33. Séries entières

1. Séries entières d'une variable complexe

Définition 1.
Pour tout $z_0 \in \mathbb{C}$ et tout $r \geqslant 0$, on note $D(z_0, r)$ le disque ouvert de centre z_0 et de rayon r et $\overline{D}(z_0, r)$ le disque fermé correspondant :

$$D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C}, |z - z_0| < r\} \qquad \text{et} \qquad \overline{D}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C}, |z - z_0| \leqslant r\}.$$

On note $\mathcal{C}(z_0, r)$ le cercle de centre z_0 et de rayon r :

$$\mathcal{C}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C}, |z - z_0| = r\}.$$

1.1. Définition et rayon de convergence

Définition 2.
Soit z_0 un nombre complexe. Une série entière centrée en z_0 est une série de fonctions de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ notée $\sum\limits_{n \geqslant 0} a_n (z - z_0)^n$. Les complexes a_n s'appellent les coefficients de la série entière.
En notant $\mathcal{D} = \left\{z \in E, \text{ la série } \sum\limits_{n \geqslant 0} a_n (z - z_0)^n \text{ converge}\right\}$, la **fonction somme** de la série entière est la fonction

$$\begin{array}{rccl} S : & \mathcal{D} & \to & \mathbb{C} \\ & z & \mapsto & \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n. \end{array}$$

Remarque :

— Les fonctions polynômes sont des cas particuliers de fonctions sommes de séries entières, la suite des coefficients étant nulle à partir d'un certain rang.
— Le but ici est de déterminer le domaine de définition de cette série entière, c'est-à-dire l'ensemble des complexes z tels que la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} a_n(z-z_0)^n$ converge, et d'étudier les propriétés de la fonction somme.
— Pour simplifier, on considérera souvent dans ce chapitre des séries entières centrées en 0, c'est-à-dire de la forme $\sum\limits_{n \geqslant 0} a_n z^n$. Les résultats restent valables pour les séries centrées en z_0, en posant $Z = (z - z_0)$.

Définition 3.

Soit $\sum\limits_{n \geqslant 0} a_n z^n$ une série entière. L'ensemble des réels positifs r tels que $\sum\limits_{n \geqslant 0} |a_n| r^n$ converge est un intervalle de la forme $[0, R[$ (où $R > 0$ est un nombre réel ou $+\infty$), ou de la forme $[0, R]$ (où $R \in \mathbb{R}^+$). Ce nombre R (appartenant à $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$) est le **rayon de convergence** de la série entière $\sum\limits_{n \geqslant 0} a_n z^n$.

Exemples.

1. Soit $P = \sum_0^N a_k x^k$ un polynôme à coefficients complexe. Comme la somme

$$\sum_{n \geqslant 0} |a_k| r^k = \sum_{0}^{N} |a_k| r^k$$

est finie pour tout tout $r \in \mathbb{R}^+$, la série converge pour $r \in \mathbb{R}^+$. Donc le rayon de convergence est $+\infty$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = 1$. La série entière centrée en 0 est $\sum\limits_{n \geqslant 0} z^n$. Soit

$r \in \mathbb{R}^+$, on étudie la convergence de la série :

$$S_N(r) = \sum_0^N r^n = \frac{1 - r^{N+1}}{1 - r} \begin{cases} \to \frac{1}{1-r} & \text{si } r < 1 \\ \to +\infty & \text{si } r \geqslant 1 \end{cases}$$

Donc la série converge si et seulement si $r \in [0, 1[$. Donc le rayon de convergence de la série entière est $R = 1$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \frac{1}{n!}$, donc la série est $\sum_{n \geqslant 0} \frac{z^n}{n!}$. Soit $r \in \mathbb{R}^+$, on étudie la convergence de la série $\sum_{n \geqslant 0} \frac{r^n}{n!}$. On a

$$\frac{r^{n+1}/(n+1)!}{r^n/n!} = \frac{r}{n+1} \to 0 < 1$$

donc, par critère de d'Alembert, la série converge pour tout $r \in \mathbb{R}^+$. Donc le rayon de convergence de cette série est $R = +\infty$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = n!$ et on étudie $\sum_{n \geqslant 0} n! z^n$. Soit $r \in \mathbb{R}^+$, on étudie la convergence de la série $\sum_{n \geqslant 0} n! r^n$:

$$\frac{r^{n+1}(n+1)!}{r^n n!} = r(n+1) \to \infty$$

si $r \neq 0$, donc la série diverge pour tout $r \in \mathbb{R}^{\star +}$. Donc le rayon de convergence de cette série est $R = 0$.

Propriété 4.

Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.

— Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument.

— Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > R$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ diverge.

Si R est un réel strictement positif, le disque ouvert $D(0, R)$ est appelé le disque de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$.

Début
Précédent
Suivant
Table
Plein écran
Fermer

Remarque : Pour $|z| = R$, c'est à dire sur le cercle $\mathcal{C}(0, R)$, tout peut arriver.

Exemple.

1.2. La règle de D'Alembert pour les séries entières

Théorème 5.

Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière dont les coefficients a_n sont **tous non nuls**. Si la suite $\left(\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite ℓ dans $\overline{\mathbb{R}}$, alors le rayon de convergence R de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ est donné par $R = \dfrac{1}{\ell}$. (avec la convention $\dfrac{1}{+\infty} = 0$ et $\dfrac{1}{0} = +\infty$).

Démonstration. On étudie la convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 0} |a_n| r^n$ pour $r \in \mathbb{R}^+$. Pour $r \neq 0$, on a une série à terme strictement positif et

$$\frac{|a_{n+1}|r^{n+1}}{|a_n|r^n} = r\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \text{ donc } \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|r^{n+1}}{|a_n|r^n} = r\ell$$

Par la règle de d'Alembert des série, on a donc convergence si $r\ell < 1$, c'est à dire $r < \frac{1}{\ell}$ et divergence si $r\ell > 1$, c'est à dire $r > \frac{1}{\ell}$. Donc le rayon de convergence est $R = \frac{1}{\ell}$.

Remarque : La règle de D'Alembert peut être appliquée avec une série entière dont tous les coefficients sont tous non nuls au delà d'un certain rang.

Exemple. Calculer le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{2^n}{n} z^n$.

1.3. Opérations sur les séries entières

Propriété 6.

Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b On considère la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} (a_n + b_n) z^n$ de rayon de convergence R_{a+b}. Pour tout $z \in \mathcal{D}\big(0, \min(R_a, R_b)\big)$, $\sum\limits_{n\geqslant 0} (a_n+b_n) z^n$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n.$$

De plus, si $R_a \neq R_b$ alors $R_{a+b} = \min(R_a, R_b)$.

Remarque : Si $R_a = R_b$ le rayon de convergence R_{a+b} peut être supérieur au $\min(R_a, R_b)$.

Début
Précédent
Suivant
Table
Plein écran
Fermer

Propriété 7.

Soient $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière dont on note R_a le rayon de convergence et $\lambda \in \mathbb{C}$. Si $\lambda \neq 0$, alors le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \lambda a_n z^n$ est égal à R_a et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda a_n z^n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

Si $\lambda = 0$ alors la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \lambda a_n z^n$ a un rayon de convergence infini et vaut 0 en tout point.

2. Série entière d'une variable réelle

Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière d'une variable réelle x de rayon de convergence $R > 0$. Le rayon de convergence de cette série entière est défini de la même manière que précédemment, mais on parle maintenant d'intervalle de convergence. Cet intervalle de convergence peut être $[-R, R], [-R, R[,]-R, R]$ ou $]-R, R[$ suivant que la série entière converge ou non en R et $-R$.

Théorème 8.

Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ dont on note S la fonction somme.

1. La fonction S est continue sur l'intervalle $]-R, R[$.
2. Si la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n R^n$ converge alors la fonction S est continue en R.
3. Si $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n (-R)^n$ converge alors la fonction S est continue en $-R$.
4. La fonction somme S est dérivable sur $]-R, R[$, sa dérivée a aussi pour rayon de convergence R et pour tout $x \in]-R, R[$, on a

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \quad \text{(on dérive la série entière terme à terme).}$$

Remarque : La série entière dérivée s'écrit aussi : $\sum\limits_{n\geqslant 0} (n+1) a_{n+1} x^n$.

Début
Précédent
Suivant
Table
Plein écran
Fermer

Corollaire 9.

Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R>0$ dont on note S la fonction somme. La fonction S est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R,R[$ et pour tout $k\in\mathbb{N}$ et tout $x\in]-R,R[$, on a

$$S^{(k)}(x)=\sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)a_n x^{n-k}=\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{n!}{(n-k)!}a_n x^{n-k}.$$

En particulier, pour tout $k\in\mathbb{N}$, on a $S^{(k)}(0)=k!a_k$.

Début
Précédent
Suivant
Table
Plein écran
Fermer

Exemple.

2.2. Intégration

Théorème 10.

Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R>0$ dont on note S la fonction somme. Sur $]-R,R[$, une primitive de la fonction S est la fonction somme de la série entière

$$\sum_{n\geqslant 0}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$$

Cette série a aussi pour rayon de convergence R

Remarque : On peut donc écrire que pour tout $x\in]-R,R[$, on a

$$\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{+\infty}a_n t^n\right)\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1},$$

ce qui signifie qu'on peut intégrer la série entière terme à terme.

Exemple.

3. Développements en séries entières

3.1. Fonctions développables en série entière

Définition 11.

Une fonction f définie sur un intervalle $]-r,r[$ (avec $r > 0$) est dite **développable en série entière** sur $]-r,r[$ s'il existe une série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ de rayon de convergence $R \geqslant r$ telle que :

$$\forall x \in]-r,r[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Exemple.

3.2. Unicité et écriture du développement en série entière d'une fonction

Théorème 12.

Soit f une fonction réelle développable en série entière sur $]-r,r[$ (avec $r>0$) et $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R\geqslant r$ telle que l'on ait :

$$\forall x \in]-r,r[, \quad f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-r,r[$ et les coefficients a_n sont uniques et déterminés par la formule :

$$\forall n\in\mathbb{N}, \quad a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Démonstration. On a vu précédemment que la fonction somme S de la série entière qui coïncide avec f sur $]-r,r[$ est de classe C^∞ sur $]-r,r[$ et l'on a pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f^{(n)}(0)=S^{(n)}(0)=n!a_n$. Ceci donne pour tout $n\in\mathbb{N}$, $a_n=\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

Remarque : Si f est développable en série entière sur $]-r,r[$, la valeur des coefficients a_n montre que l'on obtient un développement limité de f en 0 à n'importe quel ordre en tronquant le développement en série entière de f.

Attention : Ce n'est pas parce qu'une fonction est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-r,r[$ qu'elle est développable en série entière sur $]-r,r[$.

Corollaire 13.

Soit f une fonction développable en série entière sur $]-r,r[$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ la série entière telle que :

$$\forall x \in]-r,r[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

1. Si f est paire alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $a_{2n+1} = 0$. (ie les coefficients devant les monômes de degré impair sont tous nuls).
2. Si f est impaire, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{2n} = 0$. (ie les coefficients devant les monômes de degré pair sont tous nuls).

3.3. Opérations sur les fonctions développables en série entières

Théorème 14.

L'ensemble des fonctions développables en série entière sur $]-r,r[$ est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions définies sur $]-r,r[$. Autrement dit, si f et g sont deux fonctions développables en série entière sur $]-r,r[$ et λ un réel, alors $f+\lambda g$ est développable en série entière sur $]-r,r[$.

Propriété 15.

Soit f une fonction réelle définie sur $]-r,r[$. Si f est développable en série entière sur $]-r,r[$, alors les dérivées à tout ordre de f et les primitives successives de f sont développables en série entière sur $]-r,r[$.

3.4. Développements en série entière usuels

On a déjà vu :

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in]-1,1[, \text{ on a } \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \quad \text{et} \quad \ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}}$$

Par conséquent,

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[, \quad \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n \text{ et } \quad \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n.}$$

On a vu en début de chapitre que la série entière $\sum \frac{x^n}{n!}$ avait un rayon de convergence infini. De plus la fonction S définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, \ S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ est dérivable et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n!} x^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = S(x).$$

Ainsi, la fonction S ainsi définie, est l'unique solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle du premier ordre $y' - y = 0$ telle que $y(0) = 1$ et donc $S = \exp$. On en déduit :

$$\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \text{ on a } \quad \exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\mathrm{ch}(x) = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$, donc par combinaison linéaire,

$$\mathrm{ch}(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\frac{x^n + (-x)^n}{n!}}_{\text{terme nul pour } n \text{ impair}} = \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{2x^{2p}}{(2p)!} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{2p}}{(2p)!}.$$

En écrivant que $\mathrm{sh}(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$, on obtient de même que $\mathrm{sh}(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \dfrac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}$

On retient :

$$\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad \text{on a} \quad \mathrm{ch}(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{2p}}{(2p)!} \quad \text{et} \quad \mathrm{sh}(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}.}$$

Technique. Pour déterminer le développement en série entière de sin autour de 0, nous allons utiliser une méthode qui repose sur les équations différentielles (**Méthode à retenir**).

On obtient donc que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\sin(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \dfrac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}$. La fonction cos étant la dérivée de sin, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\cos(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \dfrac{x^{2p}}{(2p)!}$. On retient :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} \quad \text{et} \quad \cos(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!}.}$$

La même méthode permet de prouver que :

$$\boxed{\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in]-1,1[, \quad (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n.}$$

Remarque : pour $n = 0$ la formule $\dfrac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}$ vaut 1.

Pour $\alpha = -1$, on obtient $\dfrac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n n!}{n!} x^n$ c'est-à-dire : $\dfrac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$.

Si $\alpha = k \in \mathbb{N}$, on obtient la formule du binôme de Newton : $(1+x)^k = \sum_{k=0}^{n} \dbinom{n}{k} x^k$.

4. Exponentielle complexe et fonctions associées

Définition 16.

La série entière $\sum_{n \geqslant 0} \frac{z^n}{n!}$ de la variable complexe z a un rayon de convergence infini.

L'application $\exp : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = \mathrm{e}^z \end{array}$ est appelée exponentielle complexe.

Remarque :

1. Lorsque z est un nombre réel, on retrouve bien la fonction exponentielle réelle.
2. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On a d'après ce qui précède :

$$\cos(\theta) + i \sin(\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\theta^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\theta^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(i\theta)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(i\theta)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!}$$

donc on retrouve bien la formule $\exp(i\theta) = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$.

Fiche d'exercices XXXIII : Séries entières

Exercice 1

($\star$) Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 2, et $\sum_{n\geqslant 0} b_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 3.

1. Les séries (numériques) $\sum_{n\geqslant 0} a_n \left(\frac{3}{2}\right)^n$, $\sum_{n\geqslant 0} a_n \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} a_n 3^n$ convergent-elles ?
2. Que peut-on dire sur $\sum_{n\geqslant 0} a_n 2^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} a_n (-2)^n$?
3. Que peut-on dire sur le rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 0} (a_n - b_n) z^n$?

Exercice 2

($\star\star$)Soit $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R et $\lambda \in \mathbb{C}$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière : $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \lambda^n a_n z^n$.

Exercice 3

($\star\star$) Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$a) \quad \sum_{n\geqslant 1} \frac{n^n}{n!} z^n \quad b) \quad \sum_{n\geqslant 1} \frac{(2n)!}{n! n^n} z^n \quad c) \quad \sum_{n\geqslant 1} \frac{2n^2+1}{3n^3+2} z^n$$

Début
Précédent
Suivant
Table
Plein écran
Fermer

Exercice 4

($\star$) Soit la série entière

$$s(x) = \sum_{n \geqslant 0} \frac{4n}{6n^2 - 1} x^n$$

de rayon de convergence 1.

1. Calculer la série entière dérivée s' et une série entière S primitive de s.
2. Quel est le rayon de convergence de s' et de S ?

Exercice 5

($\star$) Donner le développement en série entière de la fonction $f(x) = e^x + \frac{1}{1-x}$, ainsi que son rayon de convergence.

Exercice 6

($\star\star$) Soit θ un nombre réel quelconque. Déterminer le rayon de convergence et calculer la somme des séries entières suivantes :

$$\sum_{n \geqslant 0} \frac{\cos(n\theta)}{n!} x^n \qquad \text{et} \qquad \sum_{n \geqslant 0} \frac{\sin(n\theta)}{n!} x^n.$$

Exercice 7

($\star\star$) Calculer le rayon de convergence et la somme des séries entières suivantes :

$$a) \quad \sum_{n \geqslant 1} \left(n + \frac{1}{n}\right) x^n \qquad b) \sum_{n \geqslant 1} (n^2 + n) x^n$$

Exercice 8

(⋆⋆) On considère la série entière $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)} x^n$ et sa somme

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} x^n$$

1. Déterminer le rayon de convergence R de cette série entière.
2. Montrer que la somme S est une solutions de l'équation différentielle $xy' + y = f(x)$, où f est une fonction à déterminer.
3. Exprimer S sur $]-R, R[$ à l'aide de fonctions usuelles.
4. En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)}$.

Exercice 9

(⋆⋆) En résolvant une équation différentielle, retrouver le développement en série entière autour de 0 de la fonction $x \mapsto (1+x)^\alpha$ où α est un réel quelconque.

Table des matières