30. Séries de Fourier

1 Intégrale d'une fonction périodique

Rappel. Une fonction réelle f est dite périodique de période T (ou T-périodique) si $f(x+T) = f(x)$. Le graphe de la fonction f a un motif de longueur T qui se répète.

Propriété 1.
Soit T un nombre réel strictement positif et f une fonction $T-$périodique et continue par morceaux définie sur $\mathbb{R}$. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a

$$\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)\mathrm{d}t = \int_0^T f(t)\mathrm{d}t.$$

Autrement dit, l'intégrale de f est la même sur tout intervalle de longueur la période T.

TRES IMPORTANT ! Ce résultat signifie que toutes ces intégrales du cours de la forme $\int_0^T$ peuvent être calculées sur n'importe quel intervalle de longueur T. C'est à dire qu'on peut remplacer $\displaystyle\int_0^T$ par $\displaystyle\int_{\alpha}^{\alpha+T}$ avec α un réel, ou $\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2}$ pour intégrer sur un intervalle symétrique en 0.

2 Coefficients de Fourier et série de Fourier

2.1 Définitions générales

Définition 2.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction $T-$périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. On pose $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ et l'on note

$$a_0(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n(f) = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(\omega n t)\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad b_n(f) = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(\omega n t)\mathrm{d}t.$$

Les nombres réels $a_0(f), a_1(f), a_2(f), \dots, b_1(f), b_2(f)\dots$ sont appelés les coefficients de Fourier de f.

Remarque : Lorsque $T = 2\pi$, on a $\omega = 1$.

Définition 3.
On appelle série de Fourier de f l'addition formelle infinie :

$$S(f)(t) = a_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n(f)\cos(\omega n t) + b_n(f)\sin(\omega n t))$$

Remarque : Si on arrête la somme à N, on appelle ça $S_N(f)$ la somme partielle de la série de Fourier. La notation $S(f)(t)$ n'a de sens pour pour les $t \in \mathbb{R}$ tels que la suite de nombres réels $(S_N(f)(t))$ est convergente. Le problème est de savoir en quels $t \in \mathbb{R}$ la suite $(S_N(f)(t))_{N\in\mathbb{N}}$ converge et si en ces points $S(f)(t) = f(t)$.

2.2 Parité, imparité

Propriété 4.
Soit f une fonction $T-$périodique continue par morceaux.

— Si f est paire, alors $a_0(f) = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^{T/2} f(t)\mathrm{d}t$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$b_n(f) = 0, \qquad a_n(f) = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos(n\omega t)\mathrm{d}t.$$

— Si f est impaire, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n(f) = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$b_n(f) = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\sin(n\omega t)\mathrm{d}t.$$

Exemple. Soit f la fonction impaire, $2\pi-$périodique qui vaut 1 sur l'intervalle $]0,\pi[$, et 0 en 0 et π. Calculer les coefficients de Fourier de f et écrire sa série de Fourier.

3 Théorèmes de convergence d'une série de Fourier

3.1 Convergence quadratique : la formule de Parseval

Théorème 5.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction $T-$périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. Alors la série numérique $\sum\limits_{n\geqslant 1}(a_n^2(f) + b_n^2(f))$ converge et l'on a

$$\frac{1}{T}\int_0^T (f(t))^2\mathrm{d}t = a_0^2(f) + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n^2(f) + b_n^2(f)\right). \quad \text{(Identité de Parseval)}$$

Exemple. Soit f la fonction 2π périodique qui vaut 1 sur l'intervalle $[0,\pi[$ et 0 sur l'intervalle $[\pi, 2\pi[$.

3.2 Premier théorème de convergence de Dirichlet

Notation. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note les limites à droite et à gauche de f en x par :

$$f(t+0) = \lim_{x \to t^+} f(x) \qquad \text{et} \qquad f(t-0) = \lim_{x \to t^-} f(x)$$

Théorème 6.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $T-$périodique et de classe $\underline{\mathcal{C}^1 \text{ par morceaux}}$. Soit $S(f)$ sa série de Fourier.
Pour tout $t \in \mathbb{R}$, la série de Fourier de f converge et on a :

- $S(f)(t) = f(t)$ en tout point t où f est continue
- $S(f)(t) = \frac{f(t-0)+f(t+0)}{2}$ aux points t où f n'est pas continue, avec $f(t+0) = \lim_{x\to t^+} f(x)$ et $f(t-0) = \lim_{x \to t^-} f(x)$. (C'est-à-dire le milieu entre la valeur à gauche de t et la valeur à droite).

Exemple.

3.3 Deuxième théorème de convergence de Dirichlet

Théorème 7.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction $T-$périodique, $\underline{\text{de classe } \mathcal{C}^1 \text{ par morceaux}}$ et $\boxed{\text{continue sur } \mathbb{R}}$.
On note $S_(f)$ la série de Fourier de f, et $(a_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ ses coefficients de Fourier. La série de Fourier de f converge en tout point de $\mathbb{R}$ et l'on a

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad S(f)(t) = f(t).$$

De plus, les séries $\sum a_n(f)$ et $\sum b_n(f)$ sont <u>absolument</u> convergentes. Et pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\displaystyle\int_x^y f(t)\mathrm{d}t$ s'obtient en intégrant terme à terme la série de Fourier de f, c'est-à-dire

$$\int_x^y f(t)\mathrm{d}t = \int_x^y a_0(f)\mathrm{d}t + \sum_{n=1}^{+\infty} \int_x^y (a_n(f)\cos(\omega nt) + b_n(f)\sin(\omega nt))\ \mathrm{d}t$$

$$= (y-x)a_0(f)$$

$$+ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\omega n}\Big[a_n(f)(\sin(\omega ny) - \sin(\omega nx)) + b_n(f)(\cos(\omega nx) - \cos(\omega ny))\Big].$$

4 Forme exponentielle des coefficients de Fourier

Propriété 8.

Soit f une fonction $T-$périodique et continue par morceaux. On peut définir les coefficients de Fourier complexes $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ de f de la façon suivante :

$$c_n(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\, \mathrm{e}^{-in\omega t}\, \mathrm{d}t.$$

La série de Fourier de f s'écrit alors (quand elle converge) :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ S(f)(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(f)\, \mathrm{e}^{ik\omega t}.$$

Remarque : Pour $n = 0$, on a $c_0(f) = a_0(f)$. Pour $n \in \mathbb{N}$, en décomposant $e^{-in\omega t} = \cos(n\omega t) - i\sin(n\omega t)$, on trouve

$$c_n(f) = \frac{1}{2}(a_n(f) - ib_n(f)) \qquad \text{et} \qquad c_{-n}(f) = \frac{1}{2}(a_n(f) + ib_n(f))$$

On remarque alors que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, c_{-n}(f) = \overline{c_n(f)}$.

Il est parfois plus facile de calculer les coefficients $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ à l'aide de la formule intégrale que les coefficients $(a_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$. On peut ensuite retrouver ces coefficients à l'aide de la formule suivante :

$$a_0(f) = c_0(f), \text{ et } \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \begin{cases} a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f) \\ b_n(f) = i(c_n(f) - c_{-n}(f)). \end{cases}$$

Dans ce cadre, l'identité de Parseval est la suivante :

Théorème 9.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction $T-$périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. Alors

$$\frac{1}{T}\int_0^T (f(t))^2 \mathrm{d}t = (c_0(f))^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} (|c_{-n}(f)|^2 + |c_n(f)|^2).$$

En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|c_{-n}(f)|^2 + |c_n(f)|^2 = 2 \times |c_n(f)|^2 = \frac{1}{2} \times [(a_n(f))^2 + (b_n(f))^2]$.

Exercice 1

Soit la fonction f paire et 2π-périodique telle que : $\forall t \in [0;\pi],\ f(t) = t$.

1. Tracer le graphe de f.
2. Déterminer le développement en série de Fourier de f et sa valeur en tout point $t \in \mathbb{R}$.
3. En utilisant le théorème de Dirichlet ou le théorème de Parseval, calculer les sommes suivantes : $A = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ et $C = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$
4. En déduire $B = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, $D = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$, $E = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ et $F = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^4}$.

Exercice 2

On considère la fonction 2π périodique f, telle que :

$$\forall t \in]-\pi;\pi],\ f(t) = \mathrm{e}^t\,.$$

1. Tracer le graphe de f.
2. Déterminer le développement en série de Fourier de f et sa valeur en tout point $t \in \mathbb{R}$.
3. En utilisant le théorème de Dirichlet ou le théorème de Parseval, calculer les sommes suivantes : $A = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$ et $B = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$.

Exercice 3

On considère la fonction 2π périodique f, impaire, telle que :

$$\forall t \in [0;\pi],\ f(t) = \sin^2(t).$$

1. Tracer le graphe de f.
2. Déterminer le développement en série de Fourier de f et sa valeur en tout point $t \in \mathbb{R}$.
3. En utilisant le théorème de Dirichlet ou le théorème de Parseval, calculer les sommes suivantes :
$A = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}$ et $B = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2(2n+1)^2(2n+3)^2}$.

Exercice 4

Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$|\cos(2t)| = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4(-1)^{n+1}}{\pi(4n^2-1)} \cos(4nt)$$

Exercice 5

On considère la fonction 2π périodique f, telle que :

$$\forall t \in [0; 2\pi[, \ \ f(t) = t^2.$$

1. Tracer le graphe de f.
2. Déterminer le développement en série de Fourier de f et sa valeur en tout point $t \in \mathbb{R}$.
3. En utilisant le théorème de Dirichlet ou de Parseval, calculer les sommes suivantes :
$$A = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}, \ B = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}, \ C = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}.$$