Révisions

Fonctions de deux variables

Afficher une page à la fois seulement.
Une page : une question
page suivante : la réponse.

Question 1

une fonction réelles de deux variables $f(x, y)$ se représente graphiquement comment ?

Réponse 1

On pose $z = f(x, y)$ et on obtient une surface.

Question 2

Dire que f tend vers ℓ en a signifie que.....

Réponse 2

$|f(x,y) - \ell|$ tend vers 0 quand $\|(x,y) - a\|$ tend vers 0.

Question 3

f est continue en a signifie que

Réponse 3

$f(x, y)$ tend vers $f(a)$ quand (x, y) tend vers a.

Question 4

$f(x, y)$ est bornée si....

Réponse 4

il existe M tel que $|f(x,y)| \leqslant M$ pour tout (x,y)

Question 5

Comment calculer $\frac{\partial f}{\partial x}$?

Réponse 5

On fixe y (comme s'il était constant) et on ne dérive la fonction que par rapport à x

Question 6

Comment calculer $\frac{\partial f}{\partial y}$?

Réponse 6

On fixe x (comme s'il était constant) et on ne dérive la fonction que par rapport à y

Question 7

$f(x, y)$ est dite de classe $\mathcal{C}^1$ si ....

Réponse 7

elle admet des dérivées partielles en tout point de A et si les fonctions dérivées partielles sont continues.

Question 8

Le développement limité de f en $a = (\alpha, \beta)$ à l'ordre 1 est...

Réponse 8

$$f((x,y)) = f(a) + (x-\alpha)\frac{\partial f}{\partial x}(a)$$
$$+(y-\beta)\frac{\partial f}{\partial y}(a) \; +o(\|(x,y)-a\|)$$

Question 9

Le gradient de $f(x, y)$ est

Réponse 9

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Question 10

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(f+g) =$$

Réponse 10

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(f) + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(g)$$

Question 11

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(fg) =$$

Réponse 11

$$f\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(g) + g\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(f)$$

Question 12

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\frac{1}{f}\right) =$$

Réponse 12

$$\frac{-\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(f)}{f^2}$$

Question 13

la différentielle de f est

Réponse 13

$$df_a = \frac{\partial f}{\partial x}(a)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(a)dy$$

Question 14

Si $g(t) = f(u(t), v(t))$, que vaut g' ?

Réponse 14

$$g' = \left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(f)\big(u, v\big)\right) \cdot \big(u', v'\big)$$

Question 15

Si $g(x,y) = f\big(u(x,y), v(x,y)\big)$, que valent les dérivées partielles de g ?

Réponse 15

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial u}\big(\mathbf{u},\mathbf{v}\big)\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}(x,y)$$

$$+\ \frac{\partial f}{\partial v}\big(\mathbf{u},\mathbf{v}\big)\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x}(x,y)$$

et

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial u}\big(\mathbf{u},\mathbf{v}\big)\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y}(x,y)$$

$$+\ \frac{\partial f}{\partial v}\big(\mathbf{u},\mathbf{v}\big)\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y}(x,y)$$

Question 16

Quelles sont les dérivées partielles secondes de f ?

Réponse 16

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \ \text{et} \ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

Question 17

A quelle condition a-t-on $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$?

Réponse 17

Si f est de classe $\mathcal{C}^2$

Question 18

Donner un développement limité d'ordre 2 de $f(x, y)$ en a sous la forme $f(a + (h, k)) = ...$

Réponse 18

$$f(a+(h,k)) = f(a) + ph + qk +$$
$$\frac{1}{2}\left(rh^2 + 2shk + tk^2\right) + o(\|(h,k)\|^2) \text{ avec}$$
$$p = \frac{\partial f}{\partial x}(a),\ q = \frac{\partial f}{\partial y}(a),\ r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a),$$
$$s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) \text{ et } t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)$$

Question 19

f présente un maximum local en a si

Réponse 19

$$f(v) \leqslant f(a) \text{ dans une boule autour de } a.$$

Question 20

f présente un minimum local en a si

Réponse 20

$$f(v) \geqslant f(a) \text{ dans une boule autour de } a.$$

Question 21

Un extremum de f est ...

Réponse 21

un maximum ou un minimum de f.

Question 22

Si f présente un extremum local en a, alors son gradient en a est ?

Réponse 22

nul.

Question 23

a est un point critique de f signifie...

Réponse 23

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, f(a) \text{ est nul}$$

Question 24

Si a est un point critique de f, comment savoir plus précisément quel type de point c'est ?

Réponse 24

On calcule au point a la quantité $s^2 - rt$.

- si $s^2 - rt < 0$, a est un extremum local de f
  - si $r > 0$, minimum local
  - si $r < 0$, maximum local .
- si $s^2 - rt > 0$, a est un <u>point col</u>.
- si $s^2 - rt = 0$, alors on ne peut pas conclure.