29. Séries numériques

1. Généralités

1.1. Définitions et premiers exemples

Définition 1.

Soit $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ une suite de nombres réels ou complexes.

La série de terme général u_n est l'addition formelle infinie de tous les termes de $(u_n)_{n \geqslant n_0}$. Cette série se note

$$\sum_{n \geqslant n_0} u_n$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, le terme $S_N = \sum_{n=n_0}^{N} u_n$ est appelé la somme partielle de rang N de cette série.

La suite $(S_N)_{N \geqslant n_0}$ est appelée la suite des sommes partielles de la série $\sum_{n \geqslant n_0} u_n$.

Définition 2.

Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite de nombres réels ou complexes. La série $\sum\limits_{n\geqslant n_0} u_n$ est dite convergente si et seulement si la suite $(S_N)_{N\geqslant n_0}$ de ses sommes partielles est convergente. Dans ce cas, sa limite $S = \lim\limits_{N\to+\infty} S_N$ est appelée la somme de la série $\sum\limits_{n\geqslant n_0} u_n$ et l'on note

$$S = \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$$

(Remarquer la différence de notation entre la série et la somme de celle-ci, si elle existe.)

Si la suite $(S_N)_{N\geqslant n_0}$ diverge (vers $+\infty$,$-\infty$, ou n'a pas de limite), on dit que la série $\sum\limits_{n\geqslant n_0} u_n$ est divergente.

Remarque : Les séries associées aux suites $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ et $(u_n)_{n\geqslant n_1}$ sont de même nature. Autrement dit les premiers termes de la suite n'interviennent pas sur la convergence ou la divergence de la série de terme général u_n.

Exemple. Nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} n$.

La série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \alpha^n$ converge si et seulement si $\alpha \in]-1;1[$.

Par exemple, $\sum\limits_{n\geqslant 0} 2^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} (-1)^n$ divergent, $\sum\limits_{n\geqslant 0} (1/2)^n$ converge.

1.2. Premières propriétés de convergence

Propriété 3.

Si la série $\sum\limits_{n\geqslant n_0} u_n$ est convergente, alors la suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ converge vers 0.

Si la suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ ne converge pas vers 0, alors la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ diverge.

Exercice 1

Soit u_n défini par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \left(\arctan \frac{\operatorname{ch} n}{4}\right)^2$$

Etudier la convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$.

Remarque : Le fait que la suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ converge vers 0 ne permet pas de prouver que la série $\sum\limits_{n\geqslant n_0} u_n$ est convergente : la réciproque est fausse. (cf exemple ci-dessous)

Exemple. étudier la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$.

Théorème.

Soit $\sum\limits_{n\geqslant n_0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant n_0} v_n$ deux séries de nombres réels ou complexes et λ un scalaire.

1. Si les deux séries $\sum\limits_{n\geqslant n_0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant n_0} v_n$ sont convergentes alors la série $\sum\limits_{n\geqslant n_0} (u_n + \lambda v_n)$ est convergente et l'on a

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} (u_n + \lambda v_n) = \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n + \lambda \sum_{n=n_0}^{+\infty} v_n.$$

2. Si $\sum\limits_{n\geqslant n_0} u_n$ est convergente et $\sum\limits_{n\geqslant n_0} v_n$ divergente , alors la série $\sum\limits_{n\geqslant n_0} (u_n + v_n)$ est divergente.

Remarque :

1. Le premier point du théorème précédent assure que la somme de deux séries convergentes est convergente (c'est le cas λ=1).
2. Si les séries $\sum\limits_{n\geqslant n_0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant n_0} v_n$ sont divergentes, on ne peut rien dire de la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant n_0} (u_n + v_n)$.
3. Le théorème précédent montre que l'ensemble des suites dont la série associée est convergente est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites.

Série téléscopique Soit $(v_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite de nombres réels ou complexes. La série $\sum\limits_{n\geqslant n_0} (v_{n+1} - v_n)$ est dite téléscopique.

Technique. Etude de la convergence de la série. On calcule la somme partielle

$$S_N = \sum_0^N (v_{n+1} - v_n) = \sum_0^N v_{n+1} - \sum_0^N v_n = v_{N+1} - v_0$$

Si la suite (v_n) est convergente de limite ℓ, alors S_N converge vers $\ell - u_0$. La série est convergente. Et si la suite est divergente, alors la série aussi.

Exemple. Nature de la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)}$. La série est convergente car :

$$S_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^N -\frac{1}{n+1} + \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{N+1} \to 1; \quad N \to \infty$$

2. Séries à termes réels positifs

2.1. Comparaison avec une intégrale impropre

Théorème 5.

Soit $a \in \mathbb{N}$ et $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}^+$ une fonction continue, positive et décroissante sur $[a, +\infty[$ vérifiant $\lim_{t \to +\infty} f(t) = 0$. La série $\sum_{n \geqslant a} f(n)$ et l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ sont de même nature.

Application : les séries de Riemann

Théorème 6.

On appelle séries de Riemann les séries de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

La série de Riemann $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{1}{n^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.

Démonstration. Si $\alpha \leqslant 0$, alors la suite de terme général $\dfrac{1}{n^\alpha}$ ne converge pas vers 0. Donc la série est divergente.

Si $\alpha > 0$, on considère la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$ continue positive et décroissante sur $[1; +\infty[$. La série et l'intégrale étant de même nature $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ converge, c'est à dire pour $\alpha > 1$.

2.2. Comparaison de deux séries

2.2.1. Règle de comparaison

Théorème 7.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à termes positifs. On suppose qu'il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ au delà duquel on a :

$$\forall n \geqslant n_0,\ u_n \leqslant v_n$$

— Si la série $\sum\limits_{n\geqslant n_0} v_n$ est convergente, alors la série $\sum\limits_{n\geqslant n_0} u_n$ est convergente.

— Si la série $\sum\limits_{n\geqslant n_0} u_n$ est divergente, alors la série $\sum\limits_{n\geqslant n_0} v_n$ est divergente.

Exemples.

1. Donner la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{1}{\sqrt{n^4+n+1}}$.
2. Donner la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \left(\dfrac{1}{n} + \mathrm{e}^{-n}\right)$.

2.2.2. Règles de l'équivalent et du o

Théorème 8.

Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ et $(v_n)_{n\geqslant n_0}$ deux suites à termes réels positifs.
Si $u_n \sim v_n$, alors les séries $\sum\limits_{n\geqslant n_0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant n_0} v_n$ sont de même nature.

Si $u_n = o(v_n)$ et $\sum\limits_{n\geqslant n_0} v_n$ est convergente, alors $\sum\limits_{n\geqslant n_0} u_n$ est convergente.

Exemple. Donner la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$.

Exercice 2

Donner la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \left(\exp\left(\frac{1}{n^2}\right) - 1\right)$.

2.3. La règle de D'Alembert

Théorème 9.

Soit $\sum\limits_{n\geqslant n_0} u_n$ une série à termes strictement positifs et telle que
$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \ell \in \mathbb{R}$
($i.e.$ cette limite existe et elle est finie).

— Si $\ell < 1$, alors la série $\sum\limits_{n\geqslant n_0} u_n$ est convergente.

— Si $\ell > 1$, alors la série $\sum\limits_{n\geqslant n_0} u_n$ est divergente.

— Si $\ell = 1$, on ne peut pas conclure par cette méthode.

Remarque : Avec $\ell = 1$, on peut avoir aussi bien une série convergente ($\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$) qu'une série divergente ($\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n}$).

Exemple. Donner la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{n!}{n^n}$.

Exercice 3

Donner la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n!}$.

3. Convergence absolue

Définition.
Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite de nombres réels ou complexes. On dit que la série $\sum\limits_{n\geqslant n_0} u_n$ est absolument convergente si et seulement si la série $\sum\limits_{n\geqslant n_0} |u_n|$ est convergente.

Théorème.
Si une série $\sum\limits_{n\geqslant n_0} u_n$ est absolument convergente alors elle est convergente.

Exemple. Donner la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{\sin(n)}{n^2}$.

Remarque : Une série peut-être convergente sans être absolument convergente. Par exemple, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^n}{n}$ est convergente (cf paragraphe suivant) mais n'est pas absolument convergente.

4. Séries alternées

Définition 12.

On dit que la série de nombres réels $\sum_{n \geqslant n_0} u_n$ est alternée si son terme général est de la forme $u_n = (-1)^n a_n$ ou $u_n = (-1)^{n+1} a_n$, avec (a_n) une suite à termes positifs.

Remarque : On a $a_n = |u_n|$.

Théorème 13.

[Théorème spécial à certaines séries alternées] Soit $\sum_{n \geqslant n_0} u_n$ une série alternée telle que la suite $(a_n)_{n \geqslant n_0}$ soit décroissante et que $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$.

1. La série $\sum_{n \geqslant n_0} u_n$ est convergente vers une limite $S = \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$.
2. Sa somme S est comprise entre deux sommes partielles consécutives : pour tout $N \geqslant n_0$, la somme S est comprise entre S_N et S_{N+1}.
3. Sa somme S est du signe de u_0 et $|S| \leqslant |u_0|$.

Exemple. étudier la nature de la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$.

5. TD 29 Séries numériques

Exercice 1

($\star$) La série $\sum\limits_{n\geqslant 0} n^2$ est-elle convergente ?

Exercice 2

($\star$) Etudier la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^n}{\ln n}$.

Exercice 3

($\star\star$) Étudier la nature de la série de terme général u_n.

a) $u_n = \dfrac{\sqrt{n+1}}{n^2+1}$ *b*) $u_n = \dfrac{n^2+1}{-3n^4+n+1}$ *c*) $u_n = \exp\left(\dfrac{1}{n}\right) - 1$

d) $u_n = n^2 \sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$ *e*) $u_n = \sqrt{n}\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$ *f*) $u_n = \dfrac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n}}$

g) $u_n = \left(\dfrac{1}{n}\right)^n$ *h*) $u_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ *i*) $u_n = \dfrac{1}{n(n!)}$

j) $u_n = \dfrac{n^n}{n!(\mathrm{e}+1)^n}$ *k*) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^{2/3}}$ *ℓ*) $u_n = (-1)^n \sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$

Exercice 4

($\star\star$)

1. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(3n+1)(3n+4)}$ converge.
2. Décomposer la fraction rationnelle $\displaystyle\frac{1}{(3n+1)(3n+4)}$ en éléments simples.
3. En déterminant la valeur de la somme partielle d'ordre N de la série précédente, calculer :

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n+1)(3n+4)}.$$

Exercice 5

($\star\star$)

1. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^n$ converge pour tout réel x.
2. Donner un développement limité en 0 de la fonction $f(x) = \dfrac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$ à l'ordre n.
3. Que peut-on conjecturer ? Quelle serait alors la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$?

Table des matières