

30. Espaces vectoriels euclidiens

1 Généralités

1.1 Produit scalaire et norme

Définition 1.

Un espace vectoriel euclidien E , c'est :

- un espace vectoriel. C'est à dire des objets mathématiques appelés vecteurs qu'on peut additionner entre eux et multiplier par un nombre.
- de dimension finie n . C'est à dire qu'il y a une base de n vecteurs et qu'on peut travailler avec des coordonnées.
- muni d'un produit scalaire.

Définition 2.

Un produit scalaire sur un espace vectoriel E est une forme bilinéaire symétrique définie positive sur E . C'est à dire une opération qui, en multipliant deux vecteurs, donne un nombre (d'où le "scalaire"). On note $(x|y)$ le résultat du produit scalaire des vecteurs x et y de E . De plus, le produit scalaire doit obéir à trois règles :

1. bilinéarité : $(\lambda x_1 + \mu x_2 | y) = \lambda(x_1 | y) + \mu(x_2 | y)$ et $(x | \lambda y_1 + \mu y_2) = \lambda(x | y_1) + \mu(x | y_2)$ pour tout x_1, x_2, y_1, y_2, x et y des vecteurs de E et λ, μ des réels.
2. symétrie : $(x | y) = (y | x)$ pour tout $x, y \in E$
3. définie positif : $(x | x) \geq 0$ et $(x | x) = 0 \iff x = 0$ pour tout $x \in E$.

Exemples.

1. \mathbb{R}^3 est un espace vectoriel euclidien avec le produit scalaire suivant : pour $u = (x, y, z)$ et $v = (x', y', z')$, on a $(u|v) = xx' + yy' + zz'$.
2. Plus généralement, \mathbb{R}^n est un espace vectoriel euclidien si on le munit du produit scalaire canonique sur \mathbb{R}^n , défini ainsi : pour tous vecteurs $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ de \mathbb{R}^n , on pose

$$(x|y) = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n = \sum_{k=1}^n x_ky_k.$$

3. On peut définir d'autres produits scalaires sur \mathbb{R}^n : par exemple, on peut poser $(x|y) = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3 + \dots + nx_ny_n$. C'est aussi un produit scalaire, mais dont le résultat est différent du précédent.

Exemple. Pour toutes fonctions $f, g \in \mathcal{C}([0; 1], \mathbb{R})$, on pose

$$(f|g) = \int_0^1 f(t)g(t) dt.$$

D'après la linéarité de l'intégrale, cette application est une forme bilinéaire sur $\mathcal{C}([0; 1], \mathbb{R})$ qui est clairement symétrique. De plus, pour toute fonction $f \in \mathcal{C}([0; 1], \mathbb{R})$, on a

$$\begin{cases} (f|f) = \int_0^1 f^2(t) dt \geq 0 & \text{(positivité de l'intégrale, } f^2 \text{ étant positive)} \\ (f|f) = 0 \iff \int_0^1 f^2(t) dt = 0 \stackrel{(1)}{\iff} f^2 = 0 \iff f = 0 \end{cases}$$

⁽¹⁾ car f^2 est positive et continue. On a donc défini un produit scalaire sur l'espace vectoriel $\mathcal{C}([0; 1], \mathbb{R})$. Mais ça ne fait pas un espace vectoriel euclidien car $\mathcal{C}([0; 1], \mathbb{R})$ n'est pas de dimension finie.

A l'aide d'un produit scalaire, on peut définir d'autres notions sur E : la norme (longueur) d'un vecteur et l'orthogonalité de deux vecteurs.

Définition 3.

Pour tout $x \in E$, on définit la norme de x par $\|x\| = \sqrt{(x|x)}$. C'est la norme associée au produit scalaire.
Un vecteur est dit unitaire lorsque sa norme vaut 1.

La norme associée au produit scalaire vérifie les propriétés suivantes.

Propriété 4.

1. $\forall x \in E, \|x\| \geq 0$ (positivité)
2. $\forall x \in E, \|x\| = 0 \iff x = 0$ (séparation)
3. $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$, (homogénéité)
4. $\forall x, y \in E, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (inégalité triangulaire).

Remarque : La norme adapte aux espaces vectoriels la notion de longueur au sens commun du terme. En tant que tel, il est par exemple nécessaire que cet objet prenne des valeurs positives et que l'inégalité triangulaire soit vérifiée. Il existe aussi des normes qui vérifient ces quatre propriétés, mais qui ne sont pas associées à un produit scalaire.

Exemples.

1. Dans l'espace \mathbb{R}^n muni du produit scalaire canonique, la norme du vecteur $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ est donnée par :

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}.$$

2. Dans $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire défini plus haut, la norme de la fonction f est donnée par

$$\|f\| = \sqrt{\int_0^1 f^2(t) dt}.$$

Propriété 5.

Inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$\forall x, y \in E, \quad |(x|y)| \leq \|x\| \|y\|$$

avec égalité si et seulement si x et y sont colinéaires.

Propriété 6.

Pour tout $x, y \in E$, on a :

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \|x\|^2 + 2(x|y) + \|y\|^2, & \|x - y\|^2 &= \|x\|^2 - 2(x|y) + \|y\|^2, \\ (x|y) &= \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2) & (\text{identités de polarisation}). \end{aligned}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= (x + y|x + y) = (x|x + y) + (y|x + y) = (x|x) + (x|y) + (y|x) + (y|y) \\ &= \|x\|^2 + 2(x|y) + \|y\|^2 \end{aligned}$$

On procède de même avec la seconde égalité, puis on soustrait les deux pour obtenir la troisième.

1.2 Orthogonalité

On se place dans E un \mathbb{R} -espace vectoriel euclidien muni du produit scalaire $(\cdot|\cdot)$. Par définition, E est **de dimension finie** et possède donc une base finie.

Définition 7.

- Deux vecteurs x et y de E sont dit orthogonaux si et seulement si $(x|y) = 0$.
- Une famille de vecteurs de E est dite orthogonale si et seulement si ses éléments sont orthogonaux deux à deux.
- Une famille $(x_i)_{i \in I}$ de vecteurs de E est dite orthonormale (ou orthonormée) si et seulement si ses éléments sont orthogonaux deux à deux et si chaque vecteur est unitaire.

Remarque : Le vecteur nul est orthogonal à tout autre vecteur. Une famille orthogonale de cardinal fini dont aucun vecteur n'est nul est libre.

Théorème 8.

(Théorème et propriété de Pythagore)

1. Soit $x, y \in E$. On a les équivalences :

$$x \perp y \iff \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \iff \|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

2. Soit (x_1, x_2, \dots, x_n) une famille orthogonale de vecteurs de E . On a

$$\left\| \sum_{i=1}^n x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2.$$

Définition 9.

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n . Toute famille orthonormale à n éléments est une base de E appelée base orthonormale.

Remarque : Tout espace vectoriel euclidien possède au moins une base orthonormale (c'est même un théorème). L'intérêt de ce type de base est l'expression simple du produit scalaire en fonction des coordonnées en b.o.n.

Propriété 10.

Soit (e_1, e_2, \dots, e_n) une base orthonormale d'un espace vectoriel euclidien de dimension n . Soit $x \in E$ de coordonnées (x_1, \dots, x_n) dans cette base, c'est-à-dire $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$. Soit $y \in E$ de coordonnées (y_1, \dots, y_n) , c'est-à-dire $y = y_1 e_1 + y_2 e_2 + \dots + y_n e_n$. Alors

$$(x|y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n \quad \text{et} \quad \|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}.$$

Remarque :

1. L'expression du produit scalaire dans une base orthonormée est donc la même que obtenue avec le produit scalaire canonique de \mathbb{R}^n .
2. En appliquant cette formule avec un vecteur de la base à la place de y , on peut obtenir la i -ième coordonnée de x par $x_i = (x|e_i)$.

1.3 Sous-espaces vectoriels orthogonaux, supplémentaire orthogonal

Définition 11.

Deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont dits orthogonaux si et seulement si

$$\forall x \in F, \forall y \in G, \quad (x|y) = 0,$$

c'est-à-dire si, et seulement si tout vecteur de F est orthogonal à tout vecteur de G . On note alors $F \perp G$.

Exemple. Dans \mathbb{R}^2 muni du produit scalaire canonique, on considère les droites vectorielle $D = \text{Vect}(1, 2)$ et $D' = \text{Vect}(-2, 1)$. Soit $u \in D$, alors $u = a(1, 2) = (a, 2a)$ avec $a \in \mathbb{R}$. Soit $v \in D'$, alors $v = b(-2, 1) = (-2b, b)$ avec $b \in \mathbb{R}$. on calcule

$$(u|v) = ((a, 2a)|(-2b, b)) = -2ab + 2ba = 0, \quad \forall u \in D, v \in D'$$

Donc tous les vecteurs de D sont orthogonaux à tous les vecteurs de D' , donc les droites D et D' sont orthogonales. Remarquons qu'il aurait suffi de faire le produit scalaire des vecteurs directeurs des deux droites pour trouver le même résultat.

Définition 12.

Soit F un sous-espace vectoriel de E . On appelle orthogonal de F le sous espace vectoriel, noté F^\perp , des vecteurs de E orthogonaux à tous les éléments de F :

$$F^\perp = \{x \in E, \forall y \in F, (x|y) = 0\}.$$

F^\perp est un supplémentaire de F dans E .

Le sous-espace vectoriel F^\perp est appelé le supplémentaire orthogonal de F .

Démonstration. Montrons que F^\perp est un supplémentaire de F en montrant que $F \cap F^\perp = \{\vec{0}\}$ et que $E = F + F^\perp$.

Soit x un vecteur appartenant à $F \cap F^\perp$, on calcule sa norme : $\|x\|^2 = (x|x)$. On considère le premier x comme étant dans F et le deuxième x comme étant dans F^\perp (on peut le faire car x est dans les deux à la fois). Or le x dans F^\perp est orthogonal à tout ce qui est dans F , donc en particulier à x dans F . Donc $\|x\|^2 = (x|x) = 0$. Le seul vecteur de norme nul étant le vecteur nul, on a $x = \vec{0}$. Donc $F \cap F^\perp = \{\vec{0}\}$.

On cherche ensuite à décomposer un vecteur x de E comme la somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de F^\perp , c'est à dire $x = x_F + x_{F^\perp}$ où $x_F \in F$ et $x_{F^\perp} \in F^\perp$ sont à déterminer.

Analyse : Soit (f_1, f_2, \dots, f_p) une base orthonormale de F . Puisque $x_F \in F$, on peut écrire : $x_F = \sum_{i=1}^p (x_F|f_i) f_i$ (voir remarque : calcul de la i -ème coordonnée d'un

vecteur dans une b.o.n). On calcule le produit scalaire de x avec la base orthonormale de F :

$$(x|f_i) = (x_F + x_{F^\perp}|f_i) = (x_F|f_i) + \underbrace{(x_{F^\perp}|f_i)}_0 = (x_F|f_i)$$

car x_{F^\perp} est orthogonal à f_i qui est dans F .

On obtient donc $x_F = \sum_{i=1}^p (x|f_i) f_i$ et on en déduit $x_{F^\perp} = x - x_F$.

Vérification : Le vecteur x_F appartient bien à F car il s'exprime avec la base de F . Vérifions que x_{F^\perp} est bien dans F^\perp en vérifiant qu'il est orthogonal à la base de F :

$$\begin{aligned} (x_{F^\perp}|f_k) &= \left(x - \sum_{i=1}^p (x|f_i) f_i \right) | f_k = (x|f_k) - \sum_{i=1}^p (x|f_i) \underbrace{(f_i|f_k)}_{0 \text{ si } i \neq k, 1 \text{ si } i=k} \\ &= (x|f_k) - (x|f_k) = 0 \end{aligned}$$

donc x_{F^\perp} est orthogonal à chaque vecteur f_k . Il appartient donc bien à F^\perp et on a décomposé x par $x = x_F + x_{F^\perp}$. On en déduit que $E = F + F^\perp$. Finalement, on a $F \oplus F^\perp = E$.

Exemple. Dans \mathbb{R}^3 munit du produit scalaire canonique, on considère le plan P d'équation $x - y = 0$. P^\perp est la droite vectorielle D dirigée par le vecteur $w(1, -1, 0)$ (vecteur normal au plan P).

Les vecteurs $u = (1, 1, 0)$ et $v(0, 0, 1)$ sont deux vecteurs de P non colinéaires, donc ils forment une base de P . De plus, on constate que $(u|v) = 0$, donc (u, v) est une base orthogonale. Par contre, elle n'est pas orthonormale car $\|u\| = \sqrt{2}$. Donc on doit diviser u par sa norme. On pose $f_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ et $f_2 = v = (0, 0, 1)$; (f_1, f_2) forme alors une base orthonormale de P .

Soit $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on cherche sa décomposition selon P et P^\perp , c'est-à-dire $X = X_P + X_{P^\perp}$. On a

$$\begin{aligned} X_P &= (X|f_1)f_1 + (X|f_2)f_2 = \left((x, y, z) \left| \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right) \right. \right) \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} + \left((x, y, z) \mid (0, 0, 1) \right) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}} \right) \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} + (z) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x+y}{2} \\ \frac{x+y}{2} \\ z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Et d'autre part

$$X_{P^\perp} = X - X_P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{x+y}{2} \\ \frac{x+y}{2} \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x-y}{2} \\ -\frac{x-y}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{x-y}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in D$$

1.4 Projections et symétries orthogonales

Définition 13.

Soit F un sous-espace vectoriel de E . On appelle projection orthogonale sur F la projection p sur F parallèlement à F^\perp :

$$p : \begin{array}{l} E = F \oplus F^\perp \longrightarrow E \\ x = x_F + x_{F^\perp} \longmapsto p(x) = x_F \end{array}$$

Remarque : D'après le calcul de x_F précédent, si (f_1, \dots, f_p) est une base orthonormale de F , alors pour tout $x \in E$, on a $p(x) = \sum_{i=1}^p (x|f_i)f_i$.

Exemple. Dans \mathbb{R}^3 , on reprend P d'équation $x - y = 0$ et on fait p la projection orthogonale sur P . Alors, pour un vecteur $X = (x, y, z)$, on a

$$p(X) = X_P = \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}, z \right)$$

Définition 14.

Soit E un espace vectoriel euclidien, F un sous-espace vectoriel de E et x un vecteur de E .

On appelle distance de x à F et l'on note $d(x, F)$ le réel défini par $d(x, F) = \|x - p_F(x)\|$ où $p_F(x)$ est le projeté orthogonal de x sur F . C'est la plus petite distance possible entre le vecteur x et un vecteur de F .

Définition 15.

Soit F un sous-espace vectoriel de E . On appelle symétrie orthogonale par rapport à F la symétrie s par rapport à F parallèlement à F^\perp :

$$s : \begin{array}{l} E = F \oplus F^\perp \longrightarrow E \\ x = x_F + x_{F^\perp} \longmapsto s(x) = x_F - x_{F^\perp} \end{array}$$

Remarque : Si (f_1, \dots, f_p) est une base orthonormale de F , alors pour tout $x \in E$, on a

$$s(x) = 2 \sum_{i=1}^p (x|f_i)f_i - x.$$

Exemple. Dans \mathbb{R}^3 , on reprend P d'équation $x - y = 0$ et on fait s la symétrie orthogonale par rapport P . Alors, pour un vecteur $X = (x, y, z)$, on a

$$s(X) = X_P - X_{P^\perp} = \begin{pmatrix} \frac{x+y}{2} \\ \frac{x+y}{2} \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{x-y}{2} \\ -\frac{x-y}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \\ z \end{pmatrix}$$

Définition 16.

Dans E de dimension n , on appelle réflexion une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan F (sous-espace vectoriel de dimension $n - 1$).

Remarque : Dans le plan, les réflexions sont les symétries axiales. Dans l'espace de dimension 3, les réflexions sont les symétries orthogonales par rapport à un plan.

2 Endomorphismes et matrices symétriques

On se place dans un espace vectoriel euclidien E de dimension $n \geq 1$ dont on note $(|)$ le produit scalaire.

Définition 17.

Soit $f : E \rightarrow E$ un endomorphisme de E . On dit que f est un endomorphisme symétrique si et seulement si il vérifie :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad (f(x)|y) = (x|f(y)).$$

Propriété 18.

Soit f un endomorphisme symétrique de E . Pour toute base orthonormée \mathcal{B} de E , la matrice de f relativement à \mathcal{B} est symétrique, i.e.

$${}^t\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f).$$

Théorème 19.

1. Tout endomorphisme symétrique f d'un espace vectoriel euclidien est diagonalisable. Plus précisément,
 - (a) les sous-espaces propres de f sont orthogonaux deux à deux.
 - (b) il existe une base de vecteurs propres f qui est orthonormée et dans laquelle la matrice de f est diagonale.
2. Toute matrice symétrique $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable sur \mathbb{R} . Plus précisément, il existe une matrice D et une matrice orthogonale P (i.e. $P^{-1} = {}^tP$) telle que $D = P^{-1}AP = {}^tPAP$.

Exemple. Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ est diagonalisable sur \mathbb{R} par une matrice orthogonale et écrire la relation de diagonalisation.

3 Automorphismes orthogonaux, matrices orthogonales

On a vu en géométrie que certaines transformations comme les symétries orthogonales, les rotations conservent les angles (non orientés pour les symétries), c'est-à-dire le produit scalaire. Nous allons étudier ici les endomorphismes d'un espace euclidien qui vérifient cette propriété.

Définition 20.

Un endomorphisme f de E est dit orthogonal si, et seulement si, il conserve le produit scalaire :

$$\forall x, y \in E, (f(x) | f(y)) = (x | y).$$

Remarque : Par conséquent, la norme est conservée aussi : $\forall x \in E, \|f(x)\| = \|x\|$. Un automorphisme orthogonal est donc une « isométrie vectorielle ».

Corollaire 21.

Un endomorphisme orthogonal d'un espace vectoriel euclidien E est un automorphisme de E (une bijection). On parlera donc désormais d'automorphisme orthogonal.

Démonstration. Soit f un endomorphisme orthogonal. Soit $x \in \text{Ker}(f)$, on a $f(x) = 0$ donc sa norme $\|f(x)\| = 0$. Par conservation de la norme par f , on a $\|x\| = 0$, et donc $x = 0$. Finalement, $\text{Ker}(f) = \{0\}$ et f est injectif. Puisque E est de dimension finie, f est bijectif.

Exemples. Id_E et $-\text{Id}_E$ sont des automorphismes orthogonaux. Si F est un sous-espace vectoriel de E , la symétrie orthogonale s par rapport à F est un automorphisme orthogonal (mais pas la projection orthogonale sur F)

En effet, pour tout $x \in E$, si $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in F^\perp$, alors on a $s(x) = y - z$ et donc

$$\begin{aligned} \|s(x)\|^2 &= \|y - z\|^2 \\ &= \|y\|^2 + \|z\|^2 \quad (\text{Pythagore, } y \text{ et } -z \text{ étant orthogonaux}) \\ &= \|y + z\|^2 \\ &= \|x\|^2. \end{aligned}$$

(Remarque : parmi les symétries, seules les symétries orthogonales sont des endomorphismes orthogonaux)

Théorème 22.

L'ensemble des automorphismes orthogonaux de E est appelé groupe orthogonal de E et noté $\mathcal{O}(E)$. Cela signifie que

1. l'élément neutre pour la composition Id_E est orthogonal.
2. La composée de deux automorphismes orthogonaux de E est un automorphisme orthogonal de E .
3. L'automorphisme réciproque d'un automorphisme orthogonal de E est un automorphisme orthogonal de E .

Définition 23.

On appelle matrice orthogonale de taille n toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible dont l'inverse est égale à sa transposée. C'est à dire $A^{-1} = {}^tA$ ou plus simplement ${}^tAA = I_n$.

Théorème 24.

L'ensemble des matrices orthogonales d'ordre n est appelé groupe orthogonal d'ordre n et noté $\mathcal{O}(n)$.

1. La matrice I_n est orthogonale.
2. Le produit de deux matrices orthogonales est une matrice orthogonale.
3. L'inverse d'une matrice orthogonale est une matrice orthogonale.

De plus, le déterminant d'une matrice orthogonale vaut 1 ou -1 .

Démonstration. Soit A une matrice orthogonale. On a ${}^tAA = I_n$ donc

$$1 = \text{Det}(I_n) = \text{Det}({}^tAA) = \text{Det}(A)\text{Det}({}^tA) = \text{Det}(A)^2.$$

Il y a des liens entre automorphisme orthogonal, base orthonormale et matrice orthogonale.

Propriété 25.

- Un endomorphisme f est orthogonal \Leftrightarrow sa matrice $M(f)$ dans une base orthonormale est orthogonale.
- Soit \mathcal{B} une base orthonormée d'un espace vectoriel euclidien E . Une base \mathcal{B}' est orthonormée si, et seulement si, la matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}' est orthogonale.

3.1 Classement des automorphismes orthogonaux

L'objectif des deux sections suivantes est de faire la liste complète de tout les automorphismes orthogonaux dans le plan et dans l'espace, en suivant des critères de

classement. Le premier critère est la dimension de l'espace invariant et le deuxième critère est le déterminant.

On se place dans E qui est soit le plan \mathbb{R}^2 , soit l'espace \mathbb{R}^3 (selon la section) muni de son produit scalaire canonique. On note f un automorphisme orthogonal de E et A sa matrice dans une base orthonormale, c'est à dire qu'on a vérifié que f conservait le produit scalaire ou que A vérifiait ${}^tAA = I_n$. On veut déterminer quel type d'automorphisme est f ou A .

Bonus : Si on ne trouve pas ${}^tAA = I_n$, mais ${}^tAA = kI_n$ avec k une constante, c'est que A n'est pas orthogonale... mais qu'on peut s'en sortir quand même. On pose $A' = \frac{1}{\sqrt{k}}A$, alors

$$A = \underbrace{\sqrt{k}I_d}_{\text{homothétie}} \times \underbrace{A'}_{\text{orthogonale}}$$

f correspond donc à la composée entre un endomorphisme orthogonal et une homothétie de rapport \sqrt{k} . Et il reste à étudier A' (au lieu de A).

On détermine F le sous-espace vectoriel des vecteurs invariants par f . C'est-à-dire

$$F = \{x \in E, f(x) = x\} = \{X \in \mathbb{R}^n, AX = X\}$$

ainsi que $\det A$ (qui vaut 1 ou -1).

Théorème 26.

Soit E un espace vectoriel euclidien. Un automorphisme orthogonal dont l'ensemble F des vecteurs invariants est un hyperplan est la réflexion par rapport à F .

4 Automorphismes orthogonaux du plan

Dans tout ce paragraphe, E désigne le plan, il est donc de dimension 2. Comme F l'ensemble des vecteurs invariants est un sous-espace vectoriel de E , sa dimension est 0, 1 ou 2. On va lister ces trois cas.

Premier cas : $\dim(F) = 2$. Donc $F = E$. On est dans la situation où tout vecteur de E est invariant par f . Donc

$$f = \text{Id}_E \text{ et } f \text{ est de déterminant } 1.$$

Deuxième cas : $\dim(F) = 1$. L'ensemble F des vecteurs invariants par f est donc une droite vectorielle de E , c'est-à-dire un hyperplan de E . D'après un théorème précédent,

$$f \text{ est la réflexion (symétrie orthogonale) par rapport à la droite vectorielle } F \text{ et } f \text{ est de déterminant } -1.$$

Troisième cas : $\dim(F) = 0$. Si pour tout $x \in E$, $f(x) = -x$, alors $f = -\text{Id}_E$, c'est aussi la rotation d'angle π . Sinon, alors on peut trouver un vecteur a non nul avec $f(a)$ non colinéaire à a . On considère la droite vectorielle D dirigée par a et Δ la droite vectorielle dirigée par $a + f(a)$ (elle passe au "milieu" de a et $f(a)$). On appelle s la symétrie orthogonale par rapport à Δ et on s'intéresse à $s \circ f$.

Comme composée de deux automorphismes orthogonaux, $s \circ f$ est un automorphisme orthogonal et on a $s \circ f(a) = s(f(a)) = a$. Donc a et toute la droite D est invariante par $s \circ f$, donc $s \circ f = s'$ est la réflexion par rapport à D .

Donc $f = s^{-1} \circ s' = s \circ s'$ est la composée de deux réflexions. Le déterminant de f vaut 1 car $\det(f) = \det(s \circ s') = \det(s) \det(s') = (-1)^2 = 1$. Mais on peut aller plus loin sur la caractérisation de f .

Notons θ l'angle $(a, f(a))$ et déterminons pour tout x l'angle $(x, f(x)) = (x, s(s'(x)))$. On coupe cet angle en intercalant $s'(x)$ au milieu, c'est à dire

$$(x, f(x)) = (x, s'(x)) + (s'(x), s(s'(x)))$$

Or, comme $s'(x)$ est l'image de x par la réflexion d'axe D , l'angle $(x, s'(x))$ est deux fois l'angle entre D et $s'(x)$ (de vecteur directeur a) :

$$(x, s'(x)) = 2(a, s'(x))$$

De même $s(s'(x))$ est l'image de $s'(x)$ par la symétrie d'axe Δ (de vecteur directeur $a + f(a)$), donc

$$(s'(x), s(s'(x))) = 2(s'(x), a + f(a))$$

Finalement :

$$\begin{aligned} (x, f(x)) &= (x, s'(x)) + (s'(x), s(s'(x))) = 2(a, s'(x)) + 2(s'(x), a + f(a)) \\ &= 2(a, a + f(a)) = (a, f(a)) = \theta \end{aligned}$$

L'angle entre tout vecteur et son image est donc θ . On en déduit que :

$$f \text{ est la rotation vectorielle d'angle } \theta \text{ et son déterminant vaut } 1.$$

Propriété 27.

Les automorphismes orthogonaux du plan euclidien sont l'identité, les rotations et les réflexions.

Parmi eux, ceux de déterminant -1 sont uniquement les réflexions. Ceux de déterminant 1 sont uniquement les rotations (l'identité pouvant se voir comme une rotation d'angle 0), c'est ce qu'on appelle le groupe spécial orthogonal $\mathcal{SO}(E)$.

On a aussi montrer qu'une rotation d'angle θ se décomposait comme la composée de deux réflexions d'axes δ_1 et δ_2 tel que l'angle formé par ces deux droites ait pour mesure $\theta/2$. Donc tout automorphisme orthogonal du plan est soit une réflexion,

soit la composée de deux réflexions. On dit que les réflexions engendrent le groupe orthogonal.

Remarque : Si f est une rotation du plan, on peut déterminer son angle θ par la méthode suivante : on choisit un vecteur unitaire v , on calcule $f(v)$ puis on identifie θ grâce à :

$$\begin{cases} \cos(\theta) = (v | f(v)) \\ \sin(\theta) = \det(v, f(v)) \end{cases}$$

Propriété 28.

La composée des rotations vectorielles d'angle θ et θ' est la rotation vectorielle d'angle $\theta + \theta'$.

4.1 Les matrices orthogonales dans le plan

On note A la matrice de f dans une base orthonormale $\mathcal{B}(e_1, e_2)$. Pour rappel : on calcule les vecteurs $e'_1 = f(e_1)$ et $e'_2 = f(e_2)$, qu'on met en colonne côte à côte. Alors A est une matrice orthogonale..

1. Si $\det(A) = 1$, alors f est une rotation d'angle θ . On a donc $e'_1 = r_\theta(e_1) = \cos\theta e_1 + \sin\theta e_2$ et $e'_2 = -\sin\theta e_1 + \cos\theta e_2$. D'où la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

2. Si $\det(A) = -1$. Dans ce cas, f est une réflexion. Puisque $\|e'_1\| = 1$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $e'_1 = \cos\theta e_1 + \sin\theta e_2$, on en déduit $e'_2 = \sin\theta e_1 - \cos\theta e_2$. D'où la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

Remarque : Pour une rotation, le θ dans la matrice A est le même pour toutes les bases orthonormales. Par contre, pour une réflexion, le paramètre θ dépend de la base choisie ! En choisissant pour e_1 un vecteur directeur de l'axe D de la réflexion et pour e_2 un vecteur directeur de D^\perp , la matrice de la réflexion s'écrit

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

5 Automorphismes orthogonaux de l'espace

Dans ce paragraphe, E désigne l'espace euclidien orienté de dimension 3 muni du produit scalaire canonique. Soit f un automorphisme orthogonal de E . On note toujours $F = \text{Ker}(f - \text{Id}_E) = \{x \in E, f(x) = x\}$ l'ensemble des vecteurs de E invariants par f . On cherche à identifier f .

5.1 la liste

Premier cas : $\dim(F) = 3$. Alors tout vecteur de E est invariant par f et donc

$$f = \text{Id}_E \text{ et son déterminant est } 1.$$

Deuxième cas : $\dim(F) = 2$. Dans ce cas, l'ensemble F des vecteurs invariants par f est un plan vectoriel de E , c'est-à-dire un hyperplan de E .

$$f \text{ est la réflexion par rapport au plan } F \text{ et } f \text{ est de déterminant } -1.$$

Troisième cas : $\dim(F) = 1$. Dans ce cas, l'ensemble F des vecteurs invariants est une droite et F^\perp est un plan stable par f (admis). La restriction de f à F^\perp n'a pas de vecteur invariant (puisque les invariants sont dans F), donc c'est une rotation d'angle θ dans le plan F^\perp .

$$\text{L'automorphisme } f \text{ est appelé la rotation d'axe la droite } F \text{ et d'angle } \theta. \text{ Son déterminant est égal à } 1.$$

Il reste à déterminer l'angle θ . On prend u un vecteur directeur de F et on choisit un vecteur x non nul et orthogonal à u . On a alors

$$\cos(\theta) = \frac{(x | f(x))}{\|x\|^2}$$

ce qui permet d'avoir θ au signe près. Ensuite on calcule $x \wedge f(x)$ qui est colinéaire à u . Le signe du coefficient de proportionnalité donne le signe de θ .

Pour aller plus loin, on prend deux plans P_1 et P_2 se coupant selon la droite F et formant un angle de $\theta/2$. On appelle s_1 la réflexion par rapport à P_1 et s_2 la réflexion par rapport à P_2 . Alors $f = s_1 \circ s_2$, une rotation de l'espace est la composée de deux réflexions.

Quatrième cas : $\dim(F) = 0$. Dans ce cas, seul le vecteur nul est invariant par f et f n'est pas l'identité, pas une réflexion et pas une rotation.

On prend a un vecteur non nul et on pose P le plan vectoriel dirigé par $a + f(a)$ et $a \wedge f(a)$. Ce plan P passe "au milieu" de a et $f(a)$ et on note s la réflexion par rapport à P . En particulier $s(f(a)) = a$, donc $s \circ f$ est un automorphisme orthogonal de l'espace qui a des vecteurs invariants non nuls. Donc un des cas précédents :

- $s \circ f$ n'est pas l'identité car sinon $f = s^{-1} = s$ serait une réflexion.
- $s \circ f$ n'est pas une réflexion s' car sinon on aurait $f = s^{-1} \circ s'$ et f serait une rotation.
- Donc $s \circ f$ est la rotation r de l'espace d'axe la droite dirigée par a , donc $f = s^{-1} \circ r = s \circ r$. En décomposant $r = s_1 \circ s_2$ comme composée de deux réflexions, on a finalement $f = s \circ s_1 \circ s_2$.

Alors

f est la composée de trois réflexions (ou d'une rotation et d'une réflexion) et son déterminant vaut -1 .

Propriété 29.

L'ensemble $\mathcal{O}(E)$ des automorphismes orthogonaux d'un espace vectoriel euclidien de dimension 3 est composé des rotations (dont l'identité), des réflexions, et des composées de 3 réflexions.

Les rotations sont les seuls automorphismes orthogonaux de déterminant 1, on appelle cet ensemble le groupe spécial orthogonal $\mathcal{SO}(E)$.

Remarque : Puisque l'automorphisme orthogonal $-\text{Id}_E$ ne possède aucun vecteur non nul invariant, c'est la composée de 3 réflexion en dimension 3.

Exemple. Soit A la matrice ci-dessous et f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 canoniquement associé à A . On veut identifier f .

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Première étape : on vérifie que f est bien un automorphisme orthogonal de \mathbb{R}^3 . Pour cela, on calcule $A^t A = I_3$.

Deuxième étape : On détermine F l'ensemble des vecteurs invariants en résolvant $AX = X$. on résout

$$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Après calculs par la méthode du pivot de Gauß, on obtient que l'ensemble des solutions est $\text{Vect}(\{(1, 1, 3)\})$. L'ensemble des vecteurs invariants est de dimension 1 donc f est une rotation d'axe dirigé par le vecteur $u = (1, 1, 3)$.

Troisième étape : il reste à déterminer son angle θ . On choisit un vecteur x non nul orthogonal à l'axe de la rotation, par exemple $(1, -1, 0)$. On calcule son image

$$f(x) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

On a donc $(x | f(x)) = \frac{-5}{3}$ et donc $\cos \theta = \frac{(x | f(x))}{\|x\|^2} = -\frac{5}{6}$. L'angle de la rotation est $\theta = \arccos(-\frac{5}{6})$ ou $\theta = -\arccos(-\frac{5}{6})$.

Reste à orienter l'angle. Pour cela, on calcule $x \wedge f(x) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1) = \frac{1}{3}u$. On en déduit que $\sin(\theta) > 0$ et donc en orientant l'axe D avec le vecteur $(1, 1, 3)$, l'angle θ de la rotation est égal à $\theta = +\arccos(-\frac{5}{6})$.

5.2 Les matrices orthogonale

La forme de la matrice d'un automorphisme orthogonal f dans une base orthonormale quelconque est compliquée et difficilement reconnaissable. Il faut bien choisir la base pour avoir une forme simple.

1) Si f est la rotation d'axe D dirigé par le vecteur unitaire e_1 , d'angle θ (relativement à l'orientation de D par le vecteur e_1), on complète e_1 en une base orthonormale directe $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$, où (e_2, e_3) forme une base orthonormale directe de D^\perp . La restriction de f à D^\perp est une rotation d'angle θ et donc la matrice de f dans la base \mathcal{B} est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

2) Si f est la réflexion de plan P , on complète une base orthonormale (e_1, e_2) de P en une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de E (avec donc $e_3 \in P^\perp$) et la matrice de f dans la base \mathcal{B} est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

3) Si f est la composée de la réflexion de plan P et de la rotation d'axe P^\perp de vecteur unitaire e_1 et d'angle θ (relativement à l'orientation de P^\perp par le vecteur e_1), on complète e_1 en une base orthonormale directe $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de E (avec (e_2, e_3) une base orthonormale directe de P). La restriction de f à P est une rotation d'angle θ et donc la matrice de f dans la base \mathcal{B} est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Fiche d'exercices XXX : Espaces vectoriels euclidiens

Exercice 1

(*) On considère l'application $(\cdot|\cdot)$ définie ci-dessous

$$\begin{aligned} (\cdot|\cdot) : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ ((x, y), (x', y')) &\rightarrow ((x, y)|(x', y')) = 2xx' + 3yy' \end{aligned}$$

1. Montrer que l'application $(\cdot|\cdot)$ est un produit scalaire. Calculer le produit scalaire des vecteurs $(-2, 2)$ et $(5, 1)$.
2. Donner la norme associée à ce produit scalaire. Calculer la norme du vecteur $(1, 1)$.
3. Ecrire l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour ce produit scalaire et simplifier l'inégalité.
4. Montrer que les vecteurs $(1, 2)$ et $(-3, 1)$ sont orthogonaux pour ce produit scalaire. L'angle entre ces vecteurs est-il un angle droit ?
5. D'après ce qui précède $((1, 2), (-3, 1))$ est une base orthogonale. En déduire une base orthonormale de \mathbb{R}^2 (pour ce produit scalaire).
6. Calculer les coordonnées du vecteurs $(-4, 6)$ dans cette base.

Exercice 2

(***) Soit $n \in \mathbb{N}$ et E l'espace vectoreil $E = \mathbb{R}_n[X]$. Montrer que l'application de E^2 dans \mathbb{R} définie par

$$\forall P, Q \in E, \quad (P|Q) = P(0)Q(0) + \int_0^1 P'(t)Q'(t)dt$$

est un produit scalaire sur E .

Exercice 3

(***) Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ et l'application $(\cdot|\cdot)$ de E^2 dans \mathbb{R} définie par

$$\forall P, Q \in \mathbb{R}_2[X], \quad (P|Q) = P(1)Q(1) + P(0)Q(0) + P(-1)Q(-1).$$

Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 4

(***) Soit E un espace vectoriel euclidien et f, g deux endomorphismes de E tels que $\forall x \in E, \|f(x)\| = \|g(x)\|$. Démontrer que,

$$\forall x, y \in E^2, \quad (f(x)|f(y)) = (g(x)|g(y))$$

Exercice 5

(***) Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel euclidien E . Montrer que $F \subset G \implies G^\perp \subset F^\perp$.

Exercice 6

(***) Soit p un projecteur d'un espace vectoriel euclidien E . Démontrer que p est une projection orthogonale si et seulement si il vérifie

$$\forall x \in E, \quad \|p(x)\| \leq \|x\|$$

Exercice 7

(**) Soit E un espace euclidien de dimension 3 muni d'une base orthonormale. Déterminer la matrice dans cette base

1. de la projection orthogonale sur la droite vectorielle D dirigée par le vecteur unitaire $u = (\alpha, \beta, \gamma)$,
2. de la projection orthogonale sur le plan vectoriel P de vecteur normal unitaire u
3. de la symétrie orthogonale par rapport à D .
4. de la symétrie orthogonale par rapport à P .

Exercice 8

(**) Diagonaliser dans une base orthonormale la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -8 & 2 \\ -8 & -4 & 10 \\ 2 & 10 & -7 \end{pmatrix}$$

Exercice 9

Soit $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Diagonaliser M dans une base orthogonale.

Exercice 10

(*) Dans \mathbb{R}^2 muni du produit scalaire canonique, montrer que l'endomorphisme f défini par $f(x, y) = (-y, x)$ est un automorphisme orthogonal.

Exercice 11

(*) Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer tAA . Que peut-on en déduire ?

Exercice 12

(**) Soit E un espace euclidien, $\lambda \in \mathbb{R}$ et u un vecteur de E . On considère l'application f définie par

$$\forall x \in E, \quad f(x) = x + \lambda(x|u)u$$

Donner une condition nécessaire et suffisante sur u et λ pour que f soit un automorphisme orthogonal. Décrire f dans ce cas.

Exercice 13

(*) Dans \mathbb{R}^2 orienté par sa base canonique, déterminer la matrice dans la base canonique de la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$. (on dit aussi **quart de tour**).

Exercice 14

(**) Dans \mathbb{R}^2 orienté par sa base canonique, déterminer la matrice dans la base canonique de la réflexion s d'axe $D = \text{Vect} \{(1, 3)\}$.

Exercice 15

(**) Dans \mathbb{R}^2 orienté par sa base canonique, étudier les endomorphismes f et g ayant respectivement pour matrice dans la base canonique $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 16

(**) \mathbb{R}^3 étant orienté par sa base canonique, donner la matrice dans la base canonique de la rotation autour du vecteur $u = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$ et d'angle $\frac{\pi}{6}$.

Exercice 17

(**) Reconnaître les endomorphismes de \mathbb{R}^3 canoniquement associés aux matrices suivantes :

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 3 & -6 & 2 \\ 6 & 2 & -3 \end{pmatrix} \quad C = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 18

On veut étudier l'endomorphisme f canoniquement associé à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer tAA . Déterminer l'ensemble des vecteurs invariant par f . Quel type d'endomorphisme est f ?
2. Considérons le plan P de base orthonormale $(u(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0), v(0, 0, 1))$. Notons s la symétrie orthogonale par rapport à P . Etablir la matrice S de s dans la base canonique.
3. Calculer la matrice $R = S \times A$. Identifier l'endomorphisme r canoniquement associé à R .
4. En déduire une décomposition de f comme composée de deux automorphismes simples.

Exercice 19

(***) Déterminer $(a, b, c) \in (\mathbb{R}^*)^3$ tels que la matrice

$$A = \frac{-2}{3} \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{b}{a} & \frac{c}{a} \\ \frac{a}{b} & \frac{-1}{2} & \frac{c}{b} \\ \frac{a}{c} & \frac{b}{c} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$$

soit orthogonale. Reconnaître les automorphismes orthogonaux de \mathbb{R}^3 correspondants.