28. Espaces vectoriels de dimension finie

1 Dimension des espaces vectoriels

On se place dans un espace vectoriel E. Rappelons qu'une famille $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ d'éléments de E est appelée « famille à p éléments », que les x_i soient distincts ou non. Dans une famille, l'ordre des éléments compte. On va retrouver les notions de familles libres, génératrices et bases vues dans $\mathbb{R}^n$.

1.1 Familles libres, génératrices et bases

Définition 1.

Soit $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ une famille finie de vecteurs de E.

— On dit que la famille $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ est **libre** si et seulement si il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_p x_p = 0_E$$

alors $\lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 0$.
Aucun vecteur de la famille n'est combinaison linéaire des autres (lorsque $p \geqslant 2$). Dans ce cas, on dit que les vecteurs de la famille sont **linéairement indépendants**.

— On dit que la famille $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ est **liée** si et seulement s'il existe des scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ qui ne sont pas tous nuls tels que

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_p x_p = 0_E$$

c'est-à-dire si, et seulement si l'un au moins des vecteurs de la famille est une combinaison linéaire des autres vecteurs de cette famille (lorsque $p \geqslant 2$).

Remarque : C'est exactement la même définition (et les mêmes techniques) que dans $\mathbb{R}^n$.

Exemples. La famille $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ est une famille libre de $\mathbb{R}[X]$: soient $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lambda_0 + \lambda_1 X^1 + \cdots + \lambda_n X^n = 0$$

Or un polynôme est nul si et seulement si tous ces coefficients sont nuls. Donc les λ_k sont tous nuls et la famille est libre.

La famille $(\cos, \sin)$ est une famille libre de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$: soient λ_1, λ_2 tels que

$$\lambda_1 \cos + \lambda_2 \sin = 0$$

ça signifie que pour tout x réel, $\lambda_1 \cos(x) + \lambda_2 \sin(x) = 0$. Si on prend $x = 0$, on obtient $\lambda_1 = 0$ et pour $x = \frac{\pi}{2}$, on a $\lambda_2 = 0$.

Définition 2.

— En toute généralité : une famille $(v_i)_{i \in I}$ (finie ou non, I étant un ensemble d'indices) d'éléments de E est dite génératrice de E si, et seulement si, tout élément de E s'exprime comme une combinaison linéaire d'un nombre fini d'éléments de cette famille $(v_i)_{i \in I}$.

— Dans le cas particulier d'une famille finie : Une famille $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ de E est dite **génératrice** de E si, et seulement si,

$$E = \mathrm{Vect}(v_1, v_2, \dots, v_n)$$

autrement dit tout élément u de E s'écrit comme une combinaison linéaire des éléments $v_1, v_2, \dots, v_n$:

$$u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n$$

Remarque : Si une famille est génératrice de E, il en est de même pour toutes les familles obtenues par permutation de ses éléments.

Exemple.

1. $(1, i)$ est une famille génératrice de $\mathbb{C}$ en tant que $\mathbb{R}$-espace vectoriel car tout nombre complexe z s'écrit $z = a.1 + b.i$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.
2. $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ est famille génératrice de $\mathbb{R}_n[X]$ puisque tout polynôme de degré inférieur ou égal à n s'écrit sous la forme
$$\lambda_0 \cdot 1 + \lambda_1 X^1 + \lambda_2 X^2 + \cdots + \lambda_n X^n$$
3. La famille infinie $(X^i, i \in \mathbb{N})$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}[X]$ puisque tout polynôme est une combinaison linéaire d'un nombre fini de monômes.

Définition 3.

Une famille $(e_1, \dots, e_n)$ de vecteurs de E est une **base** de E si, seulement si, elle est libre et génératrice de E.

Théorème 4.

Une famille $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E si, et seulement si, pour tout vecteur $x \in E$, il existe un unique n-uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n$$

Le n-uplet de scalaires $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ est appelé les *composantes* ou les *coordonnées* de x dans la base $\mathcal{B}$.

Exemple.

1. $(1, i)$ est une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$. Les coordonnées d'un nombre complexe dans la base $(1, i)$ sont sa partie réelle et sa partie imaginaire.
2. Dans le plan, deux vecteurs non colinéaires forment une base.
3. Dans l'espace, trois vecteurs non coplanaires forment une base.
4. La famille $(1, X, \ldots, X^n)$ forme une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Cette base est appelé base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. Les coordonnées du polynôme $\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ sont $(a_0, \ldots, a_n)$.

1.2 Espaces vectoriels de dimension finie

Définition.

On appelle espace vectoriel de dimension finie tout espace vectoriel E possédant une famille génératrice de E formée d'un nombre fini de vecteurs. Dans le cas contraire, on dit que E est n'est pas de dimension finie.

Exemple. $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}_n[X]$ sont des espaces vectoriels de dimension finie, $\mathbb{R}[X]$ n'est pas de dimension finie.

Théorème.

Un espace vectoriel E de dimension finie possède au moins une base. Plus précisément, toute famille génératrice finie de E contient une base de E.

Démonstration. Soit $\mathcal{F}_1 = (e_1, \ldots, e_n)$ une famille génératrice finie de E.

Si $\mathcal{F}_1$ est libre, alors c'est une base de E, sinon, l'un des vecteurs de la famille est une combinaison linéaire des autres (supposons que ce soit le cas de e_n, quitte à changer la numérotation des vecteurs). Dans ce cas, $\mathcal{F}_2 = (e_1, \ldots, e_{n-1})$ est à nouveau une famille génératrice de E et l'on peut recommencer la discussion initiée au début de ce paragraphe.

On continue ainsi à retirer des vecteurs tant que la famille $\mathcal{F}_k$ est génératrice et après un nombre fini d'étapes, la famille obtenue est libre, si bien que c'est une base de E.

Définition 7.

Soit E un $\mathbb{R}-$espace vectoriel non réduit au vecteur nul $(E \neq \{0\})$. Si E est de dimension finie, alors toutes les bases de E ont le même nombre n d'éléments. Cet entier n est appelé la **dimension** de E sur $\mathbb{R}$.

On convient que l'espace vectoriel $\{0\}$ est de dimension nulle.

Exemples.

1. $\mathbb{R}^n$ est un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{R}$ car sa base canonique est une base contenant n vecteur.
2. $\mathbb{R}_n[X]$ est une espace vectoriel de dimension $n+1$ sur $\mathbb{R}$. En effet, la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est $(1, X, X^2, \cdots, X^n)$, qui contient $n+1$ vecteurs (Attention à ce $+1$! !)
3. L'ensemble des fonctions réelles $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ n'a pas de base, donc pas de dimension.

Théorème 8.

Si E est un espace vectoriel de dimension n, alors :

1. toute famille libre a au plus n éléments. Si elle a exactement n éléments, c'est une base ;
2. Toute famille libre peut être complétée en une base. ($\leftarrow$-- **Théorème de la base incomplète**)
3. toute famille génératrice de E a au moins n éléments. Si elle a exactement n éléments, c'est une base.
4. Toute famille génératrice de E contient une base.

Remarque : Dans un espace vectoriel E de dimension finie, le cardinal (le nombre de vecteurs distincts ou non dans la famille) de toute famille libre est inférieur ou égal au cardinal de toute famille génératrice de E.

1.3 Sous-espaces vectoriel de dimension finie

Théorème 9.

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Tout sous-espace vectoriel F de E est de dimension finie, et

$$\dim(F) \leqslant \dim(E).$$

De plus si $\dim(F) = \dim(E)$ alors $F = E$.

Démonstration. Notons n la dimension de E.

Si $F = \{0\}$, alors F est de dimension 0.

Sinon, soit f_1 un vecteur non nul de F. Si F est engendré par f_1, alors F est de dimension 1 car (f_1) est alors une base de F.

Sinon, soit f_2 un vecteur de F non colinéaire à f_1 de sorte que (f_1, f_2) est libre. Si (f_1, f_2) engendre F, alors F est de dimension 2.

Sinon, on continue ainsi à ajouter des vecteurs à notre famille libre jusqu'à arriver à une famille $(f_1, \ldots, f_p)$ libre et génératrice de F, donc une base de F . Un tel moment survient forcément avec $p \leqslant n$ car toute famille d'au moins $(n+1)$ éléments de F (donc de E) est liée.

Donc F est de dimension finie, et la dimension est alors inférieure ou égale à celle de E.

Si $\dim(F) = \dim(E)$, une base de F est une famille libre de E à n éléments : c'est aussi une base de E et donc $F = E$.

Exemple. On sait que $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$ - espace vectoriel de dimension 2 car une base est $(1, i)$. L'ensemble $i\mathbb{R}$ des imaginaires purs est un sous espace vectoriel de $\mathbb{C}$ est sa base est (i) donc il est de dimension 1.

Remarque : Un espace vectoriel qui n'est pas de dimension finie peut contenir des s-e-v de dimension finie.

Exemple. L'ensemble des fonctions réelles n'a pas de dimension. On considère S l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y" - 1 = 0$. On sait que $y_h(t) = Ae^{-t} + Be^{t}$ avec A, B des constantes. Donc y_h est une combinaison linéaire des fonction $f(t) = e^{-t}$ et $g(t) = e^{t}$ et $S = \text{Vect}\{(f, g)\}$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$. La famille (f, g) est génératrice de S, et elle est libre car les deux fonctions ne sont pas proportionnelles. Donc c'est une base de S. Donc S est de dimension 2.

Corollaire 10.
Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On a

$$F \subset G \quad \text{et} \quad \dim(F) = \dim(G) \qquad \Longrightarrow \qquad F = G.$$

1.4 Sous-espaces supplémentaires en dimension finie

Théorème.
Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E. Il existe alors dans E un sous-espace vectoriel G tel que F et G soient supplémentaires.

Remarque : Attention, il n'y a pas unicité du supplémentaire d'un sous-espace vectoriel. De plus Si F et G sont supplémentaires, alors $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$.

Théorème 12.
Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E de dimension finie n.

1. Si on a : $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$ et $F \cap G = \{0\}$, alors F et G sont supplémentaires.
2. Si on a : $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$ et $F + G = E$, alors F et G sont supplémentaires.

Dans tous les cas, on obtient une base de E en réunissant une base de F et une base de G.

Exemple. Dans $\mathbb{R}_n[X]$, $F = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $G = \text{Vect}(X^n)$ sont supplémentaires.

Exercice 1
On se place dans le plan vectoriel $\mathbb{R}^2$, muni de la base canonique $\mathcal{B}$. Soient les vecteurs $\vec{u} = (2, 1)$ et $\vec{v} = (-1, 3)$. On note $U = \text{Vect}(\vec{u})$ et $V = \text{Vect}(\vec{(v)})$. Montrer que U et V sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$.

Théorème 13.
Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On a

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

2 Applications linéaires en dimension finie

Dans ce chapitre E et F sont deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels, l'espace E étant supposé de dimension finie (F peut ne pas être de dimension finie).

Théorème.
Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $(e'_1, \ldots, e'_n)$ une famille de vecteurs de F. Il existe une unique application linéaire f de E dans F telle que

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \; f(e_k) = e'_k.$$

Autrement dit une application linéaire est entièrement caractérisée par l'image d'une base de l'espace vectoriel de départ.
Pour calculer l'image d'un vecteur $x \in E$ par f, on décompose $x = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n$ selon la base $\mathcal{B}$, puis on a par linéarité de f :

$$f(x) = f(\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n) = \lambda_1 f(e_1) + \cdots + \lambda_n f(e_n) = \lambda_1 e'_1 + \cdots + \lambda_n e'_n$$

Propriété.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et f et g deux applications linéaires de E dans F. Si l'on a :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad f(e_k) = g(e_k)$$

alors les applications f et g sont égales ($\forall x \in E,\ f(x) = g(x)$).

Autrement dit, deux applications linéaires qui coïncident sur une base de E sont égales.

Corollaire 16.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et f une application linéaire de E dans F. L'image de la base $\mathcal{B}$ par f est la famille $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ et c'est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$, autrement dit

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(e_1), \ldots, f(e_n))$$

Remarque : Attention, la famille $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ n'est pas forcément une base de $\mathrm{Im}(f)$. Il faut vérifier qu'elle est libre.

Exemple. On considère l'application linéaire $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $f(a + ib) = i(a + 2b)$. Alors

$$f(1) = i, \quad f(i) = 2i \quad \Rightarrow \mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}\{i, 2i\} = \mathrm{Vect}\{i\}$$

Donc $\mathrm{Im}\, f$ est de dimension 1.

Théorème 17.

(Théorème du rang) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et F un espace vectoriel quelconque. Soit f une application linéaire de E dans F. On a :

$$\dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(E)$$

Remarque : $\dim(\mathrm{Im}(f))$ est le rang de f.

Théorème 18.

Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et f une application linéaire de E vers F. On a :

1. $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 0$ si et seulement si f est injective.
2. $\dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(F)$ si et seulement si f est surjective.

Remarque : Si les espaces E et F sont de même dimension n (en particulier si $E = F$) et si f est injective, on a $\dim \mathrm{Ker}\, f = 0$ donc en utilisant le théorème du rang on a $\dim \mathrm{Im}\, f = n$, donc f est surjective. Finalement, elle est bijective.
De même, si f est surjective avec E et F sont de même dimension n, on arrive par le théorème du rang à montrer que f est injective, donc bijective.

Mais ça ne marche pas pour un endomorphisme d'un espace vectoriel qui n'est pas de dimension finie. Par exemple, l'endomorphisme $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array}$ de l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ (qui n'est pas de dimension finie) est surjectif (car pour tout polynôme Q de $\mathbb{R}[X]$, on peut trouver un polynôme P tel que $P' = Q$), mais il n'est pas injectif (en effet, l'image par φ de tout polynôme constant est le polynôme nul).

3 Matrices

Propriété.

Pour tous entiers naturels non nuls n et m, l'ensemble $\mathcal{M}_{n,m}$ des matrices $n \times m$, muni de l'addition et de la multiplication par un scalaire, est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel.

Dans $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$, pour $1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant p$, on note $E_{i,j}$ la matrice de taille $n \times m$ où tout les coefficients sont nuls SAUF le coefficient ligne i et colonne j qui vaut 1. Toute matrice de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ s'écrit de manière unique comme une combinaison linéaire des matrices $(E_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$.

Exemple. Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Propriété.

Soit m et n deux nombres entiers non nuls. La famille de matrices $(E_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant m}}$ définie ci-dessus, est la base canonique de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$. Cette famille contient nm vecteur. En conséquence, l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ est de dimension finie et $\dim \big(\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})\big) = nm$.

3.1 Matrices de passage

Dans toute cette section, on considère E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n.

Définition 21.
Soit $\mathcal{F} = (v_1, \dots, v_p)$ une famille de vecteurs de E. Soit $\mathcal{B}$ une base de E. La matrice de la famille $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B}$ est notée $M_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ et elle est formée en mettant côte à côte en colonne les coordonnées de $v_1, \dots, v_p$ dans la base $\mathcal{B}$

Si au lieu d'une famille quelconque $\mathcal{F}$, on prend une deuxième base, on a la matrice de passage :

Définition 22.
Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. La matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$ est notée $P(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$ et elle est formée en mettant en colonne et côte à côte les coordonnées (exprimés dans la base $\mathcal{B}$) des vecteurs de $\mathcal{B}'$.

Exemple. On se place dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ (de dimension 2). On pose $\mathcal{B} = (1, i)$ base de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{B}'(1+i, 2-2i)$ une autre base de $\mathcal{C}$ (car elle est libre et contient deux vecteurs). Les coordonnées de $1+i$ dans $\mathcal{B}$ sont $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et les coordonnées de $2-2i$ sont $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$. Donc la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est $P(\mathcal{B}, \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.
On retrouve les propriétés habituelles des matrices de passage.

Propriété 23.
Soit un vecteur x de E, avec $X_{\mathcal{B}}$ le vecteurs des coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$ et $X_{\mathcal{B}'}$ le vecteurs des coordonnées de X dans la base $\mathcal{B}'$. On a alors

$$X_{\mathcal{B}} = P(\mathcal{B}, \underbrace{\mathcal{B}')X_{\mathcal{B}'}}, \qquad \text{et} \qquad X_{\mathcal{B}'} = (P(\mathcal{B}, \mathcal{B}'))^{-1} X_{\mathcal{B}}$$

Propriété 24.
1. Soient $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3$ trois bases de E. On a
$$P(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) \times P(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3) = P(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_3)$$
2. Toute matrice de changement de base est inversible. De plus, si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de E, l'inverse de la matrice $P(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$ est la matrice $P(\mathcal{B}', \mathcal{B})$, autrement dit
$$P(\mathcal{B}, \mathcal{B}')^{-1} = P(\mathcal{B}', \mathcal{B}).$$

3.2 Matrice d'une application linéaire

Définition 25.
Soit E et F deux $\mathbb{R}-$espaces vectoriels de dimensions respectives p et n. On note $\mathcal{B}_E$ une base de E et $\mathcal{B}_F$ une base de F.
Soit u une application linéaire de E dans F. On calcule les image des vecteurs de $\mathcal{B}_E$ par u, et on exprime ces images par des coordonnées dans la base $\mathcal{B}_F$. On met ces coordonnées en colonne, dans l'ordre, et côte à côte. On obtient une matrice.
La matrice $M_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(u)$ définie précédemment est la matrice de l'application linéaire u par rapport aux bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$. Les colonnes de cette matrice sont les vecteurs $u(e_1), \dots, u(e_p)$ (image de la base $\mathcal{B}_E$) exprimés dans la base $\mathcal{B}_F$.

Dans le cas où u est un endomorphisme de E, on choisit souvent la même base $\mathcal{B}$ pour repérer un vecteur et son image. La matrice correspondante s'appelle alors la matrice de u par rapport à $\mathcal{B}$ et se note $M_{\mathcal{B}}(u)$.

Exemple. On considère l'application linéaire u de $E = \mathbb{R}^3$ dans $F = \mathbb{R}_1[X]$ définie par $u(a, b, c) = (a+3b)X + 2c$. On prend comme base de $\mathbb{R}^3$ la base canonique $\mathcal{B}_E = ((1,0,0), (0,1,0), (0,0,1))$ et comme base de $\mathbb{R}_1[X]$ la base canonique $\mathcal{B}_F = (1, X)$. On calcule

$$u(1,0,0) = X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_F} \quad ; \quad u(0,1,0) = 3X = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_F} \quad ; \quad u(0,0,1) = 2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_F}$$

On en déduit la matrice de u dans ces bases :

$$M_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Propriété 26.
Soit u une application linéaire de E dans F, représentée par la matrice $M_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(u)$. Soit X un vecteur de E de coordonnées $X_{\mathcal{B}_E} = (x_1, x_2, \dots)$ dans la base $\mathcal{B}_E$. Les coordonnées du vecteur $u(X)$ dans la base $\mathcal{B}_F$ s'obtiennent en effectuant le produit de $M_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(u)$ par $X_{\mathcal{B}_E}$ (mis en colonne) :

$$u(X)_{\mathcal{B}_F} = M_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(u) \times X_{\mathcal{B}_E}$$

Exemple. On reprend u de l'exemple précédent. Alors on peut calculer les coordonnées de $u(x, y, z)$ par

$$u(x,y,z)_{\mathcal{B}_F} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2z \\ x+3y \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad u(x,y,z) = 2z + (x+3y)X$$

Propriété 27.
Soit u et v deux applications linéaires de E dans F et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors on a :

$$M_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u+v) = M_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u)+M_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(v), \qquad M_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(\lambda u) = \lambda M_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u)$$

Remarque : Cette proposition permet de dire qu'il y a une correspondance entre $\mathcal{L}(E,F)$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ (un isomorphisme). Les deux espaces ont donc même dimension.

Propriété.
Soit E et F deux espaces vectoriels de dimensions respectives p et n. L'espace vectoriel $\mathcal{L}(E,F)$ est un espace vectoriel de dimension finie et

$$\dim(\mathcal{L}(E,F)) = \dim(E) \times \dim(F) = np.$$

Propriété 29.
Soit E, F et G trois $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie respectivement munis des bases $\mathcal{B}_E$, $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}_G$. Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}(F,G)$, la composée $v \circ u$ a pour matrice :

$$M_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_G}(v \circ u) = M_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_G}(v) M_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u).$$

La composition des applications linéaires se traduit sous forme de produit des matrices associées.

Propriété 30.
Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension n rapportés à des bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$. Une application linéaire $u \in \mathcal{L}(E,F)$ est un isomorphisme de E sur F si, et seulement si, la matrice $M_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u)$ est inversible. On a alors

$$M_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(u^{-1}) = (M_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u))^{-1}$$

Matrice d'un endomorphisme dans des bases différentes

Propriété 31.
Soit E un espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E, et u un endomorphisme de E. On a

$$M_{\mathcal{B}'}(u) = P(\mathcal{B}',\mathcal{B}) M_{\mathcal{B}}(u) P(\mathcal{B},\mathcal{B}')$$

Remarque : En notant $A = M_{\mathcal{B}}(u)$, $A' = M_{\mathcal{B}'}(u)$ et $P = P(\mathcal{B},\mathcal{B}')$, on a $A' = P^{-1}A\,P$. Si au contraire on veut A en fonction de A', alors la formule devient $A = PA'P^{-1}$. On dit que A et A' sont semblables.

Fiche d'exercices XXVIII : Espaces vectoriels de dimension finie

Exercice 1

($\star$) Dans $\mathbb{R}_3[X]$, on considère $P = 2X^3 + X$, $Q = X^2 - 3X$ et $R = X - 1$.

1. Montrer que la famille (P, Q, R) est libre.
2. Peut-on trouver $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $aP + bQ + cR = 4X^3 + X^2 + X - 1$?
3. Qu'en déduit-on pour la famille (P, Q, R) ?

Exercice 2

($\star$) On considère $F = \mathrm{Vect}(2X + 1; 3X - 2; 5X - 1)$. Quelle est la dimension de F ?

Exercice 3

($\star\star\star$)

1. Soit n polynômes non nul $P_1, \dots, P_n \in \mathbb{R}[X]$ échelonnés en degré, *i.e.*

$$\deg(P_1) < \deg(P_2) < \cdots < \deg(P_n).$$

   Montrer que cette famille est libre.
2. Soit $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ une famille de polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ tels que

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \qquad \deg(P_k) = k.$$

   Montrer que cette famille est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. Soit $a \in \mathbb{R}$.
   (a) Montrer que la famille $(1, (X - a), (X - a)^2, \dots, (X - a)^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
   (b) Donner les coordonnées d'un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ dans cette base.

Exercice 4

($\star$) Écrire la matrice de la famille

$$\mathcal{F} = \left(1, X, \frac{X(X+1)}{2}, \frac{X(X+1)(X+2)}{6}\right)$$

dans la base canonique $(1, X, X^2, X^3)$ de $\mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 5

($\star$) On se place dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$, muni de sa base canonique $\mathcal{B} = \big(1, X, X^2\big)$. On pose $P_1 = (X + 1)^2$, $P_2 = X + 1$ et $P_3 = 9X - 5$.
Montrer que $\mathcal{B}' = \big(P_1; P_2; P_3\big)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$ en utilisant les déterminants.

Exercice 6

($\star\star$) Dans $\mathbb{R}_2[X]$, on considère la base

$$\mathcal{B}' = (X^2 + X + 1; 3X - 1; 2X + 4)$$

1. Donner la matrice de passage $P(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$ de la base canonique $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$.
2. Soit le polynôme Q de coordonnées $(2, 1, 3)$ dans la base $\mathcal{B}'$, trouver les coefficients du polynôme Q.

Exercice 7

($\star\star$) Soit a, b deux nombres réels distincts. On considère l'ensemble

$$F = \{P \in \mathbb{R}_4[X],\ P(a) = P(b) = 0\}.$$

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_4[X]$, en donner une base et sa dimension.

Exercice 8

($\star\star\star$) L'espace E de dimension 3 étant rapporté à une base orthonormée, on considère un vecteur $\overrightarrow{u}(a, b, c)$ fixé et non nul. Montrer que les applications suivantes sont linéaires, expliciter $f(\overrightarrow{v})$ et $g(\overrightarrow{v})$ avec les coordonnées de u et v et déterminer leur noyau :

$$f: \begin{array}{rcl} E & \to & \mathbb{R} \\ \overrightarrow{v} & \mapsto & \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} \end{array} \qquad g: \begin{array}{rcl} E & \to & E \\ \overrightarrow{v} & \mapsto & \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} \end{array}$$

Exercice 9

($\star\star$) Montrer que $u : P \mapsto P(0)X^2 + P(1)X$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$. Déterminer son noyau et son image.

Exercice 10

($\star\star$) Écrire les matrices relativement aux bases canoniques des applications linéaires :

$$h: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ P(X) & \mapsto & P(X) - XP'(X) \end{array} \qquad k: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}^3 \\ P(X) & \mapsto & (P(-1), P(0), P(1)) \end{array}$$

Rappel : la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est la famille de polynômes $(1, X, X^2, \dots, X^n)$.

Exercice 11

($\star$) Soit E un espace vectoriel rapporté à une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ et $F = \mathbb{R}_2[X]$ rapporté à la base canonique $\mathcal{B}' = (1, X, X^2)$. Soit f l'application linéaire de E vers F représentée par la matrice :

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Soit v le vecteur de E défini par $v = 3e_1 + 2e_2 - 4e_4$. Calculer $f(v)$.
2. On suppose que $E = \mathbb{R}^4$ et $\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Calculer $f(-1, 2, 3, 0)$.

Exercice 12

($\star\star$) Montrer que l'application $v : P \mapsto P - P'$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ et déterminer son noyau. En déduire que v est un automorphisme. Expliciter v^{-1}.

Exercice 13

($\star\star$) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $\lambda \in \mathbb{R}$ pour que l'endomorphisme

$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \mapsto & (X-1)^2 P'' + (\lambda X + 1)P' + P \end{array}$$

soit un automorphisme.

Exercice 14

($\star\star$)

1. Montrer que $\mathcal{C} = (1 - X + X^2, 1 + X, 1)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer la matrice de passage de la base $\mathcal{C}$ à la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. Donner les coordonnées du polynôme $P = X^2 + 2X + 3$ dans la base $\mathcal{C}$.
4. Écrire la matrice de l'opérateur de dérivation dans la base $\mathcal{B}$ puis dans la base $\mathcal{C}$.

Exercice 15

On se place dans le plan vectoriel $\mathbb{R}^2$, muni de la base canonique $\mathcal{B}$. Soient les vecteurs $\vec{u} = (2,1)$ et $\vec{v} = (-1,3)$. On note $U = \mathrm{Vect}(\vec{u})$ et $V = \mathrm{Vect}(\vec{v})$.

1. Montrer que U et V sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$.
2. On pose $\mathcal{B}' = (u, v)$ base de $\mathbb{R}^2$. Déterminer les matrices de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$ et de $\mathcal{B}'$ vers $\mathcal{B}$.
3. Soit s la symétrie par rapport à U parallèlement à V. Donner la matrice de s dans la base $\mathcal{B}'$.
4. Déterminer la matrice de s dans la base $\mathcal{B}$.
5. En déduire l'expression analytique de la symétrie par rapport à U parallèlement à V.

Exercice 16

($\star\star$) On se place dans $\mathbb{R}^4$ et on considère
$F = \mathrm{Vect}\left(\{(1,2,3,4),(0,1,2,1)\}\right)$ et $G = \mathrm{Vect}\left(\{(-1,0,0,1),(1,0,1,1)\}\right)$

1. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.
2. Déterminer p le projecteur sur F parallèlement à G.
3. En déduire la matrice de p dans la base canonique.

Exercice 17

($\star\star\star$) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Expliciter f.
2. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et une base de $\mathrm{Im}(f)$ et démontrer que ces deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
3. Écrire une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$, réunion d'une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et d'une base de $\mathrm{Im}(f)$.
4. Écrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$: a) directement, b) avec les matrices de passages.
5. (a) Écrire la matrice d'une homothétie vectorielle de rapport $\lambda \in \mathbb{R}$ dans la base $\mathcal{B}'$.
   (b) Écrire la matrice de la projection sur $\mathrm{Im}(f)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(f)$ dans $\mathcal{B}'$.
   (c) Décrire f comme la composée de deux endomorphismes simples.

Exercice 18

($\star\star$) Dans $\mathbb{R}^3$, on note P le plan d'équation $x + y + 2z = 0$ et D la droite dirigée par $u = (1,2,1)$.

1. Déterminer une base $\mathcal{B}_P = (v_1, v_2)$ du plan d'équation $x + y + 2z = 0$.
2. Justifier que $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, u)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
3. On note s la symétrie par rapport à P parallèlement à D et h l'homothétie de rapport 5.
   (a) Donner les matrices représentant s et h dans la base $\mathcal{B}'$.
   (b) Déterminer la matrice représentant la composée de s et h dans la base $\mathcal{B}'$.
   (c) Donner l'expression analytique de la composée de s et h.

Exercice 19

($\star\star$) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\sin(\theta) \\ -1 & 0 & \cos(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \end{pmatrix}$$

θ étant un réel donné.

1. Montrer que $f^3 = f \circ f \circ f = 0$.

   On pose $e_1 = (\cos(\theta), \sin(\theta), 0)$, $e_2 = f(e_1)$ et $e_3 = f(e_2)$.
2. Démontrer que (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer la matrice M' de f dans cette base.
4. Donner le lien matriciel reliant M et M'.