Révisions

Applications linéaire

Afficher une page à la fois seulement.
Une page : une question
page suivante : la réponse.

Question 1

Une application (fonction) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est une application linéaire si ....

Réponse 1

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall X_1, X_2 \in \mathbb{R}^n,$$

$$f(\lambda X_1 + X_2) = \lambda f(X_1) + f(X_2).$$

Question 2

Si A est une matrice, comment définir l'application linéaire f associée à A ?

Réponse 2

On définit pour X vecteur colonne (d'une taille adéquate)

$$f(X) = AX$$

Question 3

C'est quoi un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$? Comment se note l'ensemble de ces endomorphismes ?

Réponse 3

c'est une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$.
On note $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.

Question 4

Si $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ est une application linéaire, comment trouver une matrice A telle que $f(X) = AX$?
Comment s'appelle A et quelle est sa notation ?

Réponse 4

On écrit le vecteur $f(X)$ en colonne, dans chaque ligne, on met bien les coordonnées de X dans l'ordre. Ensuite on "efface" les coordonnées de X pour ne garder que les coefficients. ça forme la matrice A.
$A = M_f(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$ est la matrice de l'application linéaire f dans les bases canoniques.

Question 5

$f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ une application linéaire. Comment se note la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$(départ) et $\mathcal{B}'$(arrivée) ?

Réponse 5

$$M_f(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$$

Question 6

$f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ une application linéaire de matrice A dans les bases canoniques $\mathcal{C}$(départ) et $\mathcal{C}'$(arrivée). Donner la méthode pour déterminer la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$(départ) et $\mathcal{B}'$(arrivée), à la main.

Réponse 6

On calcule les images par f des vecteurs de $\mathcal{B}$, puis on exprime le résultat sur la base $\mathcal{B}'$, en colonne. On met les colonnes côte à côte, ça fait la matrice $M_f(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$.

Question 7

$f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ une application linéaire de matrice A dans les bases canoniques $\mathcal{C}$(départ) et $\mathcal{C}'$(arrivée). Donner la méthode pour déterminer la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$(départ) et $\mathcal{B}'$(arrivée), avec les matrice de passage.

Réponse 7

On pose $Q = P(\mathcal{C}, \mathcal{B})$ et $P = P(\mathcal{C}', \mathcal{B}')$

$$M_f(\mathcal{B}, \mathcal{B}') = P^{-1} A Q$$

Question 8

Si f et g sont des applications linéaires, quelles opérations peut-on faire avec qui donne encore une application linéaire ?

Réponse 8

$$f + g \text{ est linéaire}$$
$$\lambda f + \mu g \text{ avec } \lambda, \mu \text{ constantes.}$$
$$f \circ g \text{ ou } g \circ f \text{ à condition qu'on puisse faire la composée.}$$

Question 9

Quel est le noyau d'une application linéaire f ?
Comment rédiger une recherche de noyau ?

Réponse 9

$$\ker f = \{X \in \mathbb{R}^m | f(X) = 0\}$$

Soit $X \in \mathbb{R}^m$ (départ). On a $X \in \text{Ker } f$ si, et seulement si, $f(X) = O$ (vecteur nul de taille n). Puis on résout l'équation pour trouver toutes les solutions X. Ces solutions forment $\ker f$.

Question 10

Quelle est l'image d'une application linéaire f ?
Comment rédiger une recherche d'image ?

Réponse 10

$$\operatorname{Im} f = \{Y = f(X), \quad \text{avec } X \in \mathbb{R}^m\}$$

Soit $Y \in \mathbb{R}^n$ (arrivée). On a $Y \in \operatorname{Im} f$ si, et seulement si, il existe $X \in \mathbb{R}^m$ (départ) tel que $f(X) = Y$. Et on cherche à résoudre le système.Im f est caractérisé par le système ne contenant que les équations auxiliaires. Pour avoir une base de Im f, on résout ces équations auxiliaires.

Question 11

Donner la formule reliant les dimensions du noyau et de l'image d'une application linéaire f.

Réponse 11

$$\dim(\operatorname{Im} f) + \dim(\operatorname{Ker} f) = \dim(\text{ départ })$$

Question 12

Donner une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$.

Réponse 12

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(e_1), \ldots, f(e_n))$$

avec $(e_1, \ldots, e_n)$ la base de l'ensemble de départ.

Question 13

Donner trois critères pour montrer qu'une application linéaire f est injective.

Réponse 13

1. tout élément de l'ensemble d'arrivée admet <u>au plus</u> un antécédent par f
2. $\ker f = \{0\}$
3. $\dim \ker f = 0$

Question 14

Donner trois critères pour montrer qu'une application linéaire f est surjective.

Réponse 14

1. tout élément de l'ensemble d'arrivée admet <u>au moins</u> un antécédent par f
2. $\operatorname{Im} f =$ toute l'arrivée
3. $\dim \operatorname{Im} f =$ dimension de l'arrivée

Question 15

Donner quatre critères pour montrer qu'une application linéaire f est bijective.

Réponse 15

1. tout élément de l'ensemble d'arrivée admet <u>exactement</u> un antécédent par f
2. f est surjective et injective
3. $\ker f = \{0\}$ et $\operatorname{Im} f =$ toute l'arrivée
4. $\dim \ker f = 0$ et $\dim \operatorname{Im} f =$ dimension de l'arrivée

Question 16

Si f est une application linéaire bijective de matrice $M_f(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$, que dire de sa bijection réciproque f^{-1} et de sa matrice ?

Réponse 16

f^{-1} est une application linéaire bijective et
$$M_{f^{-1}}(\mathcal{B}', \mathcal{B}) = (M_f(\mathcal{B}, \mathcal{B}'))^{-1}.$$

Question 17

Donner la définition de h l'homothétie vectorielle de rapport k.

Réponse 17

Pour tout X, $h(X) = kX$.

Question 18

Si $F \oplus G = \mathbb{R}^n$, donner la définition du projecteur p sur F parallèlement à G

Réponse 18

On a $x = x_F + x_G$ avec $x_F \in F$ et $x_G \in G$. Alors

$$p(x) = x_f$$

Question 19

Si $F \oplus G = \mathbb{R}^n$, donner la définition de la symétrie s par rapport à F parallèlement à G

Réponse 19

On a $x = x_F + x_G$ avec $x_F \in F$ et $x_G \in G$. Alors

$$s(x) = x_F - x_G$$