32. Compléments sur les équations différentielles

1 équations différentielles linéaires

1.1 Ce qu'on sait déjà résoudre

Equation linéaire du premier ordre.

$$(E): \quad y' + a(x)y = b(x)$$

Les solutions sont de la forme $y(x) = y_p(x) + \lambda \exp(-A(x))$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et A une primitive de a et y_p une solution particulière de l'équation. On détermine la valeur de la constante λ grâce à une condition initiale.

Equation linéaire du second ordre à coefficients constants.

$$(E): \quad ay'' + by' + cy = d(x)$$

avec a, b, c des constantes. On résout l'équation homogène grâce à l'équation caractéristique et on cherche une solution particulière avec une forme particulière selon l'expression de $d(x)$.

1.2 équations différentielles linéaires d'ordre 2

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a,\ b,\ c$ et d quatre fonctions continues sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$ (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On suppose que la fonction a ne s'annule pas sur I. L'équation différentielle

$$(E): \quad a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = d(x)$$

est appelée une équation différentielle linéaire d'ordre 2 et l'équation

$$(H): \quad a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0$$

est l'équation homogène qui lui est associée.

Théorème 1.
L'ensemble S_H des solutions de (H) sur I est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension 2. Si y_1 et y_2 sont deux solutions non colinéaires de S_H sur I, les solutions de (H) sur I sont toutes les fonctions de la forme :

$$\forall x \in I,\ y_h(x) = Ay_1(x) + By_2(x) \text{ avec } (A, B) \in \mathbb{K}^2$$

Les solutions de (E) sur I sont toutes les fonctions de la forme $\forall x \in I,\ y(x) = y_p(x) + y_h(x)$, où y_p est une solution particulière de (E).
De plus, pour tout $x_0 \in I$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$, le problème de Cauchy

$$\begin{cases} a(x)y\text{''} + b(x)y' + c(x)y = d(x) \\ y(x_0) = \alpha \\ y'(x_0) = \beta \end{cases}$$

admet une unique solution sur I.

Méthode de résolution dans le cas où l'on connaît une solution de (H)
On veut résoudre l'équation différentielle $(E):\ a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = d(x)$ sur un intervalle I.

1. On détermine une solution f de l'équation homogène (H) qui ne s'annule pas sur I (suggestion de l'énoncé, solution évidente....)
2. On pose $y = u \times f$, avec u une fonction deux fois dérivable sur I qu'on doit déterminer. La fonction y est deux fois dérivable sur I et on calcule les dérivées $y' = u'f + uf'$ et $y'' = u''f + 2u'f' + uf''$.
3. On reporte dans l'équation :
$$\begin{aligned} ay'' + by' + cy = d &\iff a(u''f + 2u'f' + uf'') + b(u'f + uf') + c(uf) = d \\ &\iff u\underbrace{(af'' + bf' + cf)}_{=0} + (af)\ u'' + (2af' + b)\ u' = d \\ &\iff (af)\ u'' + (2af' + b)\ u' = d. \end{aligned}$$
4. On posant $z = u'$; on est ramené à l'équation différentielle linéaire du premier ordre
$$(E_2) \quad (af)\ z' + (2af' + b)\ z = d.$$
5. On résout (E_2) pour trouver z, on en déduit u (car $z = u'$, ne pas oublier les constantes d'intégration !) , puis y (car $y = u \times f$).

Exemple. Résoudre (E) : $x^2y'' - 2y = 0$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ en remarquant que la fonction $f: \begin{cases} \mathbb{R}^{+*} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{cases}$ est une solution particulière de (E) sur cet intervalle.

1.3 Systèmes linéaires à coefficients constants

Définition 2.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}} \in M_n(\mathbb{R})$. On appelle système linéaire homogène d'ordre 1 à coefficients constants le système

$$(S) \quad \begin{cases} y_1' = a_{1,1}y_1 + a_{1,2}y_2 + \cdots + a_{1,n}y_n \\ y_2' = a_{2,1}y_1 + a_{2,2}y_2 + \cdots + a_{2,n}y_n \\ \vdots \\ y_n' = a_{n,1}y_1 + a_{n,2}y_2 + \cdots + a_{n,n}y_n \end{cases}$$

où $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ est un $n-$uplet de fonctions réelles inconnues définies sur I et de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. En posant $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ et $Y' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix}$, le système (S) s'écrit

$$Y' = AY.$$

Exemple. Le système $\begin{cases} x' = -4x + 3y + 3z \\ y' = -3x + 2y + 3z \\ z' = -3x + 3y + 2z \end{cases}$ peut s'écrire $Y' = AY$ où $Y = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $Y' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 3 \\ -3 & 2 & 3 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Théorème 3.

L'ensemble des solutions sur I d'un tel système (S) est un espace vectoriel de dimension n. Pour tout $t_0 \in I$ et tout $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$, il existe un unique $n-$uplet $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ solution de (S) vérifiant $(y_1(t_0), y_2(t_0), \ldots, y_n(t_0)) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$.

Résolution dans le cas où A est diagonalisable. On considère toujours le système (S) de la définition 1, qu'on met sous la forme $Y' = AY$.
On diagonalise la matrice A (si elle est diagonalisable !) : il existe une matrice inversible P (formée des vecteurs colonnes propres de A) et une matrice diagonale $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ telle que $A = PDP^{-1}$.

Soit $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ un $n-$uplet de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. On a alors :

$$Y' = AY \iff Y' = PDP^{-1}Y \iff P^{-1}Y' = D(P^{-1}Y).$$

On pose $U = P^{-1}Y = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$. Les fonctions $u_1, u_2, \ldots, u_n$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur I comme combinaisons linéaires des fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$ et l'on a par linéarité de la dérivation :

$$U' = \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \\ \vdots \\ u_n' \end{pmatrix} = P^{-1}Y'$$

On a alors

$$Y' = AY \iff U' = DU \iff \begin{cases} u_1' = \lambda_1 u_1 \\ u_2' = \lambda_2 u_2 \\ \vdots \\ u_n' = \lambda_n u_n \end{cases}$$

$$\iff \exists (k_1, k_2, \ldots, k_n) \in \mathbb{R}^n,\ \forall t \in I,\ (u_1(t), u_2(t), \ldots, u_n(t)) = (k_1 \,\mathrm{e}^{\lambda_1 t}, k_2 \,\mathrm{e}^{\lambda_2 t}, \ldots, k_n \,\mathrm{e}^{\lambda_n t}).$$

Pour obtenir Y, et donc les solutions de (S), on utilise $Y = PU$. On remarque qu'il est absolument inutile de calculer P^{-1} !

Exemple. Résoudre le système $\begin{cases} x' = -4x + 3y + 3z \\ y' = -3x + 2y + 3z \\ z' = -3x + 3y + 2z. \end{cases}$

1.4 Autres exemples de méthodes de résolution

Changement de fonction (ou d'inconnue) En changeant la fonction inconnue y, on peut essayer de se ramener à une équation qu'on sait résoudre.

Exemple. Résoudre $x^2y'' - 2xy' + (2 - x^2)y = 0$ sur $]0, +\infty[$ en effectuant le changement de fonction $z = \dfrac{y}{x}$.

Changement de variable On changeant la variable, on peut essayer de se ramener à une équation qu'on sait résoudre. Mais attention, ça nécessite de changer aussi de fonction inconnue car on ne peut pas avoir les deux variables dans la même équation !

Exemple. Résoudre $x^2y'' - 2xy' + y = 0$ sur $]0, +\infty[$ en effectuant le changement de variable $t = \ln(x)$.

2 équation différentielles non linéaires d'ordre 1

Il n'y a plus de méthodes "universelles" dès que l'équation n'est plus linéaire. On va étudier quelques types d'équation où on peut trouver des solutions. Mais il y a de nombreuses équations différentielles dont on ne peut pas trouver de solution !

2.1 équations différentielles à variables séparables

Définition 4.
On appelle équation différentielle à variables séparables toute équation différentielle du premier ordre qui s'écrit

$$a(y)y' = b(x) \tag{E}$$

où a et b sont deux fonctions réelles de classe $\mathcal{C}^1$ sur les intervalles ouverts respectifs J et I.

Remarque : Si le second membre $b(x)$ est une fonction constante, on parle d'équation incomplète (mais à variables séparables tout de même).

Exemple. L'équation différentielle $\dfrac{y'}{1+y^2} = \dfrac{1}{1+x^2}$ est une équation à variables séparables.

Technique. Supposons que a ne s'annule pas sur J. Nous allons "intégrer" de chaque coté de l'équation. $y' \times a(y) = b(x)$.

$y' \times a(y)$ a pour primitive $A(y)$ avec A une primitive de la fonction a. Notons B une primitive de la fonction b, on obtient alors

$$A(y) = B(x) + \lambda$$

C'est une équation confinant y, qu'on voudrait pouvoir isoler.

Remarque : A la "physicienne", on remplace le y' par dy/dx et on passe dx de l'autre coté, ce qui fait $a(y)dy = b(x)dx$, puis on intègre. Et on obtient le même résultat.

La fonction a ne s'annulant pas, elle est de signe constant et donc sa primitive A est strictement monotone. Comme A est de plus continue sur J, elle réalise une bijection. En notant A^{-1} la bijection réciproque de A, on obtient $y(x) = A^{-1}(B(x) + \lambda)$.

Mais il n'est pas toujours possible d'obtenir y de façon explicite (par exemple lorsque A^{-1} ne s'exprime pas à l'aide des fonctions usuelles). On dit alors que l'on obtient une solution implicite de l'équation différentielle.

Exemple. Résoudre l'équation différentielle $y' = \dfrac{y^2}{x^2}$ sur $]0, +\infty[$.

2.2 équations de Bernoulli

Définition 5.
On appelle équation différentielle de Bernouilli toute équation différentielle de la forme

$$(E_\alpha) \qquad y' = a(x)y + b(x)y^\alpha \qquad \text{avec } \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$$

où a et b sont deux fonctions réelles continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Remarque : On a exclu les cas $\alpha = 0$ et $\alpha = 1$ pour lesquels on a affaire à une équation linéaire qu'on sait résoudre.

Technique. On cherche ici les solutions y qui ne s'annulent pas sur I (et même les solutions strictement positives sur I si α n'est pas un entier).

1. On divise toute l'équation par y^α, on obtient :
$$\frac{y'}{y^\alpha} = a(x)\frac{1}{y^{\alpha-1}} + b(x)$$
2. On pose $z = \dfrac{1}{y^{\alpha-1}}$. La dérivée de z est alors $z' = (1-\alpha)\dfrac{y'}{y^\alpha}$. On remplace dans l'équation
$$\frac{1}{1-\alpha}z' = a(x)z + b(x)$$
On obtient donc une équation linéaire d'ordre 1 que l'on sait résoudre.

Exemple. Chercher les solutions strictement positives sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle suivante (qui apparaît lorsque l'on étudie la chute d'une masse dans un liquide) où a et b désignent deux constantes réelles strictement positives :

$$(E) \qquad y' - 2ay + by^2 = 0.$$

2.3 équations de Ricatti

Définition 6.
On appelle équation différentielle de Ricatti toute équation différentielle de la forme

$$(E) \qquad y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)$$

où a, b et c sont deux fonctions réelles continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Technique.

1. On détermine une solution particulière y_p de (E) (suggestion de l'énoncé, solution évidente...)
2. On cherche z une fonction dérivable sur I telle que $y = y_p + z$. On a alors en dérivant $y' = y_p' + z'$. On reporte dans l'équation (E).
3. On doit pouvoir simplifier y_p' au cours du calcul et on obtient une équation de la forme
$$(E') \qquad z' = d(x)z + e(x)z^2$$
qui est une équation de Bernoulli d'inconnue z.
4. On résout (E') avec la méthode des équations de Bernoulli pour trouver z, puis on en déduit y.

Fiche d'exercices XXXII : Equation différentielles

Exercice 1

($\star\star$) Résoudre $(E) : y" - 2xy' - 2y = 0$ sur $\mathbb{R}$ en remarquant que la fonction $f : x \to e^{x^2}$ est une solution particulière de (E). On notera $\phi(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$.

Exercice 2

($\star\star$) Résoudre le système différentiel

$$(S) \left\{ \begin{array}{llll} x' & = 4x & -3y & +2z \\ y' & = 6x & -5y & +4z \\ z' & = 4x & -4y & +4z \end{array} \right.$$

avec les conditions initiales $x(0) = 3, y(0) = 5$ et $z(0) = 3$.

Exercice 3

($\star\star$) Chercher la solution de l'équation à variables séparables

$$y' + (1 - \frac{3}{t^4})e^y = 0, \qquad y(1) = 3.$$

Exercice 4

($\star\star$) En posant $u = \frac{y}{t}$, résoudre les équations différentielles homogènes

$$(E_1) : y' = \frac{t^2 + y^2}{ty} \qquad \text{et} \quad (E_2) : tyy' = y^2 - t^2$$

.

Exercice 5

($\star\star$) Résoudre l'équation différentielle de Bernoulli

$$y' = y^3 - \frac{y}{t}.$$

Exercice 6

($\star\star$) Étudier l'équation différentielle de Bernoulli $y' = y^2$ sur $\mathbb{R}$. Montrer que toute solution explose en un temps fini.

Exercice 7

($\star\star$) Résoudre sur $\mathbb{R}^+$ l'équation de Ricatti :

$$y' = (y - 1)(ty - y - t)$$

Exercice 8

($\star\star$) Résoudre

$$y = ty' - \frac{y'^2}{4}$$

Indication de méthode : On posera $p = y'$ dans le second membre de l'équation, puis on dérivera l'équation.

Exercice 9

($\star\star$) **La courbe du chien.** On se place dans le plan muni d'une b.o.n.d $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère un maître et son chien. A l'instant $t = 0$, le maître part du point O et parcourt la demi-droite $[Oy)$ à la vitesse constante v. Au même moment, le chien part du point de coordonnées $(x_0, 0)$ et il court constamment vers son maître à la vitesse 2v.
On note $(x(t), y(t))$ la position du chien à tout instant et on s'intéresse à la courbe de la course du chien, c'est à dire qu'on veut exprimer y en fonction de x. On admet que la fonction $y : x \to y(x)$ vérifie l'équation différentielle suivante

$$(E) \quad 4x^2(y")^2 - (y')^2 = 1$$

1. Chercher deux solutions particulières y_1 et y_2 de l'équation homogènes H : $4x^2(y")^2 - (y')^2 = 0$. Indication : utiliser l'identité remarquable $a^2 - b^2$.
2. Chercher des solutions de (E) sous sous la forme $y = ay_1 + by_2 + c$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ des constantes et b qu'on exprimera en fonction de a et c.
3. Déterminer les constantes à l'aide des conditions initiales.
4. En déduire la position du chien quand il rattrape son maître.