29. Séries numériques

1 Généralités

1.1 Définitions et premiers exemples

Définition 1.

Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite de nombres réels ou complexes.
La **série de terme général** u_n est l'addition formelle infinie de tous les termes de $(u_n)_{n\geqslant n_0}$. Cette série se note

$$\sum_{n\geqslant n_0} u_n$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, le terme $S_N = \sum_{n=n_0}^{N} u_n$ est appelé la **somme partielle de rang** N de cette série.
La suite $(S_N)_{N\geqslant n_0}$ est appelée la **suite des sommes partielles** de la série $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$.

Définition 2.

Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite de nombres réels ou complexes. La série $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ est dite **convergente** si et seulement si la suite $(S_N)_{N\geqslant n_0}$ de ses sommes partielles est convergente. Dans ce cas, sa limite $S = \lim_{N\to+\infty} S_N$ est appelée la **somme de la série** $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ et l'on note

$$S = \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$$

(Remarquer la différence de notation entre la série et la somme de celle-ci, si elle existe.)

Si la suite $(S_N)_{N\geqslant n_0}$ diverge (vers $+\infty$,$-\infty$, ou n'a pas de limite), on dit que la série $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ est **divergente**.

Remarque : Les séries associées aux suites $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ et $(u_n)_{n\geqslant n_1}$ sont de même nature. Autrement dit les premiers termes de la suite n'interviennent pas sur la convergence ou la divergence de la série de terme général u_n.

Exemples.

1. Nature de la série $\sum_{n\geqslant 0} n$.
2. La série $\sum_{n\geqslant 0} \alpha^n$ converge si et seulement si $\alpha \in]-1;1[$. Par exemple, $\sum_{n\geqslant 0} 2^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n$ divergent, $\sum_{n\geqslant 0} (1/2)^n$ converge.

1.2 Premières propriétés de convergence

Propriété 3.

Si la série $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ est convergente, alors la suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ converge vers 0.
Si la suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ ne converge pas vers 0, alors la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ diverge.

Remarque : Le fait que la suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ converge vers 0 ne permet pas de prouver que la série $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ est convergente : la réciproque est fausse. (cf exemple ci-dessous)

Exemple. étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 0} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$.

Théorème.

Soit $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant n_0} v_n$ deux séries de nombres réels ou complexes et λ un scalaire.

1. Si les deux séries $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant n_0} v_n$ sont convergentes alors la série $\sum_{n\geqslant n_0} (u_n + \lambda v_n)$ est convergente et l'on a
$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} (u_n + \lambda v_n) = \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n + \lambda \sum_{n=n_0}^{+\infty} v_n.$$
2. Si $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ est convergente et $\sum_{n\geqslant n_0} v_n$ divergente , alors la série $\sum_{n\geqslant n_0} (u_n + v_n)$ est divergente.

Remarque :

1. Le premier point du théorème précédent assure que la somme de deux séries convergentes est convergente (c'est le cas λ=1).

2. Si les séries $\sum\limits_{n\geqslant n_0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant n_0} v_n$ sont divergentes, on ne peut rien dire de la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant n_0} (u_n+v_n)$.
3. Le théorème précédent montre que l'ensemble des suites dont la série associée est convergente est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites.

Série téléscopique Soit $(v_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite de nombres réels ou complexes. La série $\sum\limits_{n\geqslant n_0} (v_{n+1}-v_n)$ est dite téléscopique.

Technique. Etude de la convergence de la série.

Exemple. Nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n(n+1)}$.

2 Séries à termes réels positifs

2.1 Comparaison avec une intégrale impropre

Théorème 5.

Soit $a \in \mathbb{N}$ et $f : [a,+\infty[\to \mathbb{R}^+$ une fonction *continue, positive et décroissante sur* $[a,+\infty[$ vérifiant $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 0$. La série $\sum\limits_{n\geqslant a} f(n)$ et l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ sont de même nature.

Application : les séries de Riemann

Théorème 6.

On appelle *séries de Riemann* les séries de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.
La série de Riemann $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.

Démonstration. Si $\alpha \leqslant 0$, alors la suite de terme général $\dfrac{1}{n^\alpha}$ ne converge pas vers 0. Donc la série est divergente.
Si $\alpha > 0$, on considère la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$ continue positive et décroissante sur $[1;+\infty[$. La série et l'intégrale étant de même nature $\displaystyle\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}dx$ converge, c'est à dire pour $\alpha > 1$.

2.2 Comparaison de deux séries

2.2.1 Règle de comparaison

Théorème 7.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à termes positifs. On suppose qu'il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ au delà duquel on a :

$$\forall n \geqslant n_0,\ u_n \leqslant v_n$$

— Si la série $\sum\limits_{n\geqslant n_0} v_n$ est convergente, alors la série $\sum\limits_{n\geqslant n_0} u_n$ est convergente.
— Si la série $\sum\limits_{n\geqslant n_0} u_n$ est divergente, alors la série $\sum\limits_{n\geqslant n_0} v_n$ est divergente.

Exemples.

1. Donner la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{1}{\sqrt{n^4+n+1}}$.
2. Donner la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \left(\dfrac{1}{n} + \mathrm{e}^{-n}\right)$.

2.2.2 Règles de l'équivalent et du o

Théorème 8.

Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ et $(v_n)_{n\geqslant n_0}$ deux suites à termes réels positifs.
— Si $u_n \sim v_n$, alors les séries $\sum\limits_{n\geqslant n_0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant n_0} v_n$ sont de même nature.
— Si $u_n = o(v_n)$ et $\sum\limits_{n\geqslant n_0} v_n$ est convergente, alors $\sum\limits_{n\geqslant n_0} u_n$ est convergente.

Exemples.

1. Donner la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$.
2. Donner la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \left(\exp\left(\frac{1}{n^2}\right) - 1\right)$.

2.3 La règle de D'Alembert

Théorème 9.

Soit $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ une série à termes **strictement positifs** et telle que $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell \in \mathbb{R}$
(*i.e.* cette limite existe et elle est finie).

— Si $\ell < 1$, alors la série $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ est convergente.

— Si $\ell > 1$, alors la série $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ est divergente.

— Si $\ell = 1$, on ne peut pas conclure par cette méthode.

Remarque : Avec $\ell = 1$, on peut avoir aussi bien une série convergente ($\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$) qu'une série divergente ($\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$).

Exemples.

1. Donner la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n!}{n^n}$.
2. (exo) Donner la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n!}$.

3 Convergence absolue

Définition.

Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite de nombres réels ou complexes. On dit que la série $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ est absolument convergente si et seulement si la série $\sum_{n\geqslant n_0} |u_n|$ est convergente.

Théorème.

Si une série $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ est absolument convergente alors elle est convergente.

Exemple. Donner la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin(n)}{n^2}$.

Remarque : Une série peut-être convergente sans être absolument convergente. Par exemple, la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente (cf paragraphe suivant) mais n'est pas absolument convergente.

4 Séries alternées

Définition 12.

On dit que la série de nombres réels $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ est alternée si son terme général est de la forme $u_n = (-1)^n a_n$ ou $u_n = (-1)^{n+1} a_n$, avec (a_n) une suite à termes positifs.

Remarque : On a $a_n = |u_n|$.

Théorème 13.

[Théorème spécial à certaines séries alternées] Soit $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ une série alternée telle que la suite $(a_n)_{n\geqslant n_0}$ soit décroissante et que $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

1. La série $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ est convergente vers une limite $S = \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$.
2. Sa somme S est comprise entre deux sommes partielles consécutives : pour tout $N \geqslant n_0$, la somme S est comprise entre S_N et S_{N+1}.
3. Sa somme S est du signe de u_0 et $|S| \leqslant |u_0|$.

Exemple. étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$.

Fiche d'exercices XXIX : Séries numériques

Exercice 1

($\star$) La série $\sum\limits_{n\geqslant 0} n^2$ est-elle convergente ?

Exercice 2

($\star$) Soit u_n défini par $u_n = \left(\arctan \frac{\operatorname{ch} n}{4}\right)^2$ pour tout n. Etudier la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$.

Exercice 3

($\star$) Etudier la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^n}{\ln n}$.

Exercice 4

($\star\star$) Étudier la nature de la série de terme général u_n.

a) $u_n = \dfrac{\sqrt{n+1}}{n^2+1}$	*b)* $u_n = \dfrac{n^2+1}{-3n^4+n+1}$	*c)* $u_n = \exp\left(\dfrac{1}{n}\right) - 1$
d) $u_n = n^2 \sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$	*e)* $u_n = \sqrt{n} \sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$	*f)* $u_n = \dfrac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n}}$
g) $u_n = \left(\dfrac{1}{n}\right)^n$	*h)* $u_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$	*i)* $u_n = \dfrac{1}{n(n!)}$
j) $u_n = \dfrac{n^n}{n!(\mathrm{e}+1)^n}$	*k)* $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^{2/3}}$	*ℓ)* $u_n = (-1)^n \sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$

Exercice 5

($\star\star$)

1. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(3n+1)(3n+4)}$ converge.
2. Décomposer la fraction rationnelle $\dfrac{1}{(3n+1)(3n+4)}$ en éléments simples.
3. En déterminant la valeur de la somme partielle d'ordre N de la série précédente, calculer :
$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n+1)(3n+4)}.$$

Exercice 6

($\star\star$)

1. Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^n$ converge pour tout réel x.
2. Donner un développement limité en 0 de la fonction $f(x) = \dfrac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$ à l'ordre n.
3. Que peut-on conjecturer ? Quelle serait alors la valeur de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}$?

Fiche de révision XXIX : Séries numériques

Si (u_n) est une suite, l'objet $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ est appelé...	la série de terme général u_n.
Soit la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$, alors la somme partielle de rang N est	$S_N = \sum\limits_{n=0}^{N} u_n$
Dire que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge signifie que	la limite $S = \lim\limits_{N\to+\infty} \left(\sum\limits_{n=0}^{N} u_n\right)$ existe et est réelle. C'est la somme de la série.
Si la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ est convergente, que peut-on dire de la suite (u_n) ?	La suite tend vers 0
Si la suite (u_n) ne tend pas vers 0, que peut-on dire de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$?	La serie diverge.
Si $(u_n$ est une suite convergente, que dire de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} (u_{n+1} - u_n)$?	la série (téléscopique) converge.

La série de Riemann $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^a}$ est convergente si et seulement si ...	$a > 1$
Si (u_n) et (v_n) sont deux suites positives, avec $u_n < v_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ converge, que dire de la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$?	Elle converge
Si (u_n) et (v_n) sont deux suites positives, avec $u_n < v_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ diverge, que dire de la série $\sum_{n\geqslant 0} v_n$?	elle diverge
Si (u_n) et (v_n) sont deux suites positives, avec $u_n \sim v_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ converge, que dire de la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$?	Elle converge
Si (u_n) et (v_n) sont deux suites positives, avec $u_n = o(v_n)$ et $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ converge, que dire de la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$?	Elle converge
Soit (u_n) une suite strictement positive et $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tendant vers un réel a. Que dire de la série ?	Si $a < 1$, la série converge. Si $a > 1$, la série diverge. Si $a = 1$, on ne sait pas.
Si $u_n = (-1)^n a_n$ avec a_n série positive, décroissante et de limite nulle, que dire de $\sum_{n\geqslant 0} u_n$?	La série converge.