13. Vecteurs de $\mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}^n$ est l'ensembles des n-uplets d'éléments de $\mathbb{R}$, c'est à dire $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ avec $x_1, x_2, \cdots$ des réels. On appelle ces éléments des vecteurs. On peut les additionner et les multiplier par des constantes, donc on dit que $\mathbb{R}^n$ est un espace vectoriel (on approfondira cette notion au second semestre). Pour les calculs, on note les vecteurs en colonne.
On note $\vec{0} = (0, 0, \cdots, 0)$ le vecteur nul (de la taille adéquate).

1. Familles de vecteurs de $\mathbb{R}^n$

Définition 1.

Soit $\mathcal{F}(U_1, U_2, \ldots, U_p)$ une famille finie de vecteurs de $\mathbb{R}^n$. On appelle combinaison linéaire des vecteurs de la famille $\mathcal{F}$ tout vecteur X qui peut s'écrire

$$X = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k U_k = \lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 + \cdots + \lambda_p U_p$$

avec $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{R}$

1.1. Familles libres

Définition 2.

Soit $(U_1, U_2, \dots, U_p)$ une famille finie de vecteurs de $\mathbb{R}^n$.
On dit que la famille $(U_1, U_2, \dots, U_p)$ est libre si et seulement

$$\lambda_1 U_1 + \cdots + \lambda_p U_p = \vec{0}$$

est uniquement possible avec $\lambda_1 = 0, \dots, \lambda_p = 0$. Dans ce cas, aucun vecteur de la famille n'est combinaison linéaire des autres (lorsque $p \geqslant 2$). Les vecteurs de la famille sont linéairement indépendants.

Dans le cas contraire (où $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ ne sont pas tous nuls) la famille $(U_1, U_2, \dots, U_p)$ est liée. Un au moins des vecteurs de la famille est une combinaison linéaire des autres vecteurs de cette famille (lorsque $p \geqslant 2$).

Exemples.

1. Une famille à un vecteur (X) est libre si, et seulement si, X est non nul.
2. Une famille qui contient le vecteur nul $\vec{0}$ est liée. En effet $1.\vec{0}+0.X_1+\cdots+0.X_n = 0$ et les coefficients de cette combinaison linéaire ne sont pas tous nuls.
3. Une famille qui contient deux vecteurs colinéaires est liée.

Technique. On veut étudier si la famille de vecteurs $(U_1, U_2, \dots, U_p)$ de $\mathbb{R}^n$ est libre ou liée.
Soit $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 + \cdots + \lambda_p U_p = \vec{0}$$

On cherche ensuite les solutions $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$.

— Si la seule solution possible est que les λ_i sont nuls, $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_p = 0$, alors la famille est libre.

— Si on trouve une (ou plusieurs) solution avec $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ non tous nuls, alors la famille est liée.

Exemple. On étudie si la famille (u_1, u_2, u_3) avec $u_1 = (1,1,0)$, $u_2 = (1,2,1)$, $u_3 = (0,1,1)$ est libre

Exercice 1

La famille (v_1, v_2, v_3) avec $v_1 = (3,2,1)$, $v_2 = (1,1,2)$, $v_3 = (7,4,0)$ est-elle libre ou liée ?

1.2. Familles génératrices

Définition 3.

Une famille $\mathcal{U} = (U_1, U_2, \dots, U_p)$ de vecteur de $\mathbb{R}^n$ est génératrice de $\mathbb{R}^n$ si tout vecteur de $\mathbb{R}^n$ peut s'écrire au moins d'une façon comme combinaison linéaire des U_i. C'est à dire pour tout vecteur $X \in \mathbb{R}^n$, il existe des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ tels que

$$X = \lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 + \cdots + \lambda_p U_p$$

Technique. On étudie si une famille $(U_1, \dots, U_p)$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est génératrice de $\mathbb{R}^n$. Soit $X \in \mathbb{R}^n$. On cherche $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 U_1 + \cdots + \lambda_p U_p = X$.

— Si on peut trouver au moins une solution $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sans aucune condition sur X (pas d'équation auxiliaire), alors la famille $(U_1, \dots, U_p)$ est génératrice de $\mathbb{R}^n$.

— Si il y a des conditions sur X pour trouver des solutions $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ (les équations auxiliaires), alors la famille $(U_1, \dots, U_p)$ n'est pas génératrice de $\mathbb{R}^n$.

Exemple. La famille $(v_1, v_2, v_3) = \big((1,2,1), (3,1,2), (3,-4,1)\big)$ est-elle une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 2

La famille $(u_1, u_2, u_3, u_4) = \Big((1,0,1),(0,1,1),(-1,0,1),(0,2,1)\Big)$ est-elle génératrice de $\mathbb{R}^3$?

1.3. Bases de vecteurs

Définition 4.

Une famille de vecteurs $(U_1, U_2, \ldots, U_n)$ de $\mathbb{R}^n$ est appelée base de $\mathbb{R}^n$ si cette famille est libre et génératrice

Exemple. Dans $\mathbb{R}^n$, la famille de vecteurs $(E_1, E_2, \ldots E_n)$ de $\mathbb{R}^n$, formée de $E_1 = (1,0,0,\ldots)$, $E_2 = (0,1,0,\ldots), \ldots$ $E_n = (0,0,0,\ldots,0,1)$ est une base, appelée la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Corollaire 5.

1. Une famille génératrice de n vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est une base.
2. Une famille libre à n vecteurs dans $\mathbb{R}^n$ est une base.

Remarque : Les familles de n vecteurs de $\mathbb{R}^n$ ne sont pas toutes des bases, attention !

Début
Précédent
Suivant
Table
Plein écran
Fermer

Théorème 6. Si $\mathcal{B} = (U_1, U_2, \dots, U_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$, alors pour tout vecteur X de $\mathbb{R}^n$, il existe des coefficients $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ uniques tels que

$$X = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i U_i = \lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 + \cdots + \lambda_n U_n$$

X s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs de la famille $\mathcal{B}$. Le n-uplet $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ s'appelle les coordonnées de X dans la base $\mathcal{B}$.

Exemple. Dans $\mathbb{R}^3$, le vecteur $X = (x, y, z)$ a pour coordonnées (x, y, z) dans la base canonique $(E_1(1,0,0), E_2(0,1,0), E_3(0,0,1))$.

Exemple. La famille $(u_1, u_2, u_3) = ((2,1,0), (0,3,1), (1,1,1))$ forme-t-elle une base de $\mathbb{R}^3$? Le cas échéant, donner les coordonnées du vecteur $(2,4,1) \in \mathbb{R}^3$ dans cette base.

1.4. Matrices de passage

Définition 7. Soit $\mathcal{B} = (U_1, U_2, \dots, U_p)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$. La matrice de la famille $\mathcal{B}$ est formée en mettant côte à côte, en colonne, les vecteurs de la famille $\mathcal{B}$.

Définition 8. Soit $\mathcal{B} = (U_1, U_2, \dots, U_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{C}$ la base canonique. La matrice de la famille $\mathcal{B} = (U_1, U_2, \dots, U_n)$ est appelée matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$ et on la note $P(\mathcal{C}, \mathcal{B})$. C'est une matrice carrée et inversible.

Début
Précédent
Suivant
Table
Plein écran
Fermer

Remarque : La famille de vecteurs $(E_1, E_2, \dots E_n)$ de $\mathbb{R}^n$, formée de $E_1 = (1, 0, 0, \dots)$, $E_2 = (0, 1, 0, \dots), \dots \; E_n = (0, 0, 0, \dots, 0, 1)$ est une base, appelée la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Sa matrice est l'identité.

Exemple. Dans $\mathbb{R}^2$, on considère la base canonique $\mathcal{C} = (E_1(1, 0), E_2(0, 1))$ et la famile $\mathcal{B} = (U(1, 1), V(-1, 1)$. Les vecteurs U et V sont indépendants (donc libre) et la famille contient 2 vecteurs, donc $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{R}^2$. La matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$ est

$$P(\mathcal{C}, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 3

Soit $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}_1$ la base de $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$\mathcal{B}_1 = \big((1, 2, 1), (2, 3, 3), (3, 7, 1)\big)$$

Donner la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{C}$ à la base $\mathcal{B}_1$.

Utilisation des matrices de passage. Soit $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{B} = (U_1, \dots, U_n)$ une autre base de $\mathbb{R}^n$ de matrice de passage $P(\mathcal{C}, \mathcal{B})$. On considère $X = (x_1, \cdots, x_n)$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$. $(x_1, \cdots, x_n)$ correspond aussi aux coordonnées de X dans la base canonique.

Les coordonnées de X dans la base $\mathcal{B}$ sont $(x'_1, \dots, x'_n)$, ce qui signifie que $X = x'_1 U_1 + \cdots + x'_n U_n$. On pose les coordonnées en colonne, en précisant par un indice $\mathcal{B}$ ou $\mathcal{C}$ dans quelle base on est :

$$X_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} ; \qquad X_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

Début
Précédent
Suivant
Table
Plein écran
Fermer

Propriété 9.

Avec les notations précédentes :

$$X_{\mathcal{C}} = P(\mathcal{C},\mathcal{B})X_{\mathcal{B}}, \qquad \text{et} \qquad X_{\mathcal{B}} = (P(\mathcal{C},\mathcal{B}))^{-1}X_{\mathcal{C}}$$

Remarque : La deuxième égalité signifie que, pour trouver les coordonnées d'un vecteur X dans une nouvelle base $\mathcal{B}$, il suffit de multiplier X par l'inverse de la matrice de passage de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{B}$.

Exemple. On considère $\mathcal{B} = (U(1,1), V(-1,1))$ base de $\mathbb{R}^2$. Sa matrice de passage est $P(\mathcal{C},\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Soit un vecteur X de coordonnées (a,b) dans la base $\mathcal{B}$, c'est à dire $X = aU + bV$. Alors, les coordonnées de X dans la base canonique sont

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b \\ a+b \end{pmatrix}$$

Soit X de coordonnées canoniques (x,y). On veut calculer les coordonnées de X dans la base $\mathcal{B}$. On a donc besoin de $P(\mathcal{C},\mathcal{B})^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Les coordonnées du vecteur X dans la base $\mathcal{B}'$ sont donc

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x+y}{2} \\ \frac{y-x}{2} \end{pmatrix}$$

C'est à dire $X = \frac{x+y}{2}U + \frac{y-x}{2}V$.

Exercice 4

Soit $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}_1$ la famille de $\mathbb{R}^3$ définie par : $\mathcal{B}_1 = \big((1,2,1),(2,3,3),(3,7,1)\big)$. On a

$$P(\mathcal{C},\mathcal{B}_1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 7 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P(\mathcal{C},\mathcal{B}_1)^{-1} = \begin{pmatrix} -18 & 7 & 5 \\ 5 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Soit X vecteur de coordonnées canoniques $(1,-3,2)$. Donner les coordonnées de X dans la base $\mathcal{B}_1$.

On sait donc passer de la base canonique à $\mathcal{B}$ (grâce à $P(\mathcal{C},\mathcal{B})^{-1}$) et de $\mathcal{B}$ à la base canonique (grâce à $P(\mathcal{C},\mathcal{B})$). Comment passer d'une base quelconque à une autre base quelconque ?

Définition 10.

Soient deux bases de $\mathbb{R}^n$: $\mathcal{B}$ de matrice de passage $P(\mathcal{C},\mathcal{B})$ et $\mathcal{B}'$ de matrice de passage $P(\mathcal{C},\mathcal{B}')$. La matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{B}'$ est la matrice

$$P(\mathcal{B},\mathcal{B}') = P(\mathcal{C},\mathcal{B})^{-1}P(\mathcal{C},\mathcal{B}')$$

.

Démonstration. On considère deux bases de $\mathbb{R}^n$: $\mathcal{B}$ de matrice de passage $P(\mathcal{C},\mathcal{B})$ et $\mathcal{B}'$ de matrice de passage $P(\mathcal{C},\mathcal{B}')$. Soit un vecteur X (on est donc implicitement en base canonique). Notons $X_{\mathcal{B}}$ le vecteurs des coordonnées de X dans la base $\mathcal{B}$ et $X_{\mathcal{B}'}$ le vecteurs des coordonnées de X dans la base $\mathcal{B}'$. On veut des formules pour passer de $X_{\mathcal{B}}$ à $X_{\mathcal{B}'}$ et inversement. D'après ce qui précède, on a les relations suivantes :

$$(1) X = P(\mathcal{C},\mathcal{B})X_{\mathcal{B}}, (2) X_{\mathcal{B}} = P(\mathcal{C},\mathcal{B})^{-1}X, (3) X = P(\mathcal{C},\mathcal{B}')X_{\mathcal{B}'}, (4) X_{\mathcal{B}'} = P(\mathcal{C},\mathcal{B}')^{-1}X$$

On reporte (3) dans (2) et (1) dans (4) :

$$(2) X_{\mathcal{B}} = P(\mathcal{C},\mathcal{B})^{-1} P(\mathcal{C},\mathcal{B}') X_{\mathcal{B}'},$$

$$(4) X_{\mathcal{B}'} = P(\mathcal{C},\mathcal{B}')^{-1} P(\mathcal{C},\mathcal{B}) X_{\mathcal{B}} = (P(\mathcal{C},\mathcal{B})^{-1} P(\mathcal{C},\mathcal{B}'))^{-1} X_{\mathcal{B}}$$

On a donc des formules directes pour aller de $X_{\mathcal{B}}$ à $X_{\mathcal{B}'}$ et inversement, en utilisant $P(\mathcal{C},\mathcal{B})^{-1} P(\mathcal{C},\mathcal{B}')$.

Propriété 11.

Soit un vecteur X de $\mathbb{R}^n$, avec $X_{\mathcal{B}}$ le vecteurs des coordonnées de X dans la base $\mathcal{B}$ et $X_{\mathcal{B}'}$ le vecteurs des coordonnées de X dans la base $\mathcal{B}'$. On a alors

$$X_{\mathcal{B}} = P(\mathcal{B},\underbrace{\mathcal{B}')X_{\mathcal{B}'},}_{} \qquad \text{et} \qquad X_{\mathcal{B}'} = (P(\mathcal{B},\mathcal{B}'))^{-1} X_{\mathcal{B}}$$

Propriété 12.

1. Soient $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3$ trois bases de $\mathbb{R}^n$. On a

$$P(\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2) \times P(\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_3) = P(\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_3)$$

2. Toute matrice de changement de base est inversible. De plus, si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de $\mathbb{R}^n$, l'inverse de la matrice $P(\mathcal{B},\mathcal{B}')$ est la matrice $P(\mathcal{B}',\mathcal{B})$, autrement dit

$$P(\mathcal{B},\mathcal{B}')^{-1} = P(\mathcal{B}',\mathcal{B}).$$

3. Les colonnes de la matrice $P(\mathcal{B},\mathcal{B}')$ de passage de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{B}'$ sont formées avec les coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}'$ exprimés dans la base $\mathcal{B}$.

Remarque : En particulier, on remarque que la matrice de passage d'une base $\mathcal{B}$ à une base $\mathcal{B}'$ peut se calculer par $P(\mathcal{B}, \mathcal{B}') = P(\mathcal{B}, \mathcal{C},)P(\mathcal{C}, \mathcal{B}')$.

Exemple. On note $\mathcal{C}$ la base canonique et on considères toujours $\mathcal{B} = (U(1,1), V(-1,1))$ base de $\mathbb{R}^2$. La matrice de passage de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{B}$ est $P(\mathcal{C}, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et on sait que $P(\mathcal{C}, \mathcal{B})^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Donc $P(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et on peut en déduire les coordonnées des vecteurs de la base canonique dans la base $\mathcal{B}$. Le vecteur $(1,0)$ a pour coordonnées $(1/2, -1/2)$ et les vecteur $(0,1)$ a pour coordonnées $(1/2, 1/2)$ dans la base $\mathcal{B}$.

Effet des changements de base sur les systèmes Soit $AX = B$ un système d'équation linéaires de n lignes et n inconnues (donc A est une matrice carrée). On considères une base $\mathcal{B}$, et $P = P(\mathcal{C}, \mathcal{B})$ la matrice de passage de la base canonique vers la base $\mathcal{B}$. On exprime X et B dans la base $\mathcal{B}$: $X = PX_{\mathcal{B}}$ et $B = PB_{\mathcal{B}}$, qu'on reporte dans le système

$$AX = B \Leftrightarrow APX_{\mathcal{B}} = PB_{\mathcal{B}} \Leftrightarrow \underbrace{P^{-1}AP}_{A'}X_{\mathcal{B}} = B_{\mathcal{B}} \Leftrightarrow A'X_{\mathcal{B}} = B_{\mathcal{B}}$$

On a transformé le système $AX = B$ en un système $A'X_{\mathcal{B}} = B_{\mathcal{B}}$, où $A' = P^{-1}AP$. On verra quand on parlera de diagonalisation l'intérêt de A'.

2. Sous-espace vectoriels dans $\mathbb{R}^n$

2.1. Définition

Définition 13.

Un sous-ensemble (une partie) F de $\mathbb{R}^n$ est appelé un sous-espace vectoriel (s.e.v) si F vérifie les deux propriétés suivantes :

1. $\vec{0} \in F$: le **vecteur nul** appartient à F.
2. $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall X, Y \in F, \quad \lambda X + Y \in F$. C'est-à-dire que F est stable par addition et par multiplication par un scalaire.

Début

Précédent

Suivant

Table

Plein écran

Fermer

Exemples.

1. $\mathbb{R}^n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. En fait, $\mathbb{R}^n$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
2. $\{\vec{0}\}$ (le sous ensemble de $\mathbb{R}^n$ ne contenant que le vecteur nul) est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.
3. Dans $\mathbb{R}^2$, toute droite passant par l'origine est un sous-espace vectoriel. Dans $\mathbb{R}^3$, tout plan passant par l'origine est un sous-espace vectoriel.

Exercice 5

On se place dans $\mathbb{R}^3$ et on considère l'ensemble

$$F = \{(x, 0, 0), \quad x \in \mathbb{R}\}$$

1. Donner deux exemples de vecteurs de F.
2. Soient $X = (x, 0, 0)$ et $Y = (y, 0, 0)$ deux vecteurs de F, et λ un réel. Calculer $X + \lambda Y$. Est-ce que ce vecteur est dans F ?
3. Que vient-on de démontrer pour F ?

Propriété.

Un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^n$ est stable par combinaisons linéaires. Autrement dit, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in \mathbb{R}^n,\ \forall(V_1,\dots,V_n) \in F^n,\ \lambda_1 V_1+\lambda_2 V_2+\cdots+\lambda_n V_n \in F.$$

2.2. sous-espace engendré par une famille de vecteurs

Définition 15.

Soit $\mathcal{F} = (X_1, X_2, \dots, X_m)$ une famille de m vecteurs de $\mathbb{R}^n$. On appelle Vect$(\mathcal{F})$ l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires des vecteurs de $\mathcal{F}$:

$$\mathrm{Vect}(\mathcal{F}) = \{\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \cdots + \lambda_m X_m, \quad \text{avec } \lambda_1, \dots \lambda_m \in \mathbb{R}\}$$

Vect$(\mathcal{F})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. On l'appelle le sous-espace vectoriel engendré par la famille $\mathcal{F}$.

Remarque : Vect$(\mathcal{F})$ ne dépend pas de l'ordre des vecteurs de la famille $\mathcal{F}$.

Exemples.

1. Si $\mathcal{F} = \{X\}$ ne contient qu'un seul vecteur, alors $\mathrm{Vect}(\mathcal{F}) = \{\lambda X, \lambda \in \mathbb{R}\}$ est l'ensemble des vecteurs colinéaires à X. C'est une droite vectorielle.
2. Dans $\mathbb{R}^2$, $\mathrm{Vect}(\{(2,3),(-1,2),(5,4)\})$ est formé des vecteurs

$$X = a\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2a-b+5c\\3a+2b+4c\end{pmatrix}$$

3. Si $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{R}^n$, alors $\mathrm{Vect}(\mathcal{F}) = \mathbb{R}^n$.

Exercice 6

Dans $\mathbb{R}^3$, donner les vecteurs de $F = \text{Vect}\{(0,1,9),(2,3,4)\}$.

Définition 16.

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs. Si $F = \text{Vect}\,\mathcal{F}$, on dit que la famille $\mathcal{F}$ engendre F, ou encore que les vecteurs de $\mathcal{F}$ forment une famille génératrice de F.

Exemple.

1. Si $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^n$, comme $\text{Vect}(\mathcal{B}) = \mathbb{R}^n$, alors $\mathcal{B}$ engendre $\mathbb{R}^n$.
2. La droite vectorielle $\{\lambda X, \lambda \in \mathbb{R}\}$ est engendrée par le vecteur X.

2.3. Sous-espace vectoriel défini par des équations

Propriété 17.

Soit A une matrice de $\mathcal{M}(n,p)$ et (S) le système d'équations linéaires $AX = \vec{0}$ (où X est le vecteur de inconnus de taille p et $\vec{0}$ le vecteur nul de taille n). Alors l'ensemble des solutions de (S) forment un sous-espace vectoriel.

Autrement dit, le sous-ensemble

$$\left\{X \in \mathbb{R}^p, \quad AX = \vec{0}\right\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^p$.

Exemple. $F = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \left\{\begin{array}{ccc} 2x & +4y & = 0 \\ 3x & -5y & = 0 \end{array}\right.\right\}$ est un sous espace vectoriel, avec

$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$.

Démonstration. Notons S l'ensemble des solutions du système (S). Le vecteur nul de taille p est une solution évidente du système, donc $\vec{0}$ est dans S. Soient X, Y deux vecteurs de S (donc des solutions du systèmes) et $\lambda \in \mathbb{R}$. On vérifie que $\lambda X + Y$ est dans S :

$$A(\lambda X + Y) = A(\lambda X) + AY = \lambda \underbrace{(AX)}_{=\vec{0}} + \underbrace{AY}_{=\vec{0}} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$$

$\lambda X + Y$ est bien une solution du système, donc $\lambda X + Y \in S$. Donc S est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^p$.

Définition.

Soit A une matrice ligne de taille $(1, p)$ et $AX = \vec{0}$ l'équation (en une seule ligne) associée. L'ensemble des solutions de l'équation $AX = \vec{0}$ forme un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^p$, qu'on appelle hyperplan défini par l'équation $AX = \vec{0}$.

Remarque : L'équation $AX = 0$ n'est pas unique. L'hyperplan peut être définie par une autre équation.

Exemples.

1. Dans $\mathbb{R}^2$, un hyperplan est l'ensemble des solutions d'une équation de la forme $ax + by = 0$. C'est donc une droite passant par O.
2. Dans $\mathbb{R}^3$, un hyperplan est l'ensemble des solutions d'une équation de la forme $ax + by + cz = 0$. C'est donc un plan passant par O.

Exercice 7

Parmi les ensembles suivants, lesquels sont bien des sous-espace vectoriels de $\mathbb{R}^2$ définis par un système linéaire d'équations homogènes ? Donner la matrice du système dans ce cas.

1. $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } y = x^2\}$
2. $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } x = y\}$

Parmi les ensembles suivants, lesquels sont bien des sous-espace vectoriels de $\mathbb{R}^3$ définis par un système linéaire d'équations homogènes ? Donner la matrice du système dans ce cas.

1. $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } y = 3x + 1\}$
2. $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } y = 3x\}$
3. $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } 3x - y = 0 \text{ et } 2x - z = 0\}$

Question bonus : prouvez que les ensembles qui ne sont pas définis par un système d'équations linéaires ne sont pas des sous-espaces vectoriels.

2.4. Famille génératrice et système d'équations

Un sous-espace vectoriel peut être défini à partir d'une famille génératrice ou d'un système d'équations, et il existe des méthode pour aller de l'un à l'autre. Par contre, attention à **l'ordre** des inconnues dans le système ! Il ne doit jamais changer en cours de route !

Technique. Soit $AX = \vec{0}$ un système d'équations linéaires à p inconnues et $F = \{X \in \mathbb{R}^p, AX = \vec{0}\}$ le sous-espace vectoriel formé des solutions de $AX = \vec{0}$.On veut écrire F à l'aide d'une famille génératrice.

On commence à le résoudre avec la méthode du pivot partiel de Gauss. Comme le second membre ne contient que 0, il ne peut pas y avoir d'équation auxiliaire $0 = b$ avec

$b \neq 0$, il y a toujours des solutions. Si il y a une unique solution (toutes les variables ont un pivot), cette solution est le vecteur nul, donc $F = \{\vec{0}\}$.

Sinon, il y a des variables auxiliaires (sans pivot) qu'on doit remplacer par des paramètres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ pour résoudre. Notons que si il y a r pivots, il y aura $p-r$ paramètres à poser.
Ainsi, tout vecteur X de F (solution du système) s'écrit à l'aide des paramètres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$.
On décompose X en une somme de vecteurs : le premier ne contenant que le paramètre λ_1, le second que le paramètre λ_2, ... puis pour chaque vecteur, on met le paramètre en facteur devant (de la forme $\lambda_i V_1$ avec V_i ne contenant plus de paramètres).
On a alors écrit X comme une combinaison linéaires de vecteurs fixes multipliés par les paramètres λ_i. On reconnait alors l'écriture d'un sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteur $(V_1, V_2, \ldots)$, c'est à dire $\boxed{F = \mathrm{Vect}(V_1, V_2, \ldots)}$. Remarquons que F est engendré par $p - r$ vecteurs.

Exemple. Si les solutions S d'un système à trois inconnues sont de la forme suivante :

$$X = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 \\ \lambda_1 \\ 2\lambda_1 - \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_1 \\ 2\lambda_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ 0 \\ -\lambda_2 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

L'espace vectoriel des solutions est donc engendré par la famille de deux vecteurs $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$. c'est à dire $S = \mathrm{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.

Exercice 8

Soit F le sous-espace vectoriel des vecteurs de $\mathbb{R}^2$ vérifiant le système suivant

$$\left\{ \begin{array}{cccc} 2x & +y & = & 0 \\ 26x & +13y & = & 0 \end{array} \right.$$

Donner une famille génératrice de F, c'est-à-dire écrire $F = \mathrm{Vect} \cdots$.

Technique. Soit $F = \mathrm{Vect}(V_1, V_2, \dots)$ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^p$ engendré par une famille de vecteur. On chercher cette fois à l'écrire à l'aide d'un système d'équations.

Soit X un vecteur de F de coordonnées $(x_1, x_2, \dots)$, alors X se décompose comme combinaison linéaire $X = \lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 + \dots$ avec $\lambda_i \in \mathbb{R}$. On obtient alors une égalité de vecteurs :

$$\lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 + \cdots = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

qu'on peut écrire sous forme de système (en enlevant les parenthèses des vecteurs). On obtient alors un système (S) où les λ_i sont les **inconnues** et les x_i les seconds membres. On commence à résoudre ce système avec la méthode du pivot de Gauss partiel.

Mais attention, ce ne sont pas les solutions qui nous intéressent, ce sont les équations auxiliaires ! Ce sont des équations contenant les coordonnées x_i de X. X est dans F si et seulement si les équations auxiliaires sont vérifiées. Donc F est définie par le système formé uniquement des équations auxiliaires.

Exercice 9

On considère le sous-espace vectoriel $F = \mathrm{Vect}\{(1, 2, 0), (-1, 0, 1)\}$. Déterminer le système d'équation qui caractérise F.

Début
Précédent
Suivant
Table
Plein écran
Fermer

3. Base d'un sous-espace vectoriel

Début
Précédent
Suivant
Table
Plein écran
Fermer

Définition 19.

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. On appelle base de F toute famille de vecteurs $\mathcal{F} = (X_1, X_2, \ldots, X_r)$ telle que

1. $\mathcal{F}$ engendre F, c'est à dire $F = \text{Vect}(\mathcal{F})$.
2. $\mathcal{F}$ est une famille libre, c'est à dire que les vecteurs $(X_1, X_2, \ldots, X_r)$ sont indépendants.

Exemple. Soit X un vecteur non nul et $F = \text{Vect}(X)$ droite vectorielle engendrée par X. Alors (X) est une base de F, puisqu'elle est génératrice et libre.

Propriété 20.

La famille $\mathcal{F} = (X_1, X_2, \ldots, X_r)$ est une base du sous espace vectoriel F si et seulement si tout vecteur X de F peut s'écrire **d'une façon et d'une seule** comme combinaison linéaire des X_i :

$$X = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i.$$

C'est à dire que les réels λ_i existent et sont uniques pour chaque $X \in F$.

3.1. Existence de base et dimension

Si F est un espace vectoriel engendré par une famille $\mathcal{F}$, on peut trouver une base en choisissant certains vecteurs de $\mathcal{F}$ de manière à avoir une deuxième famille $\mathcal{F}'$, qui engendre toujours F et qui est libre (donc une base). On peut même créer plusieurs bases (mais elles auront toujours le même nombre de vecteurs !).
D'une manière générale, on a le théorème suivant :

Théorème 21.

Tout sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^n$ possède une base $\mathcal{B}$.
De plus, toutes les bases d'un sous-espace vectoriel F ont le même nombre d'éléments. Ce nombre est appelé la dimension de F. On le note $dim(F)$.

Exemples.

1. le sous-espace vectoriel $\{\vec{0}\}$ formé du seul vecteur nul a, par convention, une base vide. Donc sa dimension est $dim(\{\vec{0}\}) = 0$. C'est même le seul sous-espace vectoriel de dimension nulle.
2. $\mathbb{R}^n$ (vu comme un sous-espace vectoriel) a comme base la base canonique par exemple. Cette base contient n éléments, donc $dim(\mathbb{R}^n) = n$.
3. Soit X un vecteur non nul et $F = \text{Vect}(X)$. (X) étant une base de F, on a $dim(F) = 1$

Exercice 10

Dans $\mathbb{R}^4$, on considère le sous-espace vectoriel F engendré par les vecteurs $u = (1, 1, 1, 1)$ et $v = (1, 2, 1, -3)$.
Quelle est la dimension de F ? En donner une base.

Propriété 22.

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. On a alors

$$0 \leqslant dim(F) \leqslant n$$

De plus :
- Si $dim(F) = 0$, alors $F = \{\vec{0}\}$.
- Si $dim(F) = n$, alors $F = \mathbb{R}^n$.

Propriété 23.

Si F et E sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ vérifiant $E \subset F$, alors on a $dim(E) \leqslant \dim(F)$.
De plus, si $E \subset F$ et $dim(E) = \dim(F)$, alors $E = F$.

La dimension d'un sous espace vectoriel impose des conditions sur le nombre d'éléments des familles libres, génératrices et des bases.

Propriété 24.

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension $dim(F)$:

— Toute famille libre de vecteurs de F contient au maximum $dim(F)$ vecteurs. De plus, si une famille libre contient exactement $dim(F)$ vecteurs, alors c'est une base.

— Toute famille génératrice de vecteurs de F contient au minimum $dim(F)$ vecteurs. De plus, si une famille génératrice contient exactement $dim(F)$ vecteurs, alors c'est une base.

Remarque : En nombre d'éléments, on a libre $\leqslant$ base $\leqslant$ génératrice.

Théorème.

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

— Toute famille $\mathcal{F}$ génératrice de F contient une base.

— De plus, si $\mathcal{F}$ est génératrice de F et si $\mathcal{G}$ est une famille libre de F, alors on peut compléter $\mathcal{G}$ avec des vecteurs de $\mathcal{F}$ pour former une base de F

— **(Théorème de la base incomplète)** Toute famille libre de F peut être complétée en une base.

3.2. Intersection de sous-espaces vectoriels

Propriété 26.

Si F et G sont deux s.e.v. de $\mathbb{R}^n$, alors leur intersection

$$F \cap G = \{v \in \mathbb{R}^n \,|\, v \in F \text{ et } v \in G\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Exemple. Dans $\mathbb{R}^3$, les sous-ensembles $F = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x+y+z=0\big\}$ et $G = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ 2x-y+3z=0\big\}$ sont des sous-espaces vectoriels. Donc $F \cap G$, qui est le sous-ensemble $\big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x+y+z=0 \text{ et } 2x-y+3z=0\big\}$ est aussi un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Remarque : Attention, la réunion de deux sous-espaces vectoriels n'est pas nécessairement un sous-espace vectoriel !

Exercice 11

Soient $P = \text{Vect}\{(1,0,1),(0,1,1)\}$ un plan et D la droite de $\mathbb{R}^3$ engendrée par $u = (2,0,1)$. Montrer que $D \cap P = \{(0,0,0)\}$.

3.3. Somme de deux sous-espaces vectoriels

Définition 27.

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$. L'ensemble $F+G = \{u+v,\ u \in F,\ v \in G\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ qu'on appelle la somme des sous-espaces vectoriels F et G.

Autrement dit, $F+G$ est l'ensemble des vecteurs qui peuvent se décomposer en la somme d'un élément de F et d'un élément de G.

Définition 28.
On dit que deux sous-espaces vectoriels F et G de $\mathbb{R}^n$ sont supplémentaires si tout vecteur de $\mathbb{R}^n$ peut se décomposer de façon unique comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.

Théorème 29.
Les sous-espaces vectoriels F et G sont supplémentaires si, et seulement si,

$$F + G = \mathbb{R}^n \qquad \text{et} \qquad F \cap G = \{0_n\}.$$

Dans ce cas, on note $\mathbb{R}^n = F \oplus G$.

Début
Précédent
Suivant
Table
Plein écran
Fermer

Exemple. Dans $\mathbb{R}^2$, on considère $F = \text{Vect}\{(-1, 1)\}$ et $G = \text{Vect}\{(2, 2)\}$. Montrer que ces espaces sont supplémentaires et écrire la décomposition d'un vecteur $X(x, y)$ sur $F \oplus G$.

4. TD 13 Vecteurs de $\mathbb{R}^n$

Exercice 1

($\star$) Dans $\mathbb{R}^2$, on considère la famille (X_1, X_2, X_3) avec $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Montrer que cette famille est liée.

Exercice 2

($\star\star$) Dans chacun des cas, déterminer si les vecteurs forment une famille libre, une famille génératrice ou une base de $\mathbb{R}^n$.

1. $v_1 = (1, 2, 1)$, $v_2 = (1, -1, 1)$
2. $v_1 = (1, 3, 1)$, $v_2 = (-1, 0, 1)$, $v_3 = (2, 3, 0)$, $v_4 = (0, 1, 1)$
3. $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (1, 3, -1)$, $v_3 = (1, -1, 3)$
4. $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (2, 1, 0)$, $v_3 = (1, 1, 1)$
5. $v_1 = (2, 0, 1, 3)$, $v_2 = (1, 1, 0, -1)$, $v_3 = (0, -2, 1, 5)$, $v_4 = (1, -3, 2, 9)$

Exercice 3

($\star\star$)

1. Montrer que la famille $\mathcal{B} = ((1, -1), (1, 0))$ de $\mathbb{R}^2$ est une base.
2. Trouver les coordonnées du vecteur $(2, 3)$ dans cette base (sans utiliser les matrices)
3. Donner la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$.
4. Calculer $P(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ et en déduire les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ du vecteur $(4, -1)$.

Exercice 4

($\star\star$) Soit $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ les familles de $\mathbb{R}^3$ définies par :

$$\mathcal{B}_1 = \big((1,2,1),(2,3,3),(3,7,1)\big) \qquad \text{et} \qquad \mathcal{B}_2 = \big((3,1,4),(5,3,2),(1,-1,7)\big).$$

1. Vérifier que $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ sont deux bases de $\mathbb{R}^3$.
2. Donner la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{C}$ à la base $\mathcal{B}_1$, puis la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_1$ à la base canonique $\mathcal{C}$.
3. Déterminer la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_1$ à la base $\mathcal{B}_2$.
4. Exprimer le premier vecteur de la base $\mathcal{B}_2$ comme combinaison linéaire des vecteurs de la base $\mathcal{B}_1$.

Exercice 5

($\star\star$) Dans $\mathbb{R}^2$, soient $\overrightarrow{u} = (1,3)$, $\overrightarrow{v} = (-5,2)$ et $F = \text{Vect}(\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\})$. Montrer que $X = (-7,13) \in F$.

Exercice 6

($\star\star\star$) Soit X un vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$ et $D = \text{Vect}(\{X\})$ la droite vectorielle engendrée par X. Montrer que $\mathcal{F}' = \{2X\}$ est aussi une famille génératrice de D.

Exercice 7

($\star$) Soient $u = (1,1,1)$ et $v = (0,0,1)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ pour que $(x,y,z) \in \text{Vect}(\{u,v\})$.

Début
Précédent
Suivant
Table
Plein écran
Fermer

Exercice 8

($\star\star$) Dans l'espace $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs :

$$v_1 = (1,1,1,1)\,,\ v_2 = (1,3,2,4)\,,\ v_3 = (2,1,4,0)\,,\ v_4 = (3,0,2,3)\,,\ v_5 = (2,0,0,1)\,.$$

Le but de l'exercice est de construire une base de $\mathbb{R}^4$ à l'aide de ces vecteurs.

1. Montrer que la famille $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ engendre $\mathbb{R}^4$. Est-ce une famille libre ?
2. Extraire de la famille $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ une base de $\mathbb{R}^4$.
3. Exprimer le vecteur restant comme combinaison linéaire des vecteurs de cette base.

Exercice 9

($\star\star$) Dans $\mathbb{R}^3$, on considère l'ensemble F des vecteurs (x, y, z) tel que

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 0 \\ 2x & - & y & + & z & = & 0 \end{array}\right.$$

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, en donner une base et sa dimension.

Exercice 10

($\star\star$) Dans $\mathbb{R}^4$, on considère le sous-espace vectoriel F engendré par les vecteurs $u = (1,1,1,1)$ et $v = (1,2,1,-3)$. Donner un système d'équations qui caractérise F.

Exercice 11

($\star\star$) Soit une famille de vecteurs $\mathcal{F}(u, v, w, z)$ génératrice de $\mathbb{R}^3$.

1. Cette famille peut-elle être une base de $\mathbb{R}^3$?
2. On suppose que z est une combinaison linéaire de (u, v, w). Prouver que la famille $\mathcal{F}'(u, v, w)$ est génératrice de $\mathbb{R}^3$. Que peut-on en conclure ?

Exercice 12

($\star\star$) Donner la dimension du sous-espace vectoriel (de $\mathbb{R}^3$ (1.) ou $\mathbb{R}^4$ (2.)) engendré par les familles composées des vecteurs suivants.

1. $u_1 = (1, 1, 0)$, $\quad u_2 = (0, 1, 1)$, $\quad u_3 = (1, 0, 1)$
2. $u_1 = (1, 0, 1, 0)$, $\quad u_2 = (1, 1, 0, 0)$, $\quad u_3 = (-1, -1, 1, 0)$, $\quad u_4 = (0, 0, 2, 0)$.

Exercice 13

($\star\star$) Soit P le plan de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x+y-z = 0$. Soit D la droite de $\mathbb{R}^3$ engendrée par $u = (2, 0, 1)$. Montrer que D et P sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$, et donner la décomposition de $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ sur $D \oplus P$.

Début
Précédent
Suivant
Table
Plein écran
Fermer

Table des matières