Révisions

Vecteurs de $\mathbb{R}^n$

Afficher une page à la fois seulement.
Une page : une question
page suivante : la réponse.

Fiche 1

le vecteur x est une combinaison linéaire de la famille (u, v, w) signifie quoi ?

Fiche 1

le vecteur x est une combinaison linéaire de la famille (u, v, w) signifie quoi ?

$$x = au + bv + cw$$

avec a, b, c des constantes.

Fiche 2

La famille (u, v, w) est libre signifie quoi ?

Fiche 2

La famille (u, v, w) est libre signifie quoi ?

Si $au + bv + cw = \vec{0}$ avec a, b, c des constantes, alors on a forcément $a = b = c = 0$.

Fiche 3

La famille (u, v, w) est liée signifie quoi ?

Fiche 3

La famille (u, v, w) est liée signifie quoi ?

Il existe des a, b, c non tous nuls tels que $au + bv + cw = \vec{0}$.
Dans ce cas, un des vecteurs de la famille est une combinaison linéaire des autres.

Fiche 4

Quelle est la méthode pour montrer qu'une famille (u, v, w) est libre ou liée ?

Fiche 4

Quelle est la méthode pour montrer qu'une famille (u, v, w) est libre ou liée ?

On cherche des constantes a, b, c telles que

$$au + bv + cw = \vec{0}$$

Si $a = 0, b = 0$ et $c = 0$, la famille est libre.
Sinon, la famille est liée.

Fiche 5

Une famille (u, v, w) est génératrice de $\mathbb{R}^n$ si .... ?

Fiche 5

Une famille (u, v, w) est génératrice de $\mathbb{R}^n$ si .... ?

Pour tout vecteur X de $\mathbb{R}^n$, on peut trouver a, b, c constantes telles que

$$au + bv + cw = X$$

Fiche 6

Donner la technique pour vérifier si une famille (u, v, w) est génératrice de $\mathbb{R}^n$.

Fiche 6

Donner la technique pour vérifier si une famille (u, v, w) est génératrice de $\mathbb{R}^n$.

On pose un vecteur X de $\mathbb{R}^n$, et on cherche a, b, c constantes telles que

$$au + bv + cw = X$$

Si le système n'a pas d'équation auxiliaires (sauf $0 = 0$), alors la famille est génératrice de $\mathbb{R}^n$.
Si il y a des équations auxiliaires, la famille n'est pas génératrice de $\mathbb{R}^n$.

Fiche 7

Quelle est la définition d'une base de $\mathbb{R}^n$?

Fiche 7

Quelle est la définition d'une base de $\mathbb{R}^n$?

Une famille de vecteurs libre et génératrice.

Fiche 8

Que peut-on dire d'une famille libre de n vecteurs dans $\mathbb{R}^n$?

Fiche 8

Que peut-on dire d'une famille libre de n vecteurs dans $\mathbb{R}^n$?

C'est une base de $\mathbb{R}^n$.

Fiche 9

Que peut-on dire d'une famille génératrice de n vecteurs dans $\mathbb{R}^n$?

Fiche 9

Que peut-on dire d'une famille génératrice de n vecteurs dans $\mathbb{R}^n$?

C'est une base de $\mathbb{R}^n$.

Fiche 10

Si (u, v, w, x) est une base de $\mathbb{R}^4$ et les constantes (a, b, c, d) sont les coordonnées de y dans cette base, alors ... ?

Fiche 10

Si (u, v, w, x) est une base de $\mathbb{R}^4$ et les constantes (a, b, c, d) sont les coordonnées de y dans cette base, alors ... ?

$$y = au + bv + cw + dx$$

Fiche 11

Donner $\mathcal{C}(e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Fiche 11

Donner $\mathcal{C}(e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

$e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ et $e_3 = (0, 0, 1)$.

Fiche 12

On a $\mathcal{B}(u, v, w, x)$ une base de $\mathbb{R}^4$ et on note $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Comment noter et construire la matrice de passage de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{B}$. Cette matrice a quelle propriété ?

Fiche 12

On a $\mathcal{B}(u, v, w, x)$ une base de $\mathbb{R}^4$ et on note $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Comment noter et construire la matrice de passage de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{B}$. Cette matrice a quelle propriété ?

On met les coordonnées canoniques des vecteurs u, v, w, x en colonnes, côte à côte, et ça fait la matrice $P(\mathcal{C}, \mathcal{B})$.

Elle est carrée et inversible.

Fiche 13

Soient X un vecteur, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{B}$ deux bases. On note $X_{\mathcal{C}}$ les coordonnées de X dans $\mathcal{C}$ et $X_{\mathcal{B}}$ les coordonnées de X dans $\mathcal{B}$.
Donner les formules permettant de passer de $X_{\mathcal{C}}$ à $X_{\mathcal{B}}$ et inversement.

Prev Next

Fiche 13

Soient X un vecteur, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{B}$ deux bases. On note $X_{\mathcal{C}}$ les coordonnées de X dans $\mathcal{C}$ et $X_{\mathcal{B}}$ les coordonnées de X dans $\mathcal{B}$.
Donner les formules permettant de passer de $X_{\mathcal{C}}$ à $X_{\mathcal{B}}$ et inversement.

$$X_{\mathcal{C}} = P(\mathcal{C}, \mathcal{B}) X_{\mathcal{B}}$$
$$X_{\mathcal{B}} = (P(\mathcal{C}, \mathcal{B}))^{-1} X_{\mathcal{C}}.$$

Fiche 14

Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases, comment noter et calculer la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$ (deux possibilités) ?

Fiche 14

Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases, comment noter et calculer la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$ (deux possibilités) ?

$$P(\mathcal{B},\mathcal{B}') = P(\mathcal{C},\mathcal{B})^{-1}P(\mathcal{C},\mathcal{B}')$$
$$= P(\mathcal{B},\mathcal{C},)P(\mathcal{C},\mathcal{B}')$$

On calcule les coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$ et on dispose en colonnes pour faire une matrice qui est alors $P(\mathcal{B},\mathcal{B}')$.

Fiche 15

Si $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3$ sont trois bases de $\mathbb{R}^n$, alors $P(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) \times P(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3) = ?$

Fiche 15

Si $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3$ sont trois bases de $\mathbb{R}^n$, alors $P(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) \times P(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3) = ?$

$$P(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) \times P(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3) = P(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_3)$$

Fiche 16

$$P(\mathcal{B}, \mathcal{B}')^{-1} = ?$$

Fiche 16

$$P(\mathcal{B}, \mathcal{B}')^{-1} = ?$$

$$P(\mathcal{B}, \mathcal{B}')^{-1} = P(\mathcal{B}', \mathcal{B})$$

Fiche 17

Un sous-ensemble F de $\mathbb{R}^n$ est appelé un sous-espace vectoriel (s.e.v) si F vérifie ....?

Fiche 17

Un sous-ensemble F de $\mathbb{R}^n$ est appelé un sous-espace vectoriel (s.e.v) si F vérifie .... ?

$$\vec{0} \in F \text{ et}$$
$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall X, Y \in F, \quad \lambda X + Y \in F.$$

Fiche 18

C'est quoi $\mathrm{Vect}(u, v, w)$?
Que contient-il ?

Fiche 18

C'est quoi $\mathrm{Vect}(u, v, w)$?
Que contient-il ?

C'est l'espace vectoriel engendré par la famille (u, v, w).
Il contient tous les vecteurs $X = au + bv + cw$ avec a, b, c des constantes.

Fiche 19

C'est quoi une famille génératrice d'un s.e.v F ?

Fiche 19

C'est quoi une famille génératrice d'un s.e.v F ?

C'est une famille de vecteur $\mathcal{F}$ telle que $F = \mathrm{Vect}(\mathcal{F})$.

Fiche 20

Que peut-on dire de l'ensemble des solutions d'un système d'équations linéaires $AX = \vec{0}$ (avec A une matrice et X un vecteur de $\mathbb{R}^n$) ?

Fiche 20

Que peut-on dire de l'ensemble des solutions d'un système d'équations linéaires $AX = \vec{0}$ (avec A une matrice et X un vecteur de $\mathbb{R}^n$) ?

ça forme un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Fiche 21

Soit $F = \{X \in \mathbb{R}^p, AX = \vec{0}\}$, comment écrire F avec une famille génératrice ?

Fiche 21

Soit $F = \{X \in \mathbb{R}^p, AX = \vec{0}\}$, comment écrire F avec une famille génératrice ?

On résout le système avec le pivot de Gauss partiel en écrivant les solutions avec des paramètres (sinon, c'est que $F = \{\vec{0}\}$).
Puis on décompose les solutions en écrivant une colonne par paramètres. Les colonnes forment une famille de vecteur qui est génératrice de F.

Fiche 22

Soit $F = \mathrm{Vect}(u, v, w)$. Comment écrire F avec des équations ?

Fiche 22

Soit $F = \text{Vect}(u, v, w)$. Comment écrire F avec des équations ?

Soit $X(x, y, z...)$ un vecteur de F, alors il existe a, b, c tels que

$$X = au + bv + cw$$

On commence le pivot de Gauss avec (a, b, c) comme inconnues. Quand on a finit le pivot partiel, les équations auxiliaires = les équations de F.

Fiche 23

Si F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, c'est quoi une base de F ?

Fiche 23

Si F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, c'est quoi une base de F ?

C'est une famille $\mathcal{F}$ qui est libre et génératrice de F $(F = \operatorname{Vect} \mathcal{F})$.

Fiche 24

Quelle est la définition de la dimension d' un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$?

Fiche 24

Quelle est la définition de la dimension d' un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$?

C'est le nombre de vecteurs dans une base de F.

Fiche 25

$$\dim\{\vec{0}\} = ?$$

Fiche 25

$$\dim\{\vec{0}\} = ?$$

0

Fiche 26

$$\dim \mathbb{R}^n = ?$$

Fiche 26

$$\dim \mathbb{R}^n = ?$$

$$n$$

Fiche 27

La dimension d'un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^n$ est comprise entre quels nombres ?
Que se passe-t-il si la dimension de F est la valeur minimale ? Et maximale ?

Fiche 27

La dimension d'un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^n$ est comprise entre quels nombres ?
Que se passe-t-il si la dimension de F est la valeur minimale ? Et maximale ?

La dimension de F est entre 0 et n.
Si c'est 0, alors $F = \{\vec{0}\}$.
Si c'est n, alors $F = \mathbb{R}^n$.

Fiche 28

F et E sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ vérifiant $E \subset F$ et $dim(E) = \dim(F)$, alors ... ?

Fiche 28

F et E sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ vérifiant $E \subset F$ et $dim(E) = \dim(F)$, alors ...?

$E = F$

Fiche 29

Si F est de dimension p. Que peut-on dire d'une famille libre de p vecteurs ?
Et d'une famille génératrice de p vecteurs ?

Fiche 29

Si F est de dimension p. Que peut-on dire d'une famille libre de p vecteurs ?
Et d'une famille génératrice de p vecteurs ?

Ce sont des bases.

Fiche 30

Si F et G sont deux s.e.v. de $\mathbb{R}^n$, que dire de $F \cap G$?

Fiche 30

Si F et G sont deux s.e.v. de $\mathbb{R}^n$, que dire de $F \cap G$?

$F \cap G = \{v \in E \,|\, v \in F \text{ et } v \in G\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Fiche 31

F et G deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$. C'est quoi $F + G$?

Fiche 31

F et G deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$. C'est quoi $F + G$?

$F + G = \{u + v,\ u \in F,\ v \in G\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ qu'on appelle la somme des sous-espaces vectoriels F et G. C'est l'ensemble des vecteurs qui peuvent se décomposer en la somme d'un élément de F et d'un élément de G.

Fiche 32

Donner la définition de deux sous-espaces vectoriels supplémentaires F et G de $\mathbb{R}^n$

Fiche 32

Donner la définition de deux sous-espaces vectoriels supplémentaires F et G de $\mathbb{R}^n$

---

tout vecteur de $\mathbb{R}^n$ peut se décomposer de façon unique comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.

Fiche 33

F et G sont supplémentaires si, et seulement si ... (théorème)

Fiche 33

F et G sont supplémentaires si, et seulement si ... (théorème)

$$F + G = \mathbb{R}^n \text{ et } F \cap G = \{0_n\}.$$