Révisions

Exercice 1

Soit $z = \sqrt{3} + i$ et $z' = 6 - 2\sqrt{3}i$. Ecrire zz' et $\frac{z}{z'}$ sous forme algébrique, puis exponentielle.

Corrigé 1.

$$zz' = (\sqrt{3}+i)(6-2\sqrt{3}i) = 8\sqrt{3}; \qquad zz' = 8\sqrt{3}e^{i0}$$

$$\frac{z}{z'} = \frac{(\sqrt{3}+i)(6+3\sqrt{3}i)}{36+12} = \frac{4\sqrt{3}+12i}{48} = \frac{\sqrt{3}+3i}{12}; \qquad \frac{z}{z'} = \frac{\sqrt{3}}{6}e^{i\pi/3}$$

Exercice 2

Calculer le module et l'argument de $-i$ et de $\frac{3}{1-i}$.

Corrigé 2. $-i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$ donc son module est 1 et son argument $-\frac{\pi}{2}$.

$$\frac{3}{1-i} = \frac{3e^{i0}}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}} = \frac{3}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

Donc son module est $\frac{3}{\sqrt{2}}$ et son argument $\frac{\pi}{4}$.

Exercice 3

Ecrire sous forme algébrique le nombre complexe suivant : $Z = \frac{3-2i}{(i-1)e^{i\frac{\pi}{2}}}$.

Corrigé 3.

$$Z = \frac{3-2i}{(i-1)i} = \frac{3-2i}{-1-i} = \frac{(3-2i)(-1+i)}{1+1} = \frac{-3+3i+2i+2}{2} = \frac{-1}{2} + i\frac{5}{2}$$

Exercice 4

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - z + 1 = 0$ et donner ses solutions sous forme exponentielle.

Corrigé 4. Le discriminant est $\Delta = -3$ donc les solutions sont

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{3}i}{2} = e^{i\pi/3}; \qquad x_2 = \frac{1-\sqrt{3}i}{2} = e^{-i\pi/3}$$

Exercice 5

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$(x-5)^2 = 3 \qquad (3x+5)^2 = (x+1)^2, \qquad -x^2+6x-10 = 0$$

$$x^2+4x-21 = 0, \qquad (x+3)(x-2) = -4, \qquad 6x^4 - 13x^2 = -6$$

Corrigé 5. Equation 1

$$(x-5)^2 = 3 \Leftrightarrow x-5 = \sqrt{3} \quad \text{ou} \quad x-5 = -\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow x = 5+\sqrt{3} \quad \text{ou} \quad x = 5-\sqrt{3}$$

Equation 2

$$(3x+5)^2 = (x+1)^2 \Leftrightarrow 3x+5 = x+1 \quad \text{ou} \quad 3x+5 = -(x+1)$$

$$\Leftrightarrow 2x = -4 \quad \text{ou} \quad 4x = -6$$

$$\Leftrightarrow x = -2 \quad \text{ou} \quad x = -\frac{3}{2}$$

Equation 3 $-x^2+6x-10 = 0$. Le discriminant est $\Delta = 36-40 = -4 < 0$ donc il n'y a pas de solutions réelles. Si on demande les solutions complexes, on a $x_1 = 3-i$ et $x_2 = 3+i$.

Equation 4 $x^2+4x-21 = 0$. Le discriminant est $\Delta = 100$, donc il y a deux solutions réelles $x_1 = 3$ et $x_2 = -7$.

Equation 5 $(x+3)(x-2) = -4$. on développe et on regroupe les termes pour avoir un polynôme du second degré :

$$x^2+x-6 = -4 \quad \Leftrightarrow x^2+x-2 = 0$$

Le discriminant est $\Delta = 9$ donc il y a deux solutions réelles $x_1 = 1$ et $x_2 = -2$.

Equation 6 $6x^4 - 13x^2 = -6$. On pose $X = x^2$ et on a

$$6X^2 - 13X + 6 = 0$$

Le discriminant est $\Delta = 25$ donc il y a deux solutions réelles $X_1 = \frac{3}{2}$ et $X_2 = \frac{2}{3}$. On revient à x :

$$x^2 = \frac{3}{2} \quad \text{ou} \quad x^2 = \frac{2}{3}$$

$$x = \sqrt{\frac{3}{2}} \quad \text{ou} \quad x = -\sqrt{\frac{3}{2}} \quad \text{ou} \quad x = \sqrt{\frac{2}{3}} \quad \text{ou} \quad x = -\sqrt{\frac{2}{3}}$$

Exercice 6

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes

$$e^x = 4, \qquad e^x = -3, \qquad 2-5e^x = 1, \qquad \ln(x) - \ln(1-x) = 0$$

$$\ln(2x) + \ln(3-x) = 0, \qquad 4-2e^x = 4e^x$$

Corrigé 6. Equation 1 $e^x = 4$. On applique ln de chaque coté de l'égalité et on obtient $x = \ln 4$.

Equation 2 $e^x = -3$ n'a pas de solution car une exponentielle (réelle) n'est jamais négative.
Equation 3

$$2 - 5e^x = 1 \Leftrightarrow -5e^x = 1 - 2 = -1$$
$$\Leftrightarrow e^x = \frac{1}{5}$$
$$\Leftrightarrow x = \ln(\frac{1}{5}) = -\ln 5$$

Equation 4 $\ln(x) - \ln(1-x) = 0$. Pour que l'équation existe, il faut que $x > 0$ et que $1 - x > 0$. Si on fait un tableau de signe, on en déduit que $x \in]0, 1[$. On regroupe les ln dans l'équation et il vient

$$\ln\left(\frac{x}{1-x}\right) = 0$$

on prend l'exponentielle :

$$\frac{x}{1-x} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 - x \quad \Leftrightarrow \quad 2x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2}$$

Comme $\frac{1}{2}$ est bien dans l'ensemble de définition, c'est bien une solution.
Equation 5 $\ln(2x) + \ln(3-x) = 0$ Pour que l'équation existe, il faut que $x > 0$ et que $3 - x > 0$. Si on fait un tableau de signe, on en déduit que $x \in]0, 3[$. On regroupe les ln dans l'équation et il vient

$$\ln(2x(3-x)) = 0$$

On prend l'exponentielle

$$2x(3-x) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad -2x^2 + 6x - 1 = 0$$

Le discriminant est $\Delta = 36 - 8 = 28 = 4 \times 7$. Les deux racines du polynômes sont donc

$$x_1 = \frac{-6 + 2\sqrt{7}}{-4} = \frac{3 - \sqrt{7}}{2} \qquad x_2 = \frac{-6 - 2\sqrt{7}}{-4} = \frac{3 + \sqrt{7}}{2}$$

Vérifions que ces deux solutions sont dans l'ensemble de définition :

$$4 \leqslant 7 \leqslant 9 \quad \Leftrightarrow \quad 2 \leqslant \sqrt{7} \leqslant 3 \quad \Leftrightarrow \quad -3 \leqslant -\sqrt{7} \leqslant -2 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leqslant \frac{3 - \sqrt{7}}{2} \leqslant \frac{1}{2}$$

Donc la première solution est bien dans l'ensemble de définition. De même pour la deuxième solution :

$$2 \leqslant \sqrt{7} \leqslant 3 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{5}{2} \leqslant \frac{3 + \sqrt{7}}{2} \leqslant 3$$

Equation 6

$$4 - 2e^x = 4e^x \quad \Leftrightarrow \quad 4 = 6e^x \quad \Leftrightarrow \quad e^x = \frac{2}{3} \quad \Leftrightarrow \quad x = \ln(\frac{2}{3})$$

Exercice 7

Résoudre les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$:

$$-2x^2 + 7x - 5 \leqslant 0, \qquad (x^2 + 2x + 1)^2 \leqslant 16$$

Corrigé 7. Inéquation 1 $-2x^2 + 7x - 5 \leqslant 0$.
On commence par chercher les racines de $-2x^2 + 7x - 5$. On a $\Delta = 9$ donc deux racines $x_1 = 1$ et $x_2 = \frac{5}{2}$. Comme le coefficient -2 est négatif, le polynômes est négatif à l'extérieur des racines, c'est à dire :

$$-2x^2 + 7x - 5 \leqslant 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty; 1] \cup [\frac{5}{2}; +\infty[$$

Inéquation 2 $(x^2 + 2x + 1)^2 \leqslant 16$. En prenant la racine carré, on obtient l'encadrement

$$-4 \leqslant x^2 + 2x + 1 \leqslant 4$$

Il y a donc deux conditions à vérifier en même temps (c'est "et"). On étudie d'abord $x^2 + 2x + 1 \leqslant 4$:

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 \leqslant 0$$

Le polynôme a deux racines $x_1 = 1$ et $x_2 = -3$. Le coefficient 1 est positif donc le polynôme est négatif entre les racines. C'est à dire pour $x \in [-3; 1]$.
On étudie ensuite $-4 \leqslant x^2 + 2x + 1$:

$$\Leftrightarrow 0 \leqslant x^2 + 2x + 5$$

Le polynôme n'a pas de racines, et comme 1 est positif, le polynôme est toujours positif strictement. Donc $0 \leqslant x^2 + 2x + 5$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Finalement, $x \in [-3; 1] \cap \mathbb{R}$, donc les solutions sont $x \in [-3; 1]$.

Exercice 8

Résoudre les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$:

$$(e^x)^2 e^{x+1} \leqslant e^{-x}, \qquad 1 - 3e^x < 2e^x$$
$$\ln(x^2) - \ln 2 > 7, \qquad \ln(2x^2 - 3x - 5) \leqslant 2 \ln 2$$

Corrigé 8. équation 1

$$e^{2x+x+1} \leqslant e^{-x} \quad \Leftrightarrow \quad e^{4x+1} \leqslant 1$$

On applique le ln

$$\Leftrightarrow \quad 4x+1 \leqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \leqslant -\frac{1}{4}$$

équation 2

$$1-3e^x < 2e^x \quad \Leftrightarrow \quad 1 < 5e^x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{5} < e^x$$
$$\Leftrightarrow \quad \ln\left(\frac{1}{5}\right) < x$$

équation 3 $\ln(x^2) - \ln 2 > 7$ On note que x^2 est strictement positif sauf pour $x = 0$. Donc L'ensemble de définition de l'équation est $\mathbb{R}^\star$.

$$\ln(x^2) - \ln 2 > 7 \quad \Leftrightarrow \quad \ln(\frac{x^2}{2}) > 7 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 > 2e^7$$
$$\Leftrightarrow \quad x > \sqrt{2e^7} \quad \text{ou} \quad x < -\sqrt{2e^7}$$

Donc $S = [-\infty; -\sqrt{2e^7}[\cup]\sqrt{2e^7}; +\infty[$.

L'équation 4 est plus difficile : $\ln(2x^2 - 3x - 5) \leqslant 2\ln 2$.

— La première difficulté est l'ensemble de définition, il faut que $2x^2 - 3x - 5 > 0$. Le discriminant est $\Delta = 49$, donc il y a deux racines $x_1 = \frac{5}{2}$ et $x_2 = -1$. Le polynôme est positif à l'extérieur des racines, donc pour $x \in]-\infty; -1[\cup]\frac{5}{2}; +\infty[$.

— Ensuite on étudie l'équation elle-même. On a

$$2\ln 2 = \ln 4 \quad \Leftrightarrow \quad \ln(2x^2 - 3x - 5) \leqslant \ln 4$$
$$\Leftrightarrow \quad 2x^2 - 3x - 5 \leqslant 4 \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 - 3x - 9 \leqslant 0$$

On étudie le polynôme. On a $\Delta = 81$, donc deux racines $x_1 = 3$ et $x_2 = -\frac{3}{2}$. Le polynôme est négatif entre les racines, donc pour $x \in [-\frac{3}{2}; 3]$.

— Au final, les solutions sont à la fois dans $[-\frac{3}{2}; 3]$ et $]-\infty; -1[\cup]\frac{5}{2}; +\infty[$. On obtient alors comme solution

$$x \in \left[-\frac{3}{2}; -1\right[\cup \left]\frac{5}{2}; 3\right[$$

Exercice 9

Résoudre $\frac{3x+5}{x+2} \leqslant 2$

Corrigé 9. L'ensemble de définition est $I =]-\infty; -2[\cup]-2; +\infty[$. On étudie l'équation sur chacun des intervalles :

— Sur $]-\infty; -2[$, on a $x+2 < 0$, donc quand on multiplie chaque coté de l'égalité par $x+2$, ça change le sens de l'inégalité :

$$\Leftrightarrow \frac{3x+5}{x+2} \leqslant 2 \quad \Leftrightarrow \quad 3x+5 \geqslant 2(x+2) \quad \Leftrightarrow \quad 3x+5 \geqslant 2x+4 \quad \Leftrightarrow \quad x \geqslant -1$$

On doit prendre les x qui sont à la fois supérieur à -1 et dans $]-\infty; -2[$. C'est impossible, donc pas de solution dans $]-\infty; -2[$.

— Sur $]-2; +\infty[$, on a $x+2 > 0$, donc quand on multiplie chaque coté de l'égalité par $x+2$, ça ne change pas le sens de l'inégalité :

$$\frac{3x+5}{x+2} \leqslant 2 \quad \Leftrightarrow \quad 3x+5 \leqslant 2(x+2) \quad \Leftrightarrow \quad 3x+5 \leqslant 2x+4 \quad \Leftrightarrow \quad x \leqslant -1$$

On doit prendre les x qui sont à la fois inférieurs à -1 et dans $]-2; +\infty[$, donc x dans $]-2; -1]$.

Finalement, les solutions de cette inéquation sont $x \in]-2; -1]$.

Exercice 10

Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$:

$$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \cos(2x-1) = \cos(\frac{3\pi}{4}), \qquad \tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$\cos(2x) = \sin(x), \qquad \sin(3x+2) = \sin(x-1)$$

Corrigé 10. équation 1

$$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin(\frac{\pi}{4}) \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

équation 2

$$\cos(2x-1) = \cos(\frac{3\pi}{4}) \quad \Leftrightarrow \quad 2x-1 = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad 2x-1 = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$$
$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{3\pi}{8} + \frac{1}{2} + k\pi \quad \text{ou} \quad x = -\frac{3\pi}{8} + \frac{1}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

équation 3

$$\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan\frac{\pi}{6} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{6} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

équation 4 $\cos(2x) = \sin x$ On utilise une formule d'angle double :

$$1 - 2\sin^2 x = \sin x \quad \Leftrightarrow \quad 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$$

On pose $X = \sin x$ et on a $2X^2 + X - 1 = 0$. Le discriminant est $\Delta = 9$ donc il y a deux racines $X_1 = -1$ ou $X_2 = \frac{1}{2}$.

On revient à x. Pour $X_1 = -1$, on a

$$\sin x = -1 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

Pour $X_2 = \frac{1}{2}$, on a

$$\sin x = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

équation 5

$$\sin(3x+2) = \sin(x-1) \quad \Leftrightarrow \quad 3x+2 = x-1+2k\pi \quad \text{ou} \quad 3x+2 = \pi - x + 1 + 2k\pi$$

$$\Leftrightarrow \quad x = -\frac{3}{2} + k\pi \quad \text{ou} \quad x = \frac{\pi - 1}{4} + \frac{k\pi}{2}$$

Exercice 11

1. Donner l'équation de la droite passant par les points A (2 ;1) et B(3 ; -1).
2. Donner l'équation de la droite perpendiculaire à (AB) et passant par $C(-2, 2)$.

Corrigé 11. La première droite passe par le point $A(2; 1)$ et a pour vecteur directeur $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (3-2; -1-1) = (1; -2)$. Un point $M(x; y)$ appartient à la droite ssi $\overrightarrow{AM}(x-2; y-1)$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

$$\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-2)\times(-2) - (y-1)\times 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -2x+4 = y-1$$

$$\Leftrightarrow \quad -2x - y + 5 = 0$$

Un point $M(x; y)$ appartient à la droit la perpendiculaire à (AB) passant par C ssi les vecteurs $\overrightarrow{CM}(x+2, y-2)$ et $\overrightarrow{AB}(1; -2)$ sont orthogonaux

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{AB} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x+2-2(y-2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x - 2y + 6 = 0$$

Exercice 12

Donner l'équation du cercle de centre A (2 ; -3) et de rayon 5.

Corrigé 12. Un point $M(x; y)$ appartient cercle de centre A (2 ; -3) et de rayon 5 ssi

$$AM = 5 \quad \Leftrightarrow \quad \|\overrightarrow{AM}\|^2 = 25 \quad \Leftrightarrow \quad (x-2)^2 + (y+3)^2 = 25$$

Exercice 13

Trouver l'intersection du cercle C de centre $(-1; 0)$ et de rayon $\sqrt{2}$ et de la droite D d'équation $x - y + 1 = 0$.

Corrigé 13. L'équation du cercle C est $(x+1)^2 + y^2 = 2$. On cherche les points (x, y) qui vérifient à la fois l'équation du cercle et celle de la droite, donc le système :

$$\begin{cases} (x+1)^2 + y^2 &= 2 \\ x - y + 1 &= 0 \end{cases}$$

Dans la deuxième ligne, on a $y = x + 1$, qu'on reporte dans la première

$$(x+1)^2 + (x+1)^2 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad 2(x+1)^2 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad (x+1)^2 = 1$$

$$x+1 = 1 \quad \text{ou} \quad x+1 = -1 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \text{ou} \quad x = -2$$

En reportant x dans $y = x + 1$, on trouve comme solutions les points (0 ; 1) et (-2 ; -1).

Exercice 14

Trouver l'intersection des droites D et D' d'équations $2y - 4x - 2 = 0$ et $-y + 2x - 6 = 0$.

Corrigé 14. On multiplie l'équation de D' par 2 et on obtient $-2y + 4x - 12 = 0$. Le deux droites ont les même équations sauf le terme constant. Elles sont donc parallèles et distinctes, donc il n'y a pas d'intersection.

Exercice 15

Soit $\vec{u}(1, 2, 3)$ et $\vec{v}(-1, 1, -1)$. Calculez $\vec{u} \wedge \vec{v}$.

Corrigé 15. $\vec{u} \wedge \vec{v} = (-5, -2, 3)$

Exercice 16

Calculer la dérivée de la fonction suivante $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & (1+x^2)^2 \end{array}$

Corrigé 16. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = 2(2x)(1+x^2) = 4x + 4x^3$$

Exercice 17

Calculer la dérivée des fonctions suivantes, définies sur $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \cos(3x^2 + x), \qquad g(x) = \frac{1}{2 - \sin x}, \qquad h(x) = \ln(2 + 2x^4)$$

Corrigé 17.

$$f'(x) = -(6x+1)\sin(3x^2+x), \qquad g'(x) = \frac{-\cos x}{(2-\sin x)^2}, \qquad h'(x) = \frac{8x^3}{2+2x^4}$$

Exercice 18

Etudier la fonction

$$f(x) = \frac{e^x + 1}{\sqrt{e^{2x} - 1}}$$

en détaillant son ensemble de définition, sa dérivée, ses limites, et son tableau de variation.

Corrigé 18. La fonction est définie pour

$$e^{2x} - 1 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{2x} > 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > 0$$

Donc $D_f =]0; +\infty[$. Elle est dérivable sur D_f et sa dérivée est

$$f'(x) = \frac{e^x\sqrt{e^{2x}-1} - (e^{2x}/\sqrt{e^{2x}-1})(e^x+1)}{e^{2x}-1} = \frac{e^{3x}-e^x-e^{3x}-e^{2x}}{(e^{2x}-1)\sqrt{e^{2x}-1}}$$

$$f'(x) = \frac{-e^x-e^{2x}}{(e^{2x}-1)\sqrt{e^{2x}-1}} < 0 = -\frac{(e^x+e^{2x})}{(e^{2x}-1)\sqrt{e^{2x}-1}}$$

Comme une exponentielle est toujours strictement positive, on a $(e^x+e^{2x}) > 0$. Au dénominateur, sur l'ensemble de définition, on sait que $(e^{2x}-1) > 0$. Donc finalement $f'(x) < 0$ sur $]0; +\infty[$, donc f est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.
En 0, on a $\lim e^x + 1 = 2$ et $\lim \sqrt{e^{2x}-1} = 0^+$ donc

$$\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$$

En $+\infty$, on fait les termes dominant :

$$f(x) = \frac{e^x(1+1/e^x)}{\sqrt{e^{2x}(1-1/e^{2x})}} = \frac{e^x(1+1/e^x)}{\sqrt{e^{2x}}\sqrt{(1-1/e^{2x})}} = \frac{e^x(1+1/e^x)}{e^x\sqrt{(1-1/e^{2x})}} = \frac{(1+1/e^x)}{\sqrt{(1-1/e^{2x})}}$$

donc

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$$

Exercice 19

Etudier la fonction

$$f(x) = \frac{2+\ln(1+x)}{1+x}$$

Corrigé 19. La fonction est définie pour $1+x \neq 0$ et $1+x > 0$, donc sur $]-1; +\infty[$. Elle est dérivable sur $]-1; +\infty[$ et

$$f'(x) = \frac{-1-\ln(1+x)}{(1+x)^2}.$$

Le dénominateur est positif donc f' est du signe du numérateur.

$$-1-\ln(1+x) = 0 \Leftrightarrow \ln(1+x) = -1 \Leftrightarrow 1+x = e^{-1} \Leftrightarrow x = e^{-1}-1$$

x	-1		$e^{-1}-1$		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	e	$\searrow$	0

En -1, on a $\lim(2+\ln(1+x)) = -\infty$ et $\lim 1+x = 0^+$ donc

$$\lim_{x\to-1} f(x) = -\infty$$

En $+\infty$, on décompose f :

$$f(x) = \frac{2+\ln(1+x)}{1+x} = \frac{2}{1+x} + \frac{\ln(1+x)}{1+x}$$

On a $\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{1+x} = 0$. Dans l'autre terme, on pose $X = 1+x$, avec $X \to +\infty$ quand $x \to +\infty$. On a $\lim_{X\to+\infty} \frac{\ln(X)}{X} = 0$ par croissance comparée. Finalement :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

Exercice 20

Déterminer, en justifiant vos réponses, les limites suivantes :

$$a)\ \lim_{x\to+\infty} \ln(x^2) - \sqrt{x}, \qquad b)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{e^x - e^{-x}}, \qquad c)\ \lim_{x\to 0} \frac{\tan(2x^2)}{x\sin x}.$$

Corrigé 20. *a*) On a pour tout $x > 0$,

$$\ln(x^2) - \sqrt{x} = 2\ln x - \sqrt{x} = -\sqrt{x}\left(\frac{2\ln x}{-\sqrt{x}} + 1\right)$$

On a $\lim_{x\to+\infty} -\sqrt{x} = -\infty$ et $\ln x$ est négligeable devant $\sqrt{x}$, donc

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(x^2) - \sqrt{x} = -\infty$$

b) On a $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$, donc $\lim_{x\to+\infty} e^x - e^{-x} = +\infty$ et on en déduit

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{e^x - e^{-x}} = 0$$

c) Pour x au voisinage de 0, on a

$$\frac{\tan(2x^2)}{x\sin x} \sim \frac{2x^2}{x\times x} \sim 2, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\tan(2x^2)}{x\sin x} = 2$$

Exercice 21

On considère la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

— Calculer A^2
— La matrice A est-elle inversible ? (Justifier)

Corrigé 21.

— on a

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = A$$

— Par l'absurbe, supposons que A est inversible. Donc A^{-1} existe. D'après ce qui précède $A^2 = A$, qu'on multiplie par A^{-1}. On obtient alors $A = I_3$, ce qui est absurde. Donc A n'est pas inversible.

Exercice 22

Quelle est la négation de la propriété suivante : « Tous les éléments de l'ensemble E sont des réels différents de 0 » ?

Corrigé 22. En écriture mathématiques, la phrase est : $\forall e \in E, , e \in \mathbb{R}$ et $e \neq 0$. Sa négation est donc $\exists e \in E, e \notin \mathbb{R}$ ou $e = 0$, c'est-à-dire « Il existe un élément de l'ensemble E qui n'est pas un réel ou qui est nul » .

Exercice 23

Quelle est la négation de la propriété suivante : « Il existe au moins un élève de la promotion qui porte des lunettes. » ?

Corrigé 23. En notation mathématiques, on a $\exists$ élève $\in$ promotion, l'élève porte des lunettes. Donc la négation est $\forall$ élève $\in$ promotion, l'élève ne porte pas de lunette. Donc « Aucun élève de la promotion ne porte de lunettes. »

Exercice 24

Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle suivante :

$$5\frac{x-3}{x^3+x^2+9x+9}$$

Corrigé 24. On commence par chercher les racines évidentes du dénominateur $x^3 + x^2 + 9x + 9$. -1 est une racine, donc on fait la division euclidienne par $x + 1$:

$$X^3 + X^2 + 9X + 9 = (X + 1)(X^2 + 9)$$

Le polynôme $X^2 + 9$ a un discriminant négatif, donc il n'y a pas d'autres racines réelles. Le fraction rationnelle se décompose donc de la manière suivante :

$$5\frac{x-3}{(x+1)(x^2+9)} = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2+9}$$

On multiplie chaque coté de l'égalité par $x + 1$ et on prend $x = -1$. On obtient

$$a = 5\frac{-1-3}{((-1)^2+9)} = -2; \qquad 5\frac{x-3}{(x+1)(x^2+9)} = \frac{-2}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2+9}$$

On prend $x = 0$ et il vient

$$5\frac{-3}{9} = -2 + \frac{c}{9} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{c}{9} = \frac{-15}{9} + \frac{18}{9} = \frac{3}{9} \quad \Leftrightarrow \quad c = 3$$

$$5\frac{x-3}{(x+1)(x^2+9)} = \frac{-2}{x+1} + \frac{bx+3}{x^2+9}$$

On multiplie par x l'expression et on fait tendre x vers $+\infty$ et on obtient à la limite $0 = -2 + b$ donc $b = 2$. Finalement

$$5\frac{x-3}{(x+1)(x^2+9)} = \frac{-2}{x+1} + \frac{2x+3}{x^2+9} = \frac{-2}{x+1} + \frac{2x}{x^2+9} + \frac{3}{x^2+9}$$