite. La courbe ci-dessous représente la densité de probabilité de x.

Quelle probabilité représente l'aire de la surface coloriée ?



Corrigé. L'aire est $P(X \leqslant -0,3) = 1 - P(X \leqslant 0,3) = P(X \geqslant 0,3)$

Q34. Soient f et g deux fonctions continues et positives telles que $f(x) > g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On notera A l'aire comprise entre les courbes de f et g sur l'intervalle $[a, b]$. Par quelle formule calculer A ?

Corrigé. Comme f est au-dessus de g, on a $A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$.

Q35. Soit le point $A(1, -1, 2)$ et la droite D ayant pour représentation paramétrique

$$\begin{cases} x &= t+1 \\ y &= t+3 \\ z &= -t+4 \end{cases}$$

On note P le plan contenant la droite D et le point A. Donner un vecteur normal à ce plan.

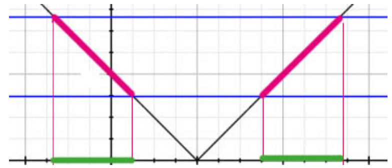
Corrigé. Le point $B(1, 3, 4)$ et le vecteur $\vec{u}(1, 1, -1)$ appartiennent à la droite, donc $\overrightarrow{AB}(0, 4, 2)$ et $\vec{u}$ sont directeur du plan. Donc les vecteurs normaux au plan sont colinéaires à $\overrightarrow{AB} \wedge \vec{u} = (-6, 2, -4)$. Donc $\vec{n} = (3; -1; 2)$.

Q36. Soit f une fonction strictement croissante sur $[1, +\infty[$. On définit la fonction g par $g(x) = e^{-f(x)}$. Que peut-on dire sur le sens de variation de g ?

Corrigé. Pour tout $x \leqslant y$, par croissance de f, on a $f(x) < f(y)$. Donc $-f(x) > -f(y)$. Par croissance de l'exponentielle, $e^{-f(x)} > e^{-f(y)}$ donc $g(x) > g(y)$. Donc g est strictement décroissante.

Q37. Soit la fonction f définie par $f(x) = |x-1|$. Résoudre l'inéquation $3 \leqslant f(x) \leqslant 9$.

Corrigé. Graphiquement, les solutions sont deux intervalles bornés et fermés disjoints. On résout $|x-1| = 3$ donc $x - 1 = 3$ ou $x - 1 = -3$ donc $x = 4$ ou $x = -2$. Pour $|x-1| = 9$ donc $x-1 = 9$ ou $x-1 = -9$ donc $x = 10$ ou $x = -8$. Donc $S = [-8; -2] \cup [4, 10]$



Q38. Soient les matrices A et B suivantes ; que vaut le produit $P = A \times B$?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Corrigé. $P = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 13 \\ 1 & 15 & 15 \\ 1 & 9 & 4 \end{pmatrix}$

Q39. On considère l'échantillon composé des trois valeurs suivantes : 1,5 et 9. Calculer l'écart-type de cet échantillon.

Corrigé. La moyenne est $\frac{1+9+5}{3} = 5$ donc la variance $\frac{(1-5)^2+(5-5)^2+(9-5)^2}{3} = \frac{2\times16}{3}$, donc l'écart-type $\sqrt{\frac{2\times16}{3}} = 4\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Q40. Soit la fonction définie par $f(x) = x^2\sqrt{1+x^2}$. Calculer f'.

Corrigé.

$$f'(x) = 2x\sqrt{1+x^2} + x^2\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} = \frac{2x(1+x^2)+x^3}{\sqrt{1+x^2}}$$
$$= \frac{3x^3+2x}{\sqrt{1+x^2}}$$