Révisions

Applications linéaire

Afficher une page à la fois seulement.
Une page : une question
page suivante : la réponse.

## Fiche 1

Une application (fonction) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est une application linéaire si ....

**Fiche 1**

Une application (fonction) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est une application linéaire si ....

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall X_1, X_2 \in \mathbb{R}^n,$$

$$f(\lambda X_1 + X_2) = \lambda f(X_1) + f(X_2).$$

Fiche 2

Si $A$ est une matrice, comment définir l'application linéaire $f$ associée à $A$ ?

## Fiche 2

Si $A$ est une matrice, comment définir l'application linéaire $f$ associée à $A$ ?

On définit pour $X$ vecteur colonne (d'une taille adéquate)

$$f(X) = AX$$

Fiche 3

C'est quoi un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ ? Comment se note l'ensemble de ces endomorphismes ?

## Fiche 3

C'est quoi un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ ? Comment se note l'ensemble de ces endomorphismes ?

c'est une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$.
On note $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.

Fiche 4

Si $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ est une application linéaire, comment trouver une matrice $A$ telle que $f(X) = AX$ ? Comment s'appelle $A$ et quelle est sa notation ?

## Fiche 4

Si $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ est une application linéaire, comment trouver une matrice $A$ telle que $f(X) = AX$ ? Comment s'appelle $A$ et quelle est sa notation ?

---

On écrit le vecteur $f(X)$ en colonne, dans chaque ligne, on met bien les coordonnées de $X$ dans l'ordre. Ensuite on "efface" les coordonnées de $X$ pour ne garder que les coefficients. ça forme la matrice $A$. $A = M_f(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$ est la matrice de l'application linéaire $f$ dans les bases canoniques.

Fiche 5

$f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ une application linéaire. Comment se note la matrice de $f$ dans les bases $\mathcal{B}$(départ) et $\mathcal{B}'$(arrivée) ?

Fiche 5

$f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ une application linéaire. Comment se note la matrice de $f$ dans les bases $\mathcal{B}$(départ) et $\mathcal{B}'$(arrivée) ?

$$M_f(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$$

## Fiche 6

$f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ une application linéaire de matrice $A$ dans les bases canoniques $\mathcal{C}$(départ) et $\mathcal{C}'$(arrivée). Donner la méthode pour déterminer la matrice de $f$ dans les bases $\mathcal{B}$(départ) et $\mathcal{B}'$(arrivée), à la main.

## Fiche 6

$f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ une application linéaire de matrice $A$ dans les bases canoniques $\mathcal{C}$(départ) et $\mathcal{C}'$(arrivée). Donner la méthode pour déterminer la matrice de $f$ dans les bases $\mathcal{B}$(départ) et $\mathcal{B}'$(arrivée), à la main.

---

On calcule les images par $f$ des vecteurs de $\mathcal{B}$, puis on exprime le résultat sur la base $\mathcal{B}'$, en colonne. On met les colonnes côte à côte, ça fait la matrice $M_f(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$.

Prev Next

## Fiche 7

$f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ une application linéaire de matrice $A$ dans les bases canoniques $\mathcal{C}$(départ) et $\mathcal{C}'$(arrivée). Donner la méthode pour déterminer la matrice de $f$ dans les bases $\mathcal{B}$(départ) et $\mathcal{B}'$(arrivée), avec les matrice de passage.

Prev Next

## Fiche 7

$f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ une application linéaire de matrice $A$ dans les bases canoniques $\mathcal{C}$(départ) et $\mathcal{C}'$(arrivée). Donner la méthode pour déterminer la matrice de $f$ dans les bases $\mathcal{B}$(départ) et $\mathcal{B}'$(arrivée), avec les matrice de passage.

---

On pose $Q = P(\mathcal{C}, \mathcal{B})$ et $P = P(\mathcal{C}', \mathcal{B}')$

$$M_f(\mathcal{B}, \mathcal{B}') = P^{-1}AQ$$

## Fiche 8

Si $f$ et $g$ sont des applications linéaires, quelles opérations peut-on faire avec qui donne encore une application linéaire ?

## Fiche 8

Si $f$ et $g$ sont des applications linéaires, quelles opérations peut-on faire avec qui donne encore une application linéaire ?

---

$f + g$ est linéaire
$\lambda f + \mu g$ avec $\lambda, \mu$ constantes.
$f \circ g$ ou $g \circ f$ à condition qu'on puisse faire la composée.

## Fiche 9

Quel est le noyau d'une application linéaire $f$ ?

Comment rédiger une recherche de noyau ?

## Fiche 9

Quel est le noyau d'une application linéaire $f$ ?
Comment rédiger une recherche de noyau ?

---

$\ker f = \{X \in \mathbb{R}^m | f(X) = 0\}$
Soit $X \in \mathbb{R}^m$ (départ). On a $X \in \operatorname{Ker} f$ si, et seulement si, $f(X) = O$ (vecteur nul de taille $n$). Puis on résout l'équation pour trouver toutes les solutions $X$. Ces solutions forment $\ker f$.

## Fiche 10

Quelle est l'image d'une application linéaire $f$ ?
Comment rédiger une recherche d'image ?

Fiche 10

Quelle est l'image d'une application linéaire $f$ ?
Comment rédiger une recherche d'image ?

$$\operatorname{Im} f = \{Y = f(X), \quad \text{avec } X \in \mathbb{R}^m\}$$

Soit $Y \in \mathbb{R}^n$ (arrivée). On a $Y \in \operatorname{Im} f$ si, et seulement si, il existe $X \in \mathbb{R}^m$ (départ) tel que $f(X) = Y$. Et on cherche à résoudre le système.$\operatorname{Im} f$ est caractérisé par le système ne contenant que les équations auxiliaires. Pour avoir une base de $\operatorname{Im} f$, on résout ces équations auxiliaires.

## Fiche 11

Donner la formule reliant les dimensions du noyau et de l'image d'une application linéaire $f$.

Prev Next

## Fiche 11

Donner la formule reliant les dimensions du noyau et de l'image d'une application linéaire $f$.

---

$$\dim(\operatorname{Im} f) + \dim(\operatorname{Ker} f) = \dim(\text{ départ })$$

Prev Next

## Fiche 12

Donner une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$.

Fiche 12

Donner une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$.

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(e_1), \ldots, f(e_n))$$

avec $(e_1, \ldots, e_n)$ la base de l'ensemble de départ.

## Fiche 13

Donner trois critères pour montrer qu'une application linéaire $f$ est injective.

## Fiche 13

Donner trois critères pour montrer qu'une application linéaire $f$ est injective.

1. tout élément de l'ensemble d'arrivée admet <u>au plus</u> un antécédent par $f$
2. $\ker f = \{0\}$
3. $\dim \ker f = 0$

## Fiche 14

Donner trois critères pour montrer qu'une application linéaire $f$ est surjective.

## Fiche 14

Donner trois critères pour montrer qu'une application linéaire $f$ est surjective.

1. tout élément de l'ensemble d'arrivée admet <u>au moins</u> un antécédent par $f$
2. $\operatorname{Im} f =$ toute l'arrivée
3. $\dim \operatorname{Im} f =$ dimension de l'arrivée

## Fiche 15

Donner quatre critères pour montrer qu'une application linéaire $f$ est bijective.

## Fiche 15

Donner quatre critères pour montrer qu'une application linéaire $f$ est bijective.

1. tout élément de l'ensemble d'arrivée admet <u>exactement</u> un antécédent par $f$
2. $f$ est surjective et injective
3. $\ker f = \{0\}$ et $\operatorname{Im} f =$ toute l'arrivée
4. $\dim \ker f = 0$ et $\dim \operatorname{Im} f =$ dimension de l'arrivée

## Fiche 16

Si $f$ est une application linéaire bijective de matrice $M_f(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$, que dire de sa bijection réciproque $f^{-1}$ et de sa matrice ?

## Fiche 16

Si $f$ est une application linéaire bijective de matrice $M_f(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$, que dire de sa bijection réciproque $f^{-1}$ et de sa matrice ?

---

$f^{-1}$ est une application linéaire bijective et

$$M_{f^{-1}}(\mathcal{B}', \mathcal{B}) = (M_f(\mathcal{B}, \mathcal{B}'))^{-1}.$$

## Fiche 17

Donner la définition de $h$ l'homothétie vectorielle de rapport $k$.

## Fiche 17

Donner la définition de $h$ l'homothétie vectorielle de rapport $k$.

---

Pour tout $X$, $h(X) = kX$.

## Fiche 18

Si $F \oplus G = \mathbb{R}^n$, donner la définition du projecteur $p$ sur $F$ parallèlement à $G$

Fiche 18

Si $F \oplus G = \mathbb{R}^n$, donner la définition du projecteur $p$ sur $F$ parallèlement à $G$

On a $x = x_F + x_G$ avec $x_F \in F$ et $x_G \in G$. Alors

$$p(x) = x_f$$

## Fiche 19

Si $F \oplus G = \mathbb{R}^n$, donner la définition de la symétrie $s$ par rapport à $F$ parallèlement à $G$

## Fiche 19

Si $F \oplus G = \mathbb{R}^n$, donner la définition de la symétrie $s$ par rapport à $F$ parallèlement à $G$

On a $x = x_F + x_G$ avec $x_F \in F$ et $x_G \in G$. Alors

$$s(x) = x_F - x_G$$