
Exercice 1. Soit $z = \sqrt{3} + i$ et $z' = 6 - 2\sqrt{3}i$. Ecrire zz' et $\frac{z}{z'}$ sous forme algébrique, puis exponentielle.

Corrigé.

$$zz' = (\sqrt{3} + i)(6 - 2\sqrt{3}i) = 8\sqrt{3}; \qquad zz' = 8\sqrt{3}e^{i0}$$

$$\frac{z}{z'} = \frac{(\sqrt{3} + i)(6 + 3\sqrt{3}i)}{36 + 12} = \frac{4\sqrt{3} + 12i}{48} = \frac{\sqrt{3} + 3i}{12}; \qquad \frac{z}{z'} = \frac{\sqrt{3}}{6}e^{i\pi/3}$$

Exercice 2. Calculer le module et l'argument de $-i$ et de $\frac{3}{1-i}$.

Corrigé. $-i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$ donc son module est 1 et son argument $-\frac{\pi}{2}$.

$$\frac{3}{1-i} = \frac{3e^{i0}}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}} = \frac{3}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

Donc son module est $\frac{3}{\sqrt{2}}$ et son argument $\frac{\pi}{4}$.

Exercice 3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - z + 1 = 0$ et donner ses solutions sous forme exponentielle.

Corrigé. Le discriminant est $\Delta = -3$ donc les solutions sont

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2} = e^{i\pi/3}; \qquad x_2 = \frac{1 - \sqrt{3}i}{2} = e^{-i\pi/3}$$

Exercice 4. Résoudre les équations suivantes : $(x-5)^2 = 3$, $(3x+5)^2 = (x+1)^2$; $-x^2 + 6x - 10 = 0$, $x^2 + 4x - 21 = 0$; $(x+3)(x-2) = -4$; $6x^4 - 13x^2 = -6$.

Corrigé. Equation 1 :

$$(x-5)^2 = 3 \Leftrightarrow x - 5 = \sqrt{3} \quad \text{ou} \quad x - 5 = -\sqrt{3}$$
$$\Leftrightarrow x = 5 + \sqrt{3} \quad \text{ou} \quad x = 5 - \sqrt{3}$$

Equation 2 :

$$(3x+5)^2 = (x+1)^2 \Leftrightarrow 3x + 5 = x + 1 \quad \text{ou} \quad 3x + 5 = -(x+1)$$
$$\Leftrightarrow 2x = -4 \quad \text{ou} \quad 4x = -6$$
$$\Leftrightarrow x = -2 \quad \text{ou} \quad x = -\frac{3}{2}$$

Equation 3 : $-x^2 + 6x - 10 = 0$. Le discriminant est $\Delta = 36 - 40 = -4 < 0$ donc il n'y a pas de solutions réelles. Si on demande les solutions complexes, on a $x_1 = 3 - i$ et $x_2 = 3 + i$.

Equation 4 : $x^2 + 4x - 21 = 0$. Le discriminant est $\Delta = 100$, donc il y a deux solutions réelles $x_1 = 3$ et $x_2 = -7$.

Equation 5 : $(x+3)(x-2) = -4$. on développe et on regroupe les termes pour avoir un polynôme du second degré :

$$x^2 + x - 6 = -4 \quad \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0$$

Le discriminant est $\Delta = 9$ donc il y a deux solutions réelles $x_1 = 1$ et $x_2 = -2$.

Equation 5 : $6x^4 - 13x^2 = -6$. On pose $X = x^2$ et on a

$$6X^2 - 13X + 6 = 0$$

Le discriminant est $\Delta = 25$ donc il y a deux solutions réelles $X_1 = \frac{3}{2}$ et $X_2 = \frac{2}{3}$. On revient à x :

$$x^2 = \frac{3}{2} \quad \text{ou} \quad x^2 = \frac{2}{3}$$

$$x = \sqrt{\frac{3}{2}} \quad \text{ou} \quad x = -\sqrt{\frac{3}{2}} \quad \text{ou} \quad x = \sqrt{\frac{2}{3}} \quad \text{ou} \quad x = -\sqrt{\frac{2}{3}}$$

Exercice 5. Résoudre les équations suivantes : $e^x = 4$; $e^x = -3$; $2 - 5e^x = 1$; $\ln(x) - \ln(1-x) = 0$; $\ln(2x) + \ln(3-x) = 0$; $4 - 2e^x = 4e^x$;

Corrigé. Equation 1 : $e^x = 4$. On applique ln de chaque coté de l'égalité et on obtient $x = \ln 4$.

Equation 2 : $e^x = -3$ n'a pas de solution car une exponentielle (réelle) n'est jamais négative.

Equation 3 :

$$\begin{aligned} 2 - 5e^x = 1 &\Leftrightarrow -5e^x = 1 - 2 = -1 \\ &\Leftrightarrow e^x = \frac{1}{5} \\ &\Leftrightarrow x = \ln(\frac{1}{5}) = -\ln 5 \end{aligned}$$

Equation 4 : $\ln(x) - \ln(1-x) = 0$. Pour que l'équation existe, il faut que $x > 0$ et que $1 - x > 0$. Si on fait un tableau de signe, on en déduit que $x \in]0,1[$. On regroupe les ln dans l'équation et il vient

$$\ln\left(\frac{x}{1-x}\right) = 0$$

on prend l'exponentielle :

$$\frac{x}{1-x} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 - x \quad \Leftrightarrow \quad 2x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2}$$

Comme $\frac{1}{2}$ est bien dans l'ensemble de définition, c'est bien une solution.

Equation 5 : $\ln(2x) + \ln(3-x) = 0$ Pour que l'équation existe, il faut que $x > 0$ et que $3 - x > 0$. Si on fait un tableau de signe, on en déduit que $x \in]0,3[$. On regroupe les ln dans l'équation et il vient

$$\ln(2x(3-x)) = 0$$

On prend l'exponentielle

$$2x(3-x) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad -2x^2 + 6x - 1 = 0$$

Le discriminant est $\Delta = 36 - 8 = 28 = 4 \times 7$. Les deux racines du polynômes sont donc

$$x_1 = \frac{-6 + 2\sqrt{7}}{-4} = \frac{3 - \sqrt{7}}{2} \qquad x_2 = \frac{-6 - 2\sqrt{7}}{-4} = \frac{3 + \sqrt{7}}{2}$$

Vérifions que ces deux solutions sont dans l'ensemble de définition :

$$4 \leqslant 7 \leqslant 9 \quad \Leftrightarrow \quad 2 \leqslant \sqrt{7} \leqslant 3 \quad \Leftrightarrow \quad -3 \leqslant -\sqrt{7} \leqslant -2 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leqslant \frac{3 - \sqrt{7}}{2} \leqslant \frac{1}{2}$$

Donc la première solution est bien dans l'ensemble de définition. De même pour la deuxième solution :

$$2 \leqslant \sqrt{7} \leqslant 3 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{5}{2} \leqslant \frac{3 + \sqrt{7}}{2} \leqslant 3$$

Equation 6 :

$$4 - 2e^x = 4e^x \quad \Leftrightarrow \quad 4 = 6e^x \quad \Leftrightarrow \quad e^x = \frac{2}{3} \quad \Leftrightarrow \quad x = \ln(\frac{2}{3})$$

Exercice 6. Résoudre les inéquations suivantes : $-2x^2 + 7x - 5 \leqslant 0$; $(x^2 + 2x + 1)^2 \leqslant 16$

Corrigé. Inéquation 1 :$-2x^2 + 7x - 5 \leqslant 0$.

On commence par chercher les racines de $-2x^2+7x-5$. On a $\Delta = 9$ donc deux racines $x_1 = 1$ et $x_2 = \frac{5}{2}$. Comme le coefficient -2 est négatif, le polynômes est négatif à l'extérieur des racines, c'est à dire :

$$-2x^2+7x-5 \leqslant 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty;1] \cup [\frac{5}{2};+\infty[$$

Inéquation 2 : $(x^2+2x+1)^2 \leqslant 16$. En prenant la racine carré, on obtient l'encadrement

$$-4 \leqslant x^2+2x+1 \leqslant 4$$

Il y a donc deux conditions à vérifier en même temps (c'est "et"). On étudie d'abord $x^2+2x+1 \leqslant 4$:

$$\Leftrightarrow x^2+2x-3 \leqslant 0$$

Le polynôme a deux racines $x_1 = 1$ et $x_2 = -3$. Le coefficient 1 est positif donc le polynôme est négatif entre les racines. C'est à dire pour $x \in [-3;1]$.

On étudie ensuite $-4 \leqslant x^2+2x+1$:

$$\Leftrightarrow 0 \leqslant x^2+2x+5$$

Le polynôme n'a pas de racines, et comme 1 est positif, le polynôme est toujours positif strictement. Donc $0 \leqslant x^2+2x+5$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Finalement, $x \in [-3;1] \cap \mathbb{R}$, donc les solutions sont $x \in [-3;1]$.

Exercice 7. Résoudre les inéquations suivantes : $(e^x)^2 e^{x+1} \leqslant e^{-x}$; $1-3e^x < 2e^x$; $\ln(x^2) - \ln 2 > 7$; $\ln(2x^2-3x-5) \leqslant 2\ln 2$.

Corrigé. Equation 1 :

$$e^{2x+x+1} \leqslant e^{-x} \quad \Leftrightarrow \quad e^{4x+1} \leqslant 1$$

On applique le ln

$$\Leftrightarrow \quad 4x+1 \leqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \leqslant -\frac{1}{4}$$

Equation 2 :

$$1-3e^x < 2e^x \quad \Leftrightarrow \quad 1 < 5e^x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{5} < e^x$$

$$\Leftrightarrow \quad \ln\left(\frac{1}{5}\right) < x$$

Equation 3 : $\ln(x^2) - \ln 2 > 7$ On note que x^2 est strictement positif sauf pour $x = 0$. Donc L'ensemble de définition de l'équation est $\mathbb{R}^\star$.

$$\ln(x^2) - \ln 2 > 7 \quad \Leftrightarrow \quad \ln(\frac{x^2}{2}) > 7 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 > 2e^7$$

$$\Leftrightarrow \quad x > \sqrt{2e^7} \quad \text{ou} \quad x < -\sqrt{2e^7}$$

Donc $S = [-\infty; -\sqrt{2e^7}[\cup]\sqrt{2e^7};+\infty[$.

L'équation 4 est plus difficile : $\ln(2x^2-3x-5) \leqslant 2\ln 2$.

- La première difficulté est l'ensemble de définition, il faut que $2x^2-3x-5 > 0$. Le discriminant est $\Delta = 49$, donc il y a deux racines $x_1 = \frac{5}{2}$ et $x_2 = -1$. Le polynôme est positif à l'extérieur des racines, donc pour $x \in]-\infty;-1[\cup]\frac{5}{2};+\infty[$.
- Ensuite on étudie l'équation elle-même. On a

$$2\ln 2 = \ln 4 \quad \Leftrightarrow \quad \ln(2x^2-3x-5) \leqslant \ln 4$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x^2-3x-5 \leqslant 4 \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2-3x-9 \leqslant 0$$

  On étudie le polynôme. On a $\Delta = 81$, donc deux racines $x_1 = 3$ et $x_2 = -\frac{3}{2}$. Le polynôme est négatif entre les racines, donc pour $x \in [-\frac{3}{2};3]$.

— Au final, les solutions sont à la fois dans $[-\frac{3}{2};3]$ et $]-\infty;-1[\cup]\frac{5}{2};+\infty[$. On obtient alors comme solution

$$x \in \left[-\frac{3}{2};-1\right[\cup \left]\frac{5}{2};3\right[$$

Exercice 8. Résoudre les équations suivantes : $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos(2x-1) = \cos(\frac{3\pi}{4})$; $\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$; $\cos(2x) = \sin(x)$; $\sin(3x+2) = \sin(x-1)$.

Corrigé. Equation 1 :

$$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin(\frac{\pi}{4}) \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Equation 2 :

$$\cos(2x-1) = \cos(\frac{3\pi}{4}) \quad \Leftrightarrow \quad 2x - 1 = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad 2x - 1 = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{3\pi}{8} + \frac{1}{2} + k\pi \quad \text{ou} \quad x = -\frac{3\pi}{8} + \frac{1}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Equation 3 :

$$\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan\frac{\pi}{6} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{6} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Equation 4 : $\cos(2x) = \sin x$ On utilise une formule d'angle double :

$$1 - 2\sin^2 x = \sin x \quad \Leftrightarrow \quad 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$$

On pose $X = \sin x$ et on a $2X^2 + X - 1 = 0$. Le discriminant est $\Delta = 9$ donc il y a deux racines $X_1 = -1$ ou $X_2 = \frac{1}{2}$.

On revient à x. Pour $X_1 = -1$, on a

$$\sin x = -1 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

Pour $X_2 = \frac{1}{2}$, on a

$$\sin x = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

Equation 5 :

$$\sin(3x+2) = \sin(x-1) \quad \Leftrightarrow \quad 3x + 2 = x - 1 + 2k\pi \quad \text{ou} \quad 3x + 2 = \pi - x + 1 + 2k\pi$$

$$\Leftrightarrow \quad x = -\frac{3}{2} + k\pi \quad \text{ou} \quad x = \frac{\pi - 1}{4} + \frac{k\pi}{2}$$

Exercice 9. Donner l'équation de la droite passant par les points A (2 ;1) et B(3 ; -1). Donner l'équation de la droite perpendiculaire à (AB) et passant par $C(-2,2)$.

Corrigé. La première droite passe par le point $A(2;1)$ et a pour vecteur directeur $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (3-2;-1-1) = (1;-2)$. Un point $M(x;y)$ appartient à la droite ssi $\overrightarrow{AM}(x-2;y-1)$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

$$\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-2)\times(-2) - (y-1)\times 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -2x + 4 = y - 1 \quad \Leftrightarrow \quad -2x - y + 5 = 0$$

Un point $M(x;y)$ appartient à la droit la perpendiculaire à (AB) passant par C ssi les vecteurs $\overrightarrow{CM}(x+2,y-2)$ et $\overrightarrow{AB}(1;-2)$ sont orthogonaux

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x + 2 - 2(y-2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x - 2y + 6 = 0$$

Exercice 10. Donner l'équation du cercle de centre A (2 ; -3) et de rayon 5.

Corrigé. Un point $M(x;y)$ appartient cercle de centre A (2 ; -3) et de rayon 5 ssi

$$AM = 5 \quad \Leftrightarrow \quad \|\overrightarrow{AM}\|^2 = 25 \quad \Leftrightarrow \quad (x-2)^2 + (y+3)^2 = 25$$

Exercice 11. Trouver l'intersection du cercle C de centre $(-1;0)$ et de rayon $\sqrt{2}$ et de la droite D d'équation $x - y + 1 = 0$.

Corrigé. L'équation du cercle C est $(x+1)^2 + y^2 = 2$. On cherche les points (x, y) qui vérifient à la fois l'équation du cercle et celle de la droite, donc le système :

$$\begin{cases} (x+1)^2 + y^2 & = & 2 \\ x - y + 1 & = & 0 \end{cases}$$

Dans la deuxième ligne, on a $y = x + 1$, qu'on reporte dans la première

$$(x+1)^2 + (x+1)^2 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad 2(x+1)^2 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad (x+1)^2 = 1$$

$$x + 1 = 1 \quad \text{ou} \quad x + 1 = -1 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \text{ou} \quad x = -2$$

En reportant x dans $y = x + 1$, on trouve comme solutions les points (0 ; 1) et (-2 ; -1).

Exercice 12. Trouver l'intersection des droites D et D' d'équations $2y - 4x - 2 = 0$ et $-y + 2x - 6 = 0$.

Corrigé. On multiplie l'équation de D' par 2 et on obtient $-2y + 4x - 12 = 0$. Le deux droites ont les même équations sauf le terme constant. Elles sont donc parallèles et distinctes, donc il n'y a pas d'intersection.

Exercice 13. Soit $\vec{u}(1, 2, 3)$ et $\vec{v}(-1, 1, -1)$. Calculez $\vec{u} \wedge \vec{v}$.

Corrigé. $\vec{u} \wedge \vec{v} = (-5, -2, 3)$

Exercice 14. Calculer la dérivée des fonctions suivantes, définies sur $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \cos(3x^2 + x), \qquad g(x) = \frac{1}{2 - \sin x}, \qquad h(x) = \ln(2 + 2x^4)$$

Corrigé.

$$f'(x) = -(6x+1)\sin(3x^2 + x), \qquad g'(x) = \frac{-\cos x}{(2 - \sin x)^2}, \qquad h'(x) = \frac{8x^3}{2 + 2x^4}$$

Exercice 15. Etudier la fonction $f(x) = \frac{e^x + 1}{\sqrt{e^{2x} - 1}}$: ensemble de définition, dérivée, limites, tableau de variation.

Corrigé. La fonction est définie pour

$$e^{2x} - 1 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{2x} > 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > 0$$

Donc $D_f =]0; +\infty[$. Elle est dérivable sur D_f et sa dérivée est

$$f'(x) = \frac{e^x\sqrt{e^{2x} - 1} - (e^{2x}/\sqrt{e^{2x} - 1})(e^x + 1)}{e^{2x} - 1} = \frac{e^{3x} - e^x - e^{3x} - e^{2x}}{(e^{2x} - 1)\sqrt{e^{2x} - 1}} = \frac{-e^x - e^{2x}}{(e^{2x} - 1)\sqrt{e^{2x} - 1}} < 0$$

$$f'(x) = -\frac{(e^x + e^{2x})}{(e^{2x} - 1)\sqrt{e^{2x} - 1}}$$

Comme une exponentielle est toujours strictement positive, on a $(e^x + e^{2x}) > 0$. Au dénominateur, sur l'ensemble de définition, on sait que $(e^{2x} - 1) > 0$. Donc finalement $f'(x) < 0$ sur $]0; +\infty[$, donc f est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.

En 0, on a $\lim e^x + 1 = 2$ et $\lim \sqrt{e^{2x} - 1} = 0^+$ donc

$$\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$$

En $+\infty$, on fait les termes dominant :

$$f(x) = \frac{e^x(1 + 1/e^x)}{\sqrt{e^{2x}(1 - 1/e^{2x})}} = \frac{e^x(1 + 1/e^x)}{\sqrt{e^{2x}}\sqrt{(1 - 1/e^{2x})}} = \frac{e^x(1 + 1/e^x)}{e^x\sqrt{(1 - 1/e^{2x})}} = \frac{(1 + 1/e^x)}{\sqrt{(1 - 1/e^{2x})}}$$

donc

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$$

Exercice 16. Etudier la fonction $f(x) = \frac{2+\ln(1+x)}{1+x}$.

Corrigé. La fonction est définie pour $1+x \neq 0$ et $1+x > 0$, donc sur $]-1; +\infty[$. Elle est dérivable sur $]-1; +\infty[$ et

$$f'(x) = \frac{-1 - \ln(1 + x)}{(1 + x)^2}.$$

Le dénominateur est positif donc f' est du signe du numérateur.

$$-1 - \ln(1 + x) = 0 \Leftrightarrow \ln(1 + x) = -1 \Leftrightarrow 1 + x = e^{-1} \Leftrightarrow x = e^{-1} - 1$$

x	-1		$e^{-1} - 1$		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	e	$\searrow$	0

En -1, on a $\lim(2 + \ln(1 + x)) = -\infty$ et $\lim 1 + x = 0^+$ donc

$$\lim_{x \to -1} f(x) = -\infty$$

En $+\infty$, on décompose f :

$$f(x) = \frac{2 + \ln(1 + x)}{1 + x} = \frac{2}{1 + x} + \frac{\ln(1 + x)}{1 + x}$$

On a $\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{1+x} = 0$. Dans l'autre terme, on pose $X = 1 + x$, avec $X \to +\infty$ quand $x \to +\infty$. On a $\lim_{X\to+\infty} \frac{\ln(X)}{X} = 0$ par croissance comparée. Finalement :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

Exercice 17. Calculer les intégrales suivantes $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos x dx$; $\int_0^4 (2x - 4)e^{x^2-4x+7} dx$; $\int_1^3 \frac{2x+3}{(x^2+3x+2)^2} dx$; et $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x(\cos x)^3 dx$.

Corrigé.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos x dx = \left[\frac{1}{2}(\sin x)^2\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$\int_0^4 (2x - 4)e^{x^2-4x+7} dx = \left[e^{x^2-4x+7}\right]_0^4 = e^7 - e^7 = 0$$

$$\int_1^3 \frac{2x + 3}{(x^2 + 3x + 2)^2} dx = \left[-\frac{1}{x^2 + 3x + 2}\right]_1^3 = -\frac{1}{20} + \frac{1}{6} = \frac{7}{60}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x(\cos x)^3 dx = \left[-\frac{1}{4}(\cos x)^4\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4}$$

Exercice 18. Calculer les intégrales suivantes : $\int_{-1}^{0}(x+2)e^x dx$; $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx$ et $\int_0^1 x^2 \ln x dx$.

Corrigé. On utilise l'intégration par parties.

$$\int_{-1}^{0}(x+2)e^x dx = [(x+2)e^x]_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} e^x = 2 - e^{-1} - [e^x]_{-1}^{0} = 1$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx = [x(-\cos x)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\cos x dx = 0 + [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

$$\int_0^1 x^2 \ln x dx = \left[\frac{x^3}{3} \times \ln x\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^3}{3} \times \frac{1}{x} dx = 0 - \int_0^1 \frac{x^2}{3} dx = -\left[\frac{x^3}{9}\right]_0^1 = -\frac{1}{9}$$

Exercice 19. Résoudre les équation différentielles suivantes : $y' + 2y = 3e^x$, $y' + y = 3x - 1$.

Corrigé. On résout $y' + 2y = 3e^x$.

— Les solutions de l'équation homogène $y' + 2y = 0$ sont $y_h(x) = Ke^{-2x}$ avec K constante réelle.

— On cherche une solution particulière sous la forme $y_p(x) = ae^x$. Donc $y_p'(x) = ae^x$ et on reporte dans l'equation :

$$ae^x + 2ae^x = 3e^x \quad \Leftrightarrow \quad 3ae^x = 3e^x \quad \Leftrightarrow \quad a = 1$$

Donc $y_p(x) = e^x$

— Les solutions sont $y(x) = Ke^{-2x} + e^x$ avec $K \in \mathbb{R}$.

On résout $y' + y = 3x - 1$.

— Les solutions de l'équation homogène $y' + y = 0$ sont $y_h(x) = Ke^{-x}$ avec K constante réelle.

— On cherche une solution particulière sous la forme $y_p(x) = ax + b$. Donc $y_p'(x) = a$ et on reporte dans l'equation :

$$a + ax + b = 3x - 1 \quad \Leftrightarrow \quad a = 3; \quad b + a = -1 \quad \Leftrightarrow \quad a = 3; \quad b = -4$$

Donc $y_p(x) = 3x - 4$

— Les solutions sont $y(x) = Ke^{-x} + 3x - 4$ avec $K \in \mathbb{R}$.

Exercice 20. Résoudre l'équation différentielle $y' + 2y = e^{-2x}\cos(x)$.

Corrigé.

— Les solutions de l'équations homogènes sont $y_h(x) = Ke^{-2x}$ avec K une constante réelle.

— On cherche une solution particulière de l'équation par la méthode de variation de la constante. On pose $y_p(x) = K(x)e^{-2x}$ avec $K(x)$ une fonction à déterminer. Après avoir dérivé et remplacé dans l'équation, on finit par obtenir

$$K'(x)e^{-2x} = \cos x e^{-2x} \quad \Leftrightarrow \quad K'(x) = \cos x \quad \Leftarrow \quad K(x) = \sin x$$

Une solution particulière est donc $y_p(x) = \sin x e^{-2x}$.

— L'ensemble des solutions de l'équation est donc $y(x) = (K + \sin x)e^{-2x}$ avec K une constante.

Exercice 21. Résoudre $\frac{3x+5}{x+2} \leqslant 2$

Corrigé. L'ensemble de définition est $I =]-\infty; -2[\cup]-2; +\infty[$. On étudie l'équation sur chacun des intervalles :

— Sur $]-\infty;-2[$, on a $x+2<0$, donc quand on multiplie chaque coté de l'égalité par $x+2$, ça change le sens de l'inégalité :

$$\Leftrightarrow \frac{3x+5}{x+2} \leqslant 2 \quad \Leftrightarrow \quad 3x+5 \geqslant 2(x+2) \quad \Leftrightarrow \quad 3x+5 \geqslant 2x+4 \quad \Leftrightarrow \quad x \geqslant -1$$

On doit prendre les x qui sont à la fois supérieur à -1 et dans $]-\infty;-2[$. C'est impossible, donc pas de solution dans $]-\infty;-2[$.

— Sur $]-2;+\infty[$, on a $x+2>0$, donc quand on multiplie chaque coté de l'égalité par $x+2$, ça ne change pas le sens de l'inégalité :

$$\frac{3x+5}{x+2} \leqslant 2 \quad \Leftrightarrow \quad 3x+5 \leqslant 2(x+2) \quad \Leftrightarrow \quad 3x+5 \leqslant 2x+4 \quad \Leftrightarrow \quad x \leqslant -1$$

On doit prendre les x qui sont à la fois inférieurs à -1 et dans $]-2;+\infty[$, donc x dans $]-2;-1]$.

Finalement, les solutions de cette inéquation sont $x \in]-2;-1]$.