Révisions 30

Espaces vectoriels euclidiens

Afficher une page à la fois seulement.
Une page : une question
page suivante : la réponse.

Fiche 1

Un espace vectoriel euclidien, c'est...

Fiche 1

Un espace vectoriel euclidien, c'est...

---

un espace vectoriel de dimension finie, muni d'un produit scalaire.

Fiche 2

Si $(.|.)$ est un produit scalaire, quelle est la norme $\|.\|$ associée au produit scalaire ?

Fiche 2

Si $(.|.)$ est un produit scalaire, quelle est la norme $\|.\|$ associée au produit scalaire ?

$\|x\| = \sqrt{(x|x)}$ pour tout vecteur x

Fiche 3

Si $(.|.)$ est un produit scalaire et $\|.\|$ sa norme associée, l'inégalité de Cauchy-Schwarz est

Fiche 3

Si $(.|.)$ est un produit scalaire et $\|.\|$ sa norme associée, l'inégalité de Cauchy-Schwarz est

$$|(x|y)| \leqslant \|x\| \ \|y\|$$

Fiche 4

Si $(.|.)$ est un produit scalaire et $\|.\|$ sa norme associée, exprimer $(x \,|\, y)$ à l'aide de normes.

Fiche 4

Si $(.|.)$ est un produit scalaire et $\|.\|$ sa norme associée, exprimer $(x \mid y)$ à l'aide de normes.

$$(x \mid y) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$$

Fiche 5

Si $(.|.)$ est un produit scalaire, dire que les vecteurs x et y sont orthogonaux signifie quoi et se note comment ?

Fiche 5

Si $(.|.)$ est un produit scalaire, dire que les vecteurs x et y sont orthogonaux signifie quoi et se note comment ?

$(x \mid y) = 0$ et ça se note $x \perp y$

Fiche 6

Si $(.|.)$ est un produit scalaire et $\|.\|$ sa norme associée, une famille de vecteurs est dite orthonormale (ou orthonormée) si et seulement si

Fiche 6

Si $(.|.)$ est un produit scalaire et $\|.\|$ sa norme associée, une famille de vecteurs est dite orthonormale (ou orthonormée) si et seulement si

ses éléments sont orthogonaux deux à deux et si chaque vecteur est de norme 1.

Fiche 7

Si $(.|.)$ est un produit scalaire et $\|.\|$ sa norme associée, donner le théorème de Pythagore pour deux vecteurs x, y

Fiche 7

Si $(.|.)$ est un produit scalaire et $\|.\|$ sa norme associée, donner le théorème de Pythagore pour deux vecteurs x, y

---

$x \perp y$ est équivalent à
$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

Fiche 8

Si E est un espace vectoriel euclidien de dimension n, toute famille orthonormale à n éléments est ....

Fiche 8

Si E est un espace vectoriel euclidien de dimension n, toute famille orthonormale à n éléments est ....

---

une base de E, appelée base orthonormale.

Fiche 9

E est un espace vectoriel euclidien de dimension 3 avec $(.|.)$ son produit scalaire et $\|.\|$ sa norme associée, u, v des vecteurs de coordonnées (x, y, z) et (x', y', z') dans une base orthonormale, que valent $(u|v)$ et $\|u\|$?

Fiche 9

E est un espace vectoriel euclidien de dimension 3 avec $(.|.)$ son produit scalaire et $\|.\|$ sa norme associée, u, v des vecteurs de coordonnées (x, y, z) et (x', y', z') dans une base orthonormale, que valent $(u|v)$ et $\|u\|$?

$(u|v) = xx' + yy' + zz'$ et
$\|u\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Fiche 10

Si E est un espace vectoriel euclidien avec $(.|.)$ son produit scalaire, F et G deux sous-espaces vectoriels. On dit que F est orthogonal à G si...

Fiche 10

Si E est un espace vectoriel euclidien avec $(.|.)$ son produit scalaire, F et G deux sous-espaces vectoriels. On dit que F est orthogonal à G si...

Pour tout f de F et g de G, on a $(f|g) = 0$.

Fiche 11

Si E est un espace vectoriel euclidien avec $(.|.)$ son produit scalaire, F un sous-espace vectoriel. Alors $F^\perp$ est

Fiche 11

Si E est un espace vectoriel euclidien avec $(.|.)$ son produit scalaire, F un sous-espace vectoriel. Alors $F^{\perp}$ est

---

le supplémentaire orthogonal de F. C'est un sous-espace-vectoriel supplémentaire de F et orthogonal à F.

Fiche 12

Si E est un espace vectoriel euclidien avec $(.|.)$ son produit scalaire, F un sous-espace vectoriel. La projection orthogonale sur F est...

Fiche 12

Si E est un espace vectoriel euclidien avec $(.|.)$ son produit scalaire, F un sous-espace vectoriel. La projection orthogonale sur F est...

la projection sur F parrallèlemment à $F^{\perp}$.

Fiche 13

Si E est un espace vectoriel euclidien avec $(.|.)$ son produit scalaire, F un sous-espace vectoriel. La symétrie orthogonale par rapport à F est...

Fiche 13

Si E est un espace vectoriel euclidien avec $(.|.)$ son produit scalaire, F un sous-espace vectoriel. La symétrie orthogonale par rapport à F est...

la symétrie par rapport à F parrallèlement à $F^{\perp}$.

Fiche 14

Si E est un espace vectoriel euclidien avec $(.|.)$ son produit scalaire, une réflexion est

Fiche 14

Si E est un espace vectoriel euclidien avec $(.|.)$ son produit scalaire, une réflexion est

---

Une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan de E

Fiche 15

Si E est un espace vectoriel euclidien avec $(.|.)$ son produit scalaire, un endomorphisme f de E est dit orthogonal si

Fiche 15

Si E est un espace vectoriel euclidien avec $(.|.)$ son produit scalaire, un endomorphisme f de E est dit orthogonal si

---

il conserve le produit scalaire (et donc la norme) :

$$(f(x) \,|\, f(y)) = (x \,|\, y).$$

Fiche 16

un endomorphisme orthogonal est bijectif à quelle condition ?

Fiche 16

un endomorphisme orthogonal est bijectif à quelle condition ?

Aucune condition ! Il est toujours bijectif.

Fiche 17

Une matrice A est orthogonale si

Fiche 17

Une matrice A est orthogonale si

$$A^{-1} = {}^tA \text{ ou encore } {}^tAA = I_n.$$

Fiche 18

Dans le cadre des matrices orthogonales, quelles sont les opérations compatibles avec le caractére orthogonal ?

Fiche 18

Dans le cadre des matrices orthogonales, quelles sont les opérations compatibles avec le caractére orthogonal ?

---

la multiplication et l’inverse.

Fiche 19

Si f est un automorphisme orthogonal, que peut-on dire de sa matrice dans une base orthonormale ?

Fiche 19

Si f est un automorphisme orthogonal, que peut-on dire de sa matrice dans une base orthonormale ?

---

sa matrice est orthogonale.

Fiche 20

Si B est une base orthonormale d'un espace vectoriel euclidien, et B' est autre base. Comment vérifier que B' est aussi orthonormale ?

Fiche 20

Si B est une base orthonormale d'un espace vectoriel euclidien, et B' est autre base. Comment vérifier que B' est aussi orthonormale ?

On regarde si la matrice de passage $P(B, B')$ est orthogonal.

Fiche 21

Pour étudier un automorphisme f du plan ou de l'espace, de matrice A en base orthonormale, si on pense que f est orthogonal, et déterminer ses éléments géométrique, quelles sont les étapes (en bref) ?

Fiche 21

Pour étudier un automorphisme f du plan ou de l'espace, de matrice A en base orthonormale, si on pense que f est orthogonal, et déterminer ses éléments géométrique, quelles sont les étapes (en bref) ?

Verifier que ${}^tAA = I$
Calculer l'espace des vecteurs invariants en résolvant $f(x) = x$
Analyser la dimension de cet espace invariant et en déduire le type géométrique
Selon le type géométrique, déterminer les éléments géométrique (axe, angle....)

Fiche 22

Si f est un automorphisme orthogonal du plan ou de l'espace et que l'espace des vecteurs invariants est un hyperplan F, alors quelle est la géométrie de f ?

Fiche 22

Si f est un automorphisme orthogonal du plan ou de l'espace et que l'espace des vecteurs invariants est un hyperplan F, alors quelle est la géométrie de f ?

C'est une réflexion (symétrie orthogonale) par rapport à F.

Fiche 23

Si f est un automorphisme orthogonal du plan et que l'espace des vecteurs invariants est nul, alors quelle est la géométrie de f ? et comment déterminer ses éléments géométrique ?

Fiche 23

Si f est un automorphisme orthogonal du plan et que l'espace des vecteurs invariants est nul, alors quelle est la géométrie de f ? et comment déterminer ses éléments géométrique ?

---

f est une rotation. Pour déterminer son angle θ, on prend un vecteur unitaire v, on calcule $f(v)$ et on a $\cos(\theta) = (v \mid f(v))$ et $\sin(\theta) = \det(v, f(v))$.

Fiche 24

Si f est une rotation d'angle θ dans le plan, quel est sa matrice dans toute base orthonormale ?

Fiche 24

Si f est une rotation d'angle θ dans le plan, quel est sa matrice dans toute base orthonormale ?

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Fiche 25

Si f est une symétrie orthogonale d'axe D dans le plan, quelle est sa matrice dans toute base orthonormale ?

Fiche 25

Si f est une symétrie orthogonale d'axe D dans le plan, quelle est sa matrice dans toute base orthonormale ?

$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ avec θ un paramètre qui dépend de l'inclinaison de l'axe.

Fiche 26

Si f est un automorphisme orthogonal de l'espace et que l'espace des vecteurs invariants est une droite D, alors quelle est la géométrie de f ? et comment déterminer ses éléments géométrique ?

Fiche 26

Si f est un automorphisme orthogonal de l'espace et que l'espace des vecteurs invariants est une droite D, alors quelle est la géométrie de f ? et comment déterminer ses éléments géométrique ?

---

f est une rotation d'axe D et d'angle θ. On choisit un vecteur u de norme 1 sur D et un vecteur v de norme 1 orthogonal à D. Alors $\cos\theta = (v, f(v))$. Pour savoir le signe de θ : si $v \wedge f(v) = u$ le signe est positif, si $-u$ le signe est négatif.

Fiche 27

Si f est un automorphisme orthogonal de l'espace et que l'espace des vecteurs invariants est nul, alors quelle est la géométrie de f ? et comment avoir plus d'information ?

Fiche 27

Si f est un automorphisme orthogonal de l'espace et que l'espace des vecteurs invariants est nul, alors quelle est la géométrie de f ? et comment avoir plus d'information ?

---

f est la composée de trois reflexion (ou d'une reflexion et d'une rotation).

On choisit s une reflexion. Alors $s \circ f = r$ est une rotation dont on détermine les éléments géométriques. Puis on dit que $f = s \circ r$ est la composé de la rotation et de la symétrie.

Fiche 28

Si f est une rotation d'axe D et d'angle θ dans l'espace, dans une base orthonormale dont le premier vecteur est sur D, quelle est la matrice de f ?

Fiche 28

Si f est une rotation d'axe D et d'angle θ dans l'espace, dans une base orthonormale dont le premier vecteur est sur D, quelle est la matrice de f ?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Fiche 29

Si f est la réflexion par rapport au plan P dans l'espace, dans une base orthonormale dont les deux premiers vecteur sont dans P, quelle est la matrice de f ?

Fiche 29

Si f est la réflexion par rapport au plan P dans l'espace, dans une base orthonormale dont les deux premiers vecteur sont dans P, quelle est la matrice de f ?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Fiche 30

C'est quoi une matrice symétrique ?
et un endomorphisme symétrique ?

Fiche 30

C’est quoi une matrice symétrique ? et un endomorphisme symétrique ?

C’est une matrice dont les coefficients sont symétriques par rapport à la diagonale.
C’est un endomorphisme dont la matrice en base orthonormale est symétrique.

Fiche 31

Quelles sont les propriétés de diagonalisation d'une matrice/ d'un endomorphisme symétrique dans un espace vectoriel euclidien ?

Fiche 31

Quelles sont les propriétés de diagonalisation d'une matrice/ d'un endomorphisme symétrique dans un espace vectoriel euclidien ?

Ils sont toujours diagonalisable, avec une base de vecteurs propres orthonormale.