31. Séries de Fourier

1 Intégrale d'une fonction périodique

Rappel Une fonction réelle f est dite périodique de période T (ou T-périodique) si $f(x+T) = f(x)$. Le graphe de la fonction f a un motif de longueur T qui se répète.

Propriété 1.

Soit T un nombre réel strictement positif et f une fonction $T-$périodique et continue par morceaux définie sur $\mathbb{R}$. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a

$$\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)\mathrm{d}t = \int_{0}^{T} f(t)\mathrm{d}t.$$

Autrement dit, l'intégrale de f est la même sur tout intervalle de longueur la période T.

TRES IMPORTANT ! Ce résultat signifie que toutes ces intégrales du cours de la forme $\int_0^T$ peuvent être calculées sur n'importe quel intervalle de longueur T. C'est à dire qu'on peut remplacer $\int_0^T$ par $\int_\alpha^{\alpha+T}$ avec α un réel, ou $\int_{-T/2}^{T/2}$ pour intégrer sur un intervalle symétrique en 0.

2 Coefficients de Fourier et série de Fourier

2.1 Définitions générales

Définition 2.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction $T-$périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. On pose $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ et l'on note

$$a_0(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n(f) = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(\omega nt)\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad b_n(f) = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(\omega nt)\mathrm{d}t.$$

Les nombres réels $a_0(f), a_1(f), a_2(f), \ldots, b_1(f), b_2(f)\ldots$ sont appelés les coefficients de Fourier de f.

Remarque : Lorsque $T = 2\pi$, on a $\omega = 1$.

Définition 3.

On appelle série de Fourier de f l'addition formelle infinie :

$$S(f)(t) = a_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n(f)\cos(\omega nt) + b_n(f)\sin(\omega nt))$$

Remarque : Si on arrête la somme à N, on appelle ça $S_N(f)$ la somme partielle de la série de Fourier. La notation $S(f)(t)$ n'a de sens pour pour les $t \in \mathbb{R}$ tels que la suite de nombres réels $(S_N(f)(t))$ est convergente. Le problème est de savoir en quels $t \in \mathbb{R}$ la suite $(S_N(f)(t))_{N\in\mathbb{N}}$ converge et si en ces points $S(f)(t) = f(t)$.

2.2 Parité, imparité

Propriété 4.

Soit f une fonction $T-$périodique continue par morceaux.

— Si f est paire, alors $a_0(f) = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^{T/2} f(t)\mathrm{d}t$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$b_n(f) = 0, \qquad a_n(f) = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos(n\omega t)\mathrm{d}t.$$

— Si f est impaire, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n(f) = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$b_n(f) = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\sin(n\omega t)\mathrm{d}t.$$

Exemple. Soit f la fonction impaire, $2\pi-$périodique qui vaut 1 sur l'intervalle $]0, \pi[$, et 0 en 0 et π. Calculer les coefficients de Fourier de f et écrire sa série de Fourier.

Exercice 1

Soit la fonction f paire et 2π-périodique telle que :

$$\forall t \in [0;\pi], \ f(t) = t$$

Tracer f. Déterminer le développement en série de Fourier de f.

3 Théorèmes de convergence d'une série de Fourier

3.1 Convergence quadratique : la formule de Parseval

Théorème 5.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction $T-$périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. Alors la série numérique $\sum_{n\geqslant 1}(a_n^2(f)+b_n^2(f))$ converge et l'on a

$$\frac{1}{T}\int_0^T (f(t))^2 \mathrm{d}t = a_0^2(f) + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n^2(f)+b_n^2(f)\right). \quad \text{(Identité de Parseval)}$$

Exemple. Soit f la fonction 2π périodique qui vaut 1 sur l'intervalle $[0,\pi[$ et 0 sur l'intervalle $[\pi, 2\pi[$.

Exercice 2

Soit la fonction f paire et 2π-périodique telle que :

$$\forall t \in [0;\pi],\ f(t) = t$$

Appliquer le théorème de Parseval à f. On rappelle que $a_0 = \frac{\pi}{2}$ et $a_{2k+1} = \frac{-4}{(2k+1)^2\pi}$, tous les autres coefficients de Fourier de f étant nuls.

3.2 Premier théorème de convergence de Dirichlet

Notation. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note les limites à droite et à gauche de f en x par :

$$f(t+0) = \lim_{x\to t^+} f(x) \qquad \text{et} \qquad f(t-0) = \lim_{x\to t^-} f(x)$$

Théorème 6.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $T-$périodique et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Soit $S(f)$ sa série de Fourier.
Pour tout $t \in \mathbb{R}$, la série de Fourier de f converge et on a :

- $S(f)(t) = f(t)$ en tout point t où f est continue
- $S(f)(t) = \frac{f(t-0)+f(t+0)}{2}$ aux points t où f n'est pas continue, avec $f(t+0) = \lim_{x\to t^+} f(x)$ et $f(t-0) = \lim_{x\to t^-} f(x)$. (C'est-à-dire le milieu entre la valeur à gauche de t et la valeur à droite).

Exemple.

3.3 Deuxième théorème de convergence de Dirichlet

Théorème 7.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction $T-$périodique, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux et continue sur $\mathbb{R}$.
On note $S_(f)$ la série de Fourier de f, et $(a_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ ses coefficients de Fourier. La série de Fourier de f converge en tout point de $\mathbb{R}$ et l'on a

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad S(f)(t) = f(t).$$

De plus, les séries $\sum a_n(f)$ et $\sum b_n(f)$ sont absolument convergentes. Et pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\int_x^y f(t)\mathrm{d}t$ s'obtient en intégrant terme à terme la série de Fourier de f, c'est-à-dire

$$\int_x^y f(t)\mathrm{d}t = \int_x^y a_0(f)\mathrm{d}t + \sum_{n=1}^{+\infty}\int_x^y \left(a_n(f)\cos(\omega nt) + b_n(f)\sin(\omega nt)\right)\mathrm{d}t$$

$$= (y-x)a_0(f)$$

$$+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\omega n}\Big[a_n(f)(\sin(\omega ny)-\sin(\omega nx)) + b_n(f)(\cos(\omega nx)-\cos(\omega ny))\Big].$$

Exercice 3

Soit la fonction f paire et 2π-périodique telle que :

$$\forall t \in [0;\pi],\ f(t) = t$$

Appliquer le théorème de Dirichlet à f et évaluer la série de Fourier pour $t = 0$. On rappelle que

$$S(f)(t) = \frac{\pi}{2} + \sum_{k\geqslant 0}\frac{-4}{(2k+1)^2\pi}\cos(2p+1)t$$

4 Forme exponentielle des coefficients de Fourier

Propriété 8.

Soit f une fonction $T-$périodique et continue par morceaux. On peut définir les coefficients de Fourier complexes $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ de f de la façon suivante :

$$c_n(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{e}^{-in\omega t}\,\mathrm{d}t.$$

La série de Fourier de f s'écrit alors (quand elle converge) :

$$\forall t\in\mathbb{R},\ S(f)(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(f)\,\mathrm{e}^{ik\omega t}.$$

Remarque : Pour $n=0$, on a $c_0(f)=a_0(f)$. Pour $n\in\mathbb{N}$, en décomposant $e^{-in\omega t} = \cos(n\omega t) - i\sin(n\omega t)$, on trouve

$$c_n(f) = \frac{1}{2}(a_n(f) - ib_n(f)) \qquad \text{et} \qquad c_{-n}(f) = \frac{1}{2}(a_n(f) + ib_n(f))$$

On remarque alors que pour tout $n\in\mathbb{N}^*, c_{-n}(f) = \overline{c_n(f)}$.

Il est parfois plus facile de calculer les coefficients $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ à l'aide de la formule intégrale que les coefficients $(a_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$. On peut ensuite retrouver ces coefficients à l'aide de la formule suivante :

$$a_0(f) = c_0(f),\ \text{et}\quad \forall n\in\mathbb{N}^*,\ \begin{cases} a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f) \\ b_n(f) = i(c_n(f) - c_{-n}(f)). \end{cases}$$

Dans ce cadre, l'identité de Parseval est la suivante :

Théorème 9.

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction $T-$périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. Alors

$$\frac{1}{T}\int_0^T (f(t))^2\mathrm{d}t = (c_0(f))^2 + \sum_{n=1}^{+\infty}(|c_{-n}(f)|^2 + |c_n(f)|^2).$$

En effet, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $|c_{-n}(f)|^2 + |c_n(f)|^2 = 2\times|c_n(f)|^2 = \frac{1}{2}\times[(a_n(f))^2 + (b_n(f))^2]$.

5 TD 31 Série de Fourier

Exercice 1

On considère la fonction 2π périodique f, telle que :

$$\forall t\in]-\pi;\pi],\ f(t) = \mathrm{e}^t.$$

1. Tracer le graphe de f.
2. Déterminer le développement en série de Fourier de f et sa valeur en tout point $t\in\mathbb{R}$.
3. En utilisant le théorème de Dirichlet ou le théorème de Parseval, calculer les sommes suivantes : $A = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n^2+1}$ et $B = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+1}$.

Exercice 2

On considère la fonction 2π périodique f, impaire, telle que :

$$\forall t\in[0;\pi],\ f(t) = \sin^2(t).$$

1. Tracer le graphe de f.
2. Déterminer le développement en série de Fourier de f et sa valeur en tout point $t\in\mathbb{R}$.
3. En utilisant le théorème de Dirichlet ou le théorème de Parseval, calculer les sommes suivantes : $A = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}$ et $B = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^2(2n+1)^2(2n+3)^2}$.

Exercice 3

Montrer que pour tout $t\in\mathbb{R}$, on a

$$|\cos(2t)| = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4(-1)^{n+1}}{\pi(4n^2-1)}\cos(4nt)$$

Exercice 4

On considère la fonction 2π périodique f, telle que :

$$\forall t\in[0;2\pi[,\ f(t) = t^2.$$

1. Tracer le graphe de f.
2. Déterminer le développement en série de Fourier de f et sa valeur en tout point $t\in\mathbb{R}$.
3. En utilisant le théorème de Dirichlet ou de Parseval, calculer les sommes sui-

vantes :

$$A = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2},\ B = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2},\ C = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}.$$