Révisions 9

Récurrence et somme

Afficher une page à la fois seulement.
Une page : une question
page suivante : la réponse.

Question 1

Donner la rédaction type d'une récurrence, en notant $P(n)$ la propriété qu'on veut montrer $\forall n \in \mathbb{N}$.

Réponse 1

1. On veut démontrer $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$
2. Initialisation. Pour $n = 0, P(0)$ est vrai car ..... (arguments et explications à donner)
3. Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ est vrai. En utilisant $P(n)$ et d'autre calcul, on montre que $P(n+1)$ est vrai.
4. Donc par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ est vrai.

Question 2

Que signifie la notation $\sum_{k=0}^{n} a_k$?

Réponse 2

L'addition de tous les termes de type a_k, en remplaçant k, par 0, puis 1, puis 2.... jusqu'à n.

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$$

Question 3

Que signifie la notation $\prod_{k=0}^{n} a_k$?

Réponse 3

La multiplication de tous les termes de type a_k, en remplaçant k, par 0, puis 1, puis 2.... jusqu'à n.

$$\prod_{k=0}^{n} a_k = a_0 \times a_1 \times \cdots \times a_n$$

Question 4

$$\sum_{k=0}^{n} a^k =$$

Réponse 4

$$\frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$$

$$\text{si } a \neq 1$$
$$n + 1 \text{ si } a = 1$$

Question 5

$$\sum_{k=m}^{n} x =$$

Réponse 5

$$(n - m + 1)x$$

Question 6

$$\sum_{k=0}^{n} k$$

Réponse 6

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

Question 7

$$n! =$$

comment ça se lit ?

Réponse 7

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$$

Factorielle n

Question 8

$$\text{si } 0 \leqslant p \leqslant n,$$

$$\binom{n}{p} =$$

Réponse 8

$$\frac{n!}{p!(n-p)!}$$

$$\text{coefficient binomial } n, p$$

Question 9

Comment calculer des coefficients binomiaux avec le triangle de Pascal ?

Réponse 9

On fait une sorte de tableau : en colonne les valeur de n de 0 à ... et en ligne les valeurs de p de 0 à .... Ensuite on remplit le tableau :
Première colonne et diagonale = que le chiffre 1. Au-dessus de la diagonale = rien. Ensuite, sur une ligne, on addition deux termes consécutifs et on met le résultat dans la case sous le deuxième terme.

Question 10

Donner la formule du binôme de Newton.

Réponse 10

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Question 11

Donner la méthode permettant de calculer (à la main ! !) $(x+y)^n$ quand n est petit.

Réponse 11

On fait le triangle de Pascal jusqu'à la ligne n. On prend les coefficients de cette ligne et on les écrit dans l'ordre, en séparant par des $+$. Après on écrit les puissances de x dans l'ordre de 0 à n, une par coefficient. Puis les puissances de y dans l'ordre inverse de n à 0, une par coefficient.

Question 12

Donner la version du binôme de Newton pour les matrices.
à quelle condition est-elle valable ?

Réponse 12

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$$

à condition que $AB = BA$ (produit commutatif)