Révisions 11

Complexes

Afficher une page à la fois seulement.
Une page : une question
page suivante : la réponse.

Question 1

Que représente la notation $\mathbb{C}$?

Réponse 1

L'ensemble des nombres complexes, c'est-à-dire des nombres de la forme $x + iy$.

Question 2

Dans $\mathbb{C}$, que vaut i^2

Réponse 2

$$i^2 = -1$$

Question 3

Un nombre complexe z peut s'écrire de trois formes différentes. Donner le nom de chacune des formes et son allure.

Réponse 3

$$\text{Forme algébrique } z = x + iy$$
$$\text{Forme trigonométrique } z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$$
$$\text{Forme exponentielle } z = \rho e^{i\theta}$$

Question 4

Dans l'écriture $z = x + iy$, comment s'appellent x et y et de quel type de nombre sont-il ?

Réponse 4

x et y sont des réels
x est la partie réelle de z ($\Re e(z)$)
y sa partie imaginaire ($\mathrm{Im}(z)$).

Question 5

Dans l'écriture $z = \rho e^{i\theta}$ ou $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$, que sont ρ et θ ? Quel type de nombre ?

Réponse 5

ρ est un réel positif et θ un réel.

$\rho = |z|$ est le module de z

$\theta = arg(z)$ un argument de z.

Question 6

Comment noter le module de $z = x + iy$ et le calculer ?

Réponse 6

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Question 7

On a $z = x + iy = \rho e^{i\theta}$. Que représentent z, x, y, ρ et θ dans le plan complexe ?

Réponse 7

z est l'affixe du point M de coordonnée (x, y)
x est l'abscisse de M
y l'ordonnée de M
ρ est la longueur OM
θ une mesure de l'angle entre $\vec{i}$ et $\overrightarrow{OM}$.

Question 8

Comment trouver la forme algébrique de $\frac{1}{x+iy}$?

Réponse 8

On multiplie en haut et en bas par le conjugué du dénominateur : $\frac{(x-iy)}{(x+iy)(x-iy)}$.

Question 9

Si $z = x + iy$, donner les formules permettant de calculer ρ et θ

Réponse 9

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{\rho}$$

$$\sin\theta = \frac{y}{\rho}$$

Question 10

Si $z = \rho e^{i\theta}$, donner sa partie réelle et sa partie imaginaire.

Réponse 10

$$\Re e(z) = \rho \cos \theta$$

$$\operatorname{Im} m(z) = \rho \sin \theta$$

Question 11

$$\overline{z + z'} =$$

Réponse 11

$$\overline{z} + \overline{z'}$$

Question 12

$$\overline{z - z'} =$$

Réponse 12

$$\overline{z} - \overline{z'}$$

Question 13

$$\overline{zz'} =$$

Réponse 13

$$\overline{z} \times \overline{z'}$$

Question 14

$$\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} =$$

Réponse 14

$$\frac{(\overline{z})}{\left(\overline{z'}\right)}$$

Question 15

$$|zz'| =$$

Réponse 15

$$|z| \times |z'|$$

Question 16

compléter la formule

$$|z + z'|...$$

Réponse 16

$$\leqslant |z| + |z'|$$

Inégalité triangulaire !

Question 17

$$|z^n| =$$

Réponse 17

$$|z|^n$$

Question 18

$$\left|\frac{z}{z'}\right| =$$

Réponse 18

$$= \frac{|z|}{|z'|}$$

Question 19

$$\mathrm{e}^{i\theta} = ?$$

Dans le plan complexe, l'image de ce nombre se situe où ?

Réponse 19

$$\mathrm{e}^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

son image est sur le cercle unité, à l'angle θ.

Question 20

$$\mathrm{e}^{i(\theta+\varphi)} =$$

Réponse 20

$$\mathrm{e}^{i\theta} \times \mathrm{e}^{i\varphi}$$

Question 21

$$\frac{\mathrm{e}^{i\theta}}{\mathrm{e}^{i\varphi}} =$$

Réponse 21

$$\mathrm{e}^{i(\theta-\varphi)}$$

Question 22

$$e^{in\theta} =$$

Réponse 22

$$\left(e^{i\theta}\right)^n$$

Question 23

$$\frac{1}{e^{i\theta}} =$$

Réponse 23

$$e^{-i\theta}$$

Question 24

Donner les deux formules d'Euler

Réponse 24

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{e}^{i\theta} + \mathrm{e}^{-i\theta}}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{\mathrm{e}^{i\theta} - \mathrm{e}^{-i\theta}}{2i}$$

Question 25

Comment linéariser une expression trigonométrique ? (en bref)

Réponse 25

On remplace les cos et sin par les formules d'Euler, on développe tout les produits et puissance. Puis on utilise les formules d'Euler pour retrouver des cos et des sin.

Question 26

Expliquer rapidement la méthode pour simplifier
$$z = \mathrm{e}^{i\alpha} + \mathrm{e}^{i\beta}.$$

Réponse 26

Méthode de l'angle moitié : On factorise par $i\frac{\alpha+\beta}{2}$ de force et on voit apparaître une formule d'Euler.

Question 27

Comment utiliser la formule de Moivre pour déterminer $\cos(nx)$ et $\sin(nx)$?

Réponse 27

On écrit la formule de Moivre
$\cos(nx) + i\sin(nx) = (\cos x + i\sin x)^n$ et on développe.
Ensuite, on identifie la partie réelle ($\cos(nx)$) et la partie imaginaire ($\sin(nx)$ du résultat.

Question 28

$$\cos\theta + i\sin\theta = ?$$

Réponse 28

$$\mathrm{e}^{i\theta}$$

Question 29

Pour $z = x + iy$ un complexe.
Que vaut e^z ?
Quel est le module et l'argument de e^z ?

Réponse 29

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy}$$

le module est e^x

l'argument y.

Question 30

Soit $\alpha e^{i\beta}$ un complexe, déterminer $z = x + iy$ tel que

$$e^z = \alpha e^{i\beta}$$

(en bref)

Réponse 30

$$\text{On a } e^x e^{iy} = \alpha e^{i\beta} \text{ donc}$$
$$e^x = \alpha \text{ (réel)}$$
$$y = \beta + 2k\pi.$$

Question 31

C'est quoi, une racine carré d'un nombre complexe Δ ?

Réponse 31

C'est un complexe δ vérifiant $\delta^2 = \Delta$.

Question 32

Donner en bref les deux méthodes pour déterminer les racines carrées d'un nombre complexe Δ ?

Réponse 32

Méthode 1. Si Δ se met sous forme exponentielle, on cherche $\delta = \rho e^{i\theta}$, qu'on reporte dans $\delta^2 = \Delta$. Puis on sépare le module et l'argument pour trouver ρ et θ. Attention, ne pas oublier les $2k\pi$!

Méthode 2. Si Δ se met sous forme algébrique, on cherche $\delta = x + iy$, qu'on reporte dans $\delta^2 = \Delta$. Puis on sépare partie réelle et imaginaire pour trouver x et y.

Question 33

Donner les solutions de $az^2 + bz + c = 0$.

Réponse 33

On note $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant

- Si $\Delta = 0$, une racine double $\frac{-b}{2a}$.
- Si $\Delta \neq 0$, deux racines simples, on calcule δ une racine carré de Δ, et on a comme solutions $\frac{-b+\delta}{2a}$ et $\frac{-b-\delta}{2a}$

Question 34

C'est quoi les racines n-ième de 1 ?
Comment les calculer (en bref) ?

Réponse 34

Ce sont des nombres ω tels que $\omega^n = 1$. On pose $\omega = \rho e^{i\theta}$ et on reporte dans l'équation. En séparant module et argument, on a $\rho = 1$ et $\theta = \frac{2k\pi}{n}$, avec $k = 0, 1, \cdots, n-1$.

Question 35

les racines n-ième de 1 forment quelle figure géométriquement ?

Réponse 35

ça forme un polygone régulier à n coté sur le cercle unité.

Question 36

C'est quoi les racines n-ième de a (un complexe) ?
Il y en a combien ?

Réponse 36

Ce sont les nombres z tels que $z^n = a$.
Il y en a n (sauf si a est nul).

Question 37

Sous quelle forme doit être a pour pouvoir calculer facilement ses racines n-ièmes ?
Dans ce cas, on pose $z =$?

Réponse 37

a doit être sous forme exponentielle, alors on pose $z = \rho e^{i\theta}$ et on reporte dans l'équation. En séparant module et argument, on trouve la valeur de ρ et les n valeurs de θ.