25. Courbes paramétrées en coordonnées cartésiennes

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $\mathcal{R} = (O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On note $\mathcal{B} = (\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ la base associée à $\mathcal{R}$. Dans toute la suite, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$.

1 Définition et exemple

Définition 1.

On appelle *courbe paramétrée* (ou *arc paramétré*) du plan toute application

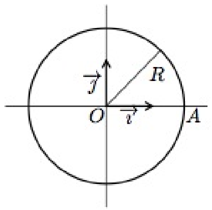
$$f: \begin{array}{rcl} I & \longrightarrow & \mathcal{P} \\ t & \longmapsto & M(t) = (x(t), y(t)) \end{array}$$

d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans le plan affine $\mathcal{P}$. La variable t est appelée *paramètre*, les fonctions réelles x et y sont les fonctions coordonnées de la courbe paramétrée.
L'ensemble des points $M(t)$ du plan lorsque t parcourt I s'appelle le *support* de la courbe paramétrée.

On peut voir une courbe paramétrée comme la position d'un point mobile, le paramètre t étant le temps. La fonction f peut aussi être vue comme une fonction vectorielle $\vec{f}$ reliant l'origine au point de coordonnées $(x(t), y(t))$. C'est le vecteur position.

Exemple. Dans la pratique, une courbe paramétrée est définie par les fonctions coordonnées x et y.

$\begin{cases} x(t) = R\cos(t) \\ y(t) = R\sin(t) \end{cases}$ $(t \in [0; 2\pi[)$ est un paramètrage du cercle de centre O et de rayon R, parcouru une fois dans le sens trigonométrique, en partant du point $A(R, 0)$.



Remarque : Deux courbes paramétrées différentes peuvent avoir le même support : la courbe paramétrée définie par $\begin{cases} x(t) = \cos(t) \\ y(t) = \sin(t) \end{cases}$, $t \in [0; 2\pi[$ représente le cercle unité parcouru une fois dans le sens direct, et la courbe paramétrée définie par $\begin{cases} x(t) = \cos(2t) \\ y(t) = -\sin(2t) \end{cases}$, $t \in [0; 4\pi[$ représente le cercle unité parcouru 4 fois dans le sens indirect.

2 Périodicité et Symétrie

Lors de l'étude d'une courbe paramétrée, on peut parfois réduire l'intervalle d'étude en exploitant la périodicité ou la symétrie des fonctions coordonnées.

Périodicité : Si il existe une période T telle que pour tout $t \in I$, $\begin{cases} x(t+T) = x(t) \\ y(t+T) = y(t) \end{cases}$, alors la courbe paramétrée parcourt plusieurs fois son support. Il suffit donc d'étudier et de tracer la courbe sur un intervalle de longueur T.

Exemple. la courbe $\begin{cases} x(t) = \cos(t) \\ y(t) = \sin(t) \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ a une périodicité de 2π. On l'étudie et on la trace pour $t \in [-\pi, \pi]$ par exemple.

Symétrie : Soit a un réel. On considère deux points $M(t)$ et $M(a-t)$ pour tout $t \in [\frac{a}{2}, +\infty[\cap I$. On regarde si ces deux points présentent une des symétries ci-dessous :

— Si $\begin{cases} x(a-t) = x(t) \\ y(a-t) = -y(t) \end{cases}$, alors la courbe a une symétrie d'axe (Ox).

— Si $\begin{cases} x(a-t) = -x(t) \\ y(a-t) = y(t) \end{cases}$, alors la courbe a unesymétrie d'axe (Oy).

— Si $\begin{cases} x(a-t) = -x(t) \\ y(a-t) = -y(t) \end{cases}$, alors la courbe a une symétrie de centre O.

— Si $\begin{cases} x(a-t) = y(t) \\ y(a-t) = x(t) \end{cases}$, alors la courbe a une symétrie d'axe la première bissectrice.

Dans ces cas, on coupe l'intervalle d'étude en deux en $t = \frac{a}{2}$, on étudie la courbe sur une des deux moitiés et on trace le reste de la courbe grâce à la symétrie.

Remarque : L'étude de la parité des fonctions est le cas particulier de symétrie où $a = 0$.

Exemple. On considère la courbe paramétrée définie par $\begin{cases} x(t) = (t-1)^2 + 1 \\ y(t) = (t-1)^3 \end{cases}$ pour $t \in [0, 2]$. On a

$$\begin{cases} x(2-t) = (2-t-1)^2 + 1 = (1-t)^2 + 1 = (t-1)^2 + 1 = x(t) \\ y(2-t) = (2-t-1)^3 = (1-t)^3 = -(t-1)^3 = -y(t) \end{cases}$$

Donc la courbe présente une symétrie d'axe (Ox) et il suffit de couper l'intervalle d'étude en $\frac{a}{2} = 1$. Donc on étudie la courbe sur $[0, 1]$ et on trace l'autre partie par symétrie.

3 Continuité et dérivabilité

Définition 2.
On dit que $f(t)$ *converge* vers le point M_0 de coordonnées (a, b) lorsque t tend vers t_0 si, et seulement si $x(t)$ converge vers a et $y(t)$ converge vers b lorsque $t \to t_0$. On note alors

$$\lim_{t\to t_0} f(t) = M_0 = (a, b)$$

Exemple. On considère la courbe paramétrée définie par $f(t) = \begin{cases} x(t) = t\ln t \\ y(t) = t^2+1 \end{cases}$, $t \in]0; +\infty[$. Quand $t \to 0$, on a $x(t) \to 0$ et $y(t) \to 1$ donc $\lim_{t\to 0} f(t) = (0, 1)$.

Définition 3.
On dit que $f(t)$ est continue en t_0 si, et seulement si $x(t)$ converge vers $x(t_0)$ et $y(t)$ converge vers $y(t_0)$ lorsque $t \to t_0$.

On dit que f est continue sur I si elle est continue en tout point de I.

Exemple. La courbe paramétrée $f(t) = \begin{cases} x(t) = t\ln t \\ y(t) = t^2+1 \end{cases}$, $t \in]0; +\infty[$ est continue sur $t \in]0; +\infty[$.

Définition.
On dit que la fonction f (vue comme un vecteur) est *dérivable* en t_0 si la limite

$$\lim_{t\to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

existe et est un vecteur. On note alors $f'(t_0)$ ce vecteur limite, et on l'appelle *vecteur dérivé de f en t_0*.
Si f est dérivable en tout point de l'intervalle I, on note f' la fonction dérivée.

Propriété 5.
On dit que f est *dérivable* en t_0 si et seulement si ses fonctions coordonnées x et y sont dérivables en t_0. Dans ce cas, la dérivée est $f'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0))$.

Exemple. La courbe paramétrée $f(t) = \begin{cases} x(t) = t\ln t \\ y(t) = t^2+1 \end{cases}$, $t \in]0; +\infty[$ est dérivable sur $t \in]0; +\infty[$ et sa dérivée est $f'(t) = \begin{cases} x'(t) = \ln t + 1 \\ y'(t) = 2t \end{cases}$, $t \in]0; +\infty[$.

Définition.
On dit que f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I si f est k fois dérivable sur I et si sa dérivée k-ième notée $f^{(k)}$ est continue sur I.

Etude d'une courbe paramétrée : On étudie en même temps les deux fonctions coordonnées en faisant leur ensemble de définition, leur dérivée, leur tableau de variation et leurs limite. On fera attention à présenter dans le même tableau de variation les deux études de fonctions, en alignant bien ce qui se passe "en même temps".

t		t_0		t_1		$\cdots$
$x'(t)$	$+$		$+$	0	$-$	
$x(t)$	$\nearrow$	$x(t_0)$	$\nearrow$	$x(t_1)$	$\searrow$	
$y'(t)$	$+$	0	$-$		$-$	
$y(t)$	$\nearrow$	$y(t_0)$	$\searrow$	$y(t_1)$	$\searrow$	

Attention, x croissant ne signifie pas que la courbe monte, mais qu'elle va vers la droite. Et quand x est décroissant, elle va vers la gauche.

3.1 Interprétation cinématique

On peut considérer que le point $M(t)$ est la position d'un mobile à l'instant t. Pour tout $t_0 \in I$, on dit que $\overrightarrow{OM(t_0)} = \vec{f}(t_0)$ est le **vecteur position** à l'instant $t_0 \in I$. Lorsque f est dérivable en t_0, le vecteur dérivé $f'(t_0)$ est appelé **vecteur vitesse** à l'instant t_0. Si f est deux fois dérivable en t_0, le vecteur $f''(t_0)$ est appelé le **vecteur accélération** à l'instant t_0.

Exemples.
Droites : une droite passant par $A(a, b)$ et dirigée par $\vec{v}(\alpha, \beta)$ est paramétrée par

$$f : t \mapsto M(t) = \begin{pmatrix} x(t) = a + \alpha t \\ y(t) = b + \beta t \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a alors $f'(t) = (\alpha, \beta) = \vec{v}$.
La même droite peut être parcourue deux fois plus vite puisque elle admet également la représentation paramétrique $g : x \mapsto N(t) = \big(X(t) = a + 2\alpha t, Y(t) = b + 2\beta t\big)$. On a alors $g'(t) = (2\alpha, 2\beta) = 2\vec{v}$.

3.2 Courbe d'une fonction numérique réelle :

La représentation graphique d'une fonction numérique g est la courbe d'équation cartésienne $y = g(x)$. Si l'on désigne par $\mathcal{D}_g$ l'ensemble de définition de g, le graphe de g est le support de la courbe paramétrée définie par

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t) = t \\ y(t) = g(t) \end{array} \right. \qquad (t \in \mathcal{D}_g).$$

Là encore, il est possible de parcourir la courbe à différentes vitesses.

4 Points réguliers et stationnaires

Définition 7.

Soit f une courbe paramétrée de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et t_0 un élément de I. On dit que :

- le point $M(t_0)$ est **régulier** si et seulement si $f'(t_0) \neq \overrightarrow{0}$. La courbe paramétrée admet une tangente au point $M(t_0)$ qui est la droite passant par $M(t_0)$ et dirigée par le vecteur $f'(t_0)$.
- le point $M(t_0)$ est **stationnaire** si et seulement si $f'(t_0) = \overrightarrow{0}$.

Remarque : D'un point de vue cinématique, la vitesse du mobile est nulle en un point stationnaire. Un point stationnaire est donc un point d'arrêt sur la trajectoire.

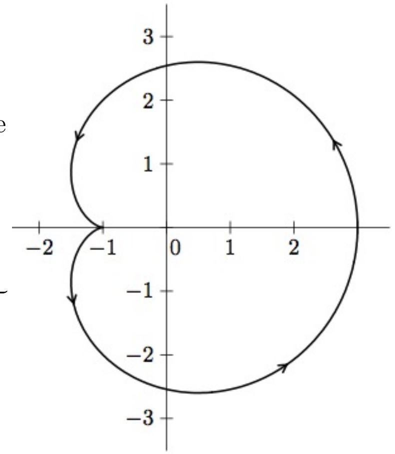
En un point stationnaire, c'est-à-dire lorsque $f'(t_0) = \overrightarrow{0}$, la courbe peut ou non posséder une tangente. Pour étudier cette tangente :

- Soit on calcule la limite de $\frac{y(t)-y(t_0)}{x(t)-x(t_0)}$. Cette limite est alors la pente de la tangente.
- Soit on calcule le développement limité en t_0 de $x(t)$ et $y(t)$ à l'ordre 2 au minimum, et on lit un vecteur tangent en cherchant la première puissance non nulle à partir de l'ordre 2. Il n'y aura pas de terme d'ordre 1 dans les développements limités car les dérivées premières de x et y sont nulles. Le terme d'ordre 0 correspond au point de la courbe à l'instant t_0.

Exemple. On considère la courbe paramétrée définie par

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t) = \cos t - 2\cos(t/2) \\ y(t) = \sin t - 2\sin(t/2) \end{array} \right. \qquad (t \in [0, 4\pi]).$$

Déterminer les vecteurs directeurs des tangentes $\mathcal{T}$ en $t_0 = \pi$ et $\mathcal{T}'$ en $t_1 = 0$ et tracer ces tangentes.



5 Etude asymptotique

Définition 8.

Soit f une courbe paramétrée et t_0 **une extrémité de I n'appartenant pas à I** (éventuellement $-\infty$ ou $+\infty$). On note x et y les fonctions coordonnées de f.

- Si $\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{t \to t_0} x(t) = x_0 \\ \lim\limits_{t \to t_0} y(t) = y_0 \end{array} \right.$, alors on dit que le point $L(x_0, y_0)$ est un point limite de la courbe en t_0.
- Si $\lim\limits_{t \to t_0} \|\overrightarrow{f}(t)\| = +\infty$, on dit que la courbe paramétrée $\overrightarrow{f}$ admet une *branche infinie* en t_0.
  C'est le cas en particulier lorsque $\lim\limits_{t \to t_0} |x(t)| = +\infty$ ou $\lim\limits_{t \to t_0} |y(t)| = +\infty$.

Soit f une courbe paramétrée admettant une branche infinie en t_0. (t_0 est une extrémité de I n'appartenant pas à I)

1) Si $\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{t \to t_0} |x(t)| = +\infty \\ \lim\limits_{t \to t_0} y(t) = y_0 \end{array} \right.$, alors la courbe a une *asymptote horizontale* d'équation $y = y_0$.

2) Si $\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{t \to t_0} x(t) = x_0 \\ \lim\limits_{t \to t_0} |y(t)| = +\infty \end{array} \right.$, alors la courbe a une *asymptote verticale* d'équation $x = x_0$.

3) Si $\lim\limits_{t \to t_0} |x(t)| = +\infty$ et $\lim\limits_{t \to t_0} |y(t)| = +\infty$, alors il faut étudier la limite du quotient

$\dfrac{y(t)}{x(t)}$:

a) si $\displaystyle\lim_{t\to t_0}\frac{y(t)}{x(t)}=\infty$ (+ ou −), alors la courbe présente une *branche parabolique de direction* (Oy).

b) si $\displaystyle\lim_{t\to t_0}\frac{y(t)}{x(t)}=0$, alors la courbe présente une *branche parabolique de direction* (Ox).

c) si $\displaystyle\lim_{t\to t_0}\frac{y(t)}{x(t)}=a$ avec $a\in\mathbb{R}^*$, alors on étudie la limite de $y(t)-ax(t)$:

i) si $y(t)-ax(t)$ n'admet pas de limite lorsque t tend vers t_0, alors on dit simplement que la droite d'équation $y=ax$ est *une direction asymptotique en* t_0 pour la courbe paramétrée.

ii) si $\displaystyle\lim_{t\to t_0}y(t)-ax(t)=+\infty$ ou $\displaystyle\lim_{t\to t_0}y(t)-ax(t)=-\infty$, alors on dit que la courbe présente *une branche parabolique de direction* $y=ax$.

iii) si $\displaystyle\lim_{t\to t_0}y(t)-ax(t)=b$ avec $b\in\mathbb{R}$, alors la droite d'équation $y=ax+b$ est asymptote à la courbe en t_0. Pour déterminer la position de la courbe par rapport à cette asymptote, on étudie le signe de $y(t)-ax(t)-b$ au voisinage de t_0.

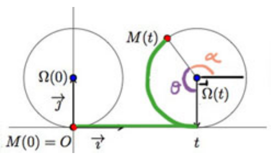
6 Longueur d'une courbe

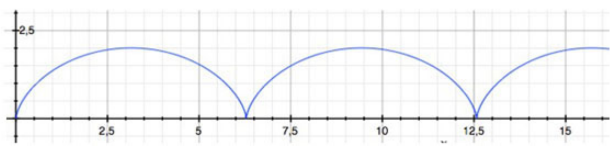
Définition 9.

Soit f une courbe paramétrée de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. Entre les points $M(t_0)$ et $M(t_1)$ (où $t_0\leqslant t_1$ appartiennent à I), la longueur de courbe est définie par

$$L(t_0,t_1)=\int_{t_0}^{t_1}||\vec{f}'(t)||\mathrm{d}t=\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\,\mathrm{d}t.$$

Exemple. En assimilant la roue d'un vélo à un cercle de rayon 1, la courbe décrite par un point fixe $M(t)$ sur le pneu de cette roue lorsque le vélo avance en ligne droite est une cycloïde. Calculons les coordonnées $(x(t),y(t))$ de $M(t)$ et la longueur d'une arche de cycloïde obtenue lorsque t parcourt $[0,2\pi]$.





Les coordonnées du centre de la roue $\Omega(t)$ sont $(t,1)$. Pour calculer la position de $M(t)$, on décompose

$$\overrightarrow{OM(t)}=\overrightarrow{O\Omega(t)}+\overrightarrow{\Omega(t)M(t)}$$

La roue étant un cercle de rayon 1, les coordonnées de $\overrightarrow{\Omega(t)M(t)}$ sont $(\cos\alpha(t),\sin\alpha(t))$ avec $\alpha=(\vec{i},\overrightarrow{\Omega(t)M(t)})$. On a donc

$$x(t)=t+\cos\alpha(t);\qquad y(t)=1+\sin\alpha(t)$$

On note $\theta(t)$ l'angle $(\overrightarrow{\Omega(t)M(t)},-\vec{j})$(cf. dessin). Quand la roue a avancé de t , la portion de cercle correspondante est de longueur t, donc l'angle correspondant vaut $\theta(t)=t$ (car le rayon est 1) compté dans le sens positif. On a

$$\alpha(t)+\theta(t)=\alpha(t)+t=\frac{3\pi}{2}\Leftrightarrow\alpha(t)=\frac{3\pi}{2}-t$$

Donc

$$\begin{cases} x(t)=t+\cos\left(3\frac{\pi}{2}-t\right)=t-\sin(t)\\ y(t)=1+\sin\left(3\frac{\pi}{2}-t\right)=1-\cos(t)\end{cases}\qquad(t\in\mathbb{R})$$

On calcule le vecteur vitesse et sa norme

$$\vec{f}'(t)=\begin{cases} x'(t)=1-\cos(t)\\ y'(t)=\sin(t)\end{cases};$$

$$\|\vec{f}'(t)\|=\sqrt{(1-\cos(t))^2+\sin^2(t)}=\sqrt{2(1-\cos(t))}$$

On remplace $\cos t=1-2\sin^2\frac{t}{2}$ et on a

$$\|\vec{f}'(t)\|=\sqrt{2\left(1-\left(1-2\sin^2\frac{t}{2}\right)\right)}=2\sqrt{\sin^2\frac{t}{2}}=2\left|\sin\frac{t}{2}\right|$$

Donc

$$L(0,2\pi)=\int_0^{2\pi}\|v(t)\|dt=2\int_0^{2\pi}\left|\sin\frac{t}{2}\right|dt$$

Comme $\frac{t}{2}\in[0,\pi]$, le sinus est positif et

$$L(0,2\pi)=2\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}dt=\left[-4\cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi}=-4\cos\pi+4\cos0=8$$

Fiche d'exercices XXV : Courbes paramétrées

Exercice 1

($\star\star$) Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on considère la courbe paramétrée Γ définie par

$$M(t)\begin{cases} x(t) = \sin 2t, \\ y(t) = \sin 3t. \end{cases}$$

1. Après avoir déterminé le domaine de définition de Γ, expliquer pourquoi l'on peut restreindre l'intervalle d'étude à $[0, \pi/2]$ et comment l'on obtient l'intégralité de la courbe à partir de l'arc paramétré par $t \in [0, \pi/2]$.
2. Dressez le tableau des variations simultanées sur $[0, \pi/2]$.
3. Déterminez les éventuels points stationnaires. Précisez les points de la courbe où apparaissent les éventuelles tangentes horizontales et verticales.
4. Déterminez les paramètres des points d'intersection de la courbe avec les axes du repère et donnez les coordonnées d'un vecteur directeur des tangentes à la courbe en ces points.
5. Tracez la courbe Γ. (Unité graphique 4cm)

Exercice 2

($\star\star$) On rapporte le plan au repère orthonormé $(O; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$. étudier et représenter la courbe paramétrée Γ définie par

$$\Gamma\begin{cases} x(t) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}, \\ y(t) = \dfrac{t^3}{1+t^2}. \end{cases}$$

Exercice 3

($\star\star$) On rapporte le plan au repère orthonormé $(O; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$. étudier et représenter la courbe paramétrée Γ définie par

$$\Gamma\begin{cases} x(t) = \ln|1-t|, \\ y(t) = \ln|1+t|. \end{cases}$$

On précisera sur le graphe la tangente à l'instant $t = 0$. *Donnée numérique :* $\ln 2 \approx 0,7$.

Exercice 4

($\star\star$) On rapporte le plan au repère orthonormé $(O; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$. On considère la courbe paramétrée

$$\begin{cases} x(t) = \cos(t) \\ y(t) = \dfrac{\sin^2(t)}{2+\sin(t)}. \end{cases}$$

1. Montrez qu'on peut réduire l'intervalle d'étude à $[-\pi/2, \pi/2]$ et dresser le tableau de variations simultanées.
2. Déterminez les points où apparaissent des tangentes horizontales.
3. Montrez que le point de paramètre 0 est stationnaire, et vous préciserez un vecteur tangent en ce point.
4. Tracer la courbe dans un repère orthonormé (unité : 6 cm)

Cette courbe s'appelle **courbe du bicorne**.

Exercice 5

($\star\star$) **Une astroïde.** On considère la courbe paramétrée définie par

$$\begin{cases} x(t) = \cos^3(t) \\ y(t) = \sin^3(t). \end{cases}$$

1. Montrer que l'on peut réduire l'intervalle d'étude à $[0; \pi/4]$.
2. Dressez le tableau des variations simultanées sur $[0, \pi/4]$. Déterminez les points stationnaires.
3. Déterminez les éventuelles tangentes horizontales et verticales, puis les éventuelles tangentes au(x) point(s) stationnaire(s).
4. Tracez cette courbe. (unité graphique 4cm)

Exercice 6

($\star\star$) Calculer la longueur de la néphroïde, représentée paramétriquement par :

$$\begin{cases} x(t) = 3\cos(t) - \cos(3t) \\ y(t) = 3\sin(t) - \sin(3t) \end{cases} \qquad (t \in [0, 2\pi]).$$

Exercice 7

($\star\star\star$) Soit (C) le cercle trigonométrique, B le point de coordonnées $(1,0)$. à tout point A du cercle, on fait correspondre le point H, orthocentre du triangle OAB.

1. Tracez plusieurs triangles en faisant varier le point A pour voir ce qui se passe...
2. Déterminer le lieu des points H lorsque A parcourt le cercle (on notera t une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA})$.
3. étudier cette courbe.
4. Montrer que cette courbe admet un point double et montrer que les deux tangentes en ce point sont orthogonales.
5. Tracer cette courbe.
6. Déterminer une équation cartésienne de cette courbe

Fiche de révision XXV : Courbe paramétrée

Une fonction $f(t) = (x(t), y(t))$ est appelée ...	une courbe paramétrée.
Si une courbe paramétrée $f(t)$ vérifie $f(t+T) = f(t)$, quelle sont les conséquences ?	La courbe est périodique, on étudie et on trace f sur une période de longueur T.
Si une courbe paramétrée $f(t) = (x(t), y(t))$ vérifie $x(a-t) = x(t)$ et $y(a-t) = -y(t)$, alors quelle symétrie présente la courbe ?	symétrie d'axe (Ox).
Si une courbe paramétrée $f(t) = (x(t), y(t))$ vérifie $x(a-t) = -x(t)$ et $y(a-t) = y(t)$, alors quelle symétrie présente la courbe ?	symétrie d'axe (Oy).
Si une courbe paramétrée $f(t) = (x(t), y(t))$ vérifie $x(a-t) = -x(t)$ et $y(a-t) = -y(t)$, alors quelle symétrie présente la courbe ?	symétrie de centre O.
Si une courbe paramétrée $f(t) = (x(t), y(t))$ vérifie $x(a-t) = y(t)$ et $y(a-t) = x(t)$, alors quelle symétrie présente la courbe ?	symétrie d'axe la première bissectrice.
une courbe paramétrée $f(t) = (x(t), y(t))$ converge vers (a,b) quand $t \to t_0$ si...	$x(t)$ converge vers a et $y(t)$ converge vers b.
la dérivée d'une courbe paramétrée $f(t) = (x(t), y(t))$ est	$f'(t) = (x'(t), y'(t))$
la dérivée $f'(t)$ d'une courbe paramétrée représente quoi graphiquement ?	Le vecteur tangent à la courbe au point de temps t.
Comment présenter le tableau de variation de $f(t) = (x(t), y(t))$?	Les lignes sont les suivantes : t, $x'(t)$, $x(t)$, $y'(t)$ et $y(t)$, et on aligne bien ce qui se passe en même temps.
un point régulier d'une courbe paramétrée $f(t) = (x(t), y(t))$ est	un point où $f'(t) \neq (0,0)$.
un point stationnaire d'une courbe paramétrée $f(t) = (x(t), y(t))$ est	un point où $f'(t) = (0,0)$.
Comment calculer une tangente à la courbe de $f(t) = (x(t), y(t))$ en un point stationnaire ?	On fait un développement limité des deux coordonnées. Le premier vecteur non nul après l'ordre 1 est un vecteur tangent
Si la courbe paramétrée $f(t) = (x(t), y(t))$ est telle que $x(t)$ converge vers a et $y(t)$ converge vers ∞ quand $t \to t_0$, alors que se passe-t-il graphiquement ?	Il y a une asymptote verticale $x = a$.

Si la courbe paramétrée $f(t) = (x(t), y(t))$ est telle que $x(t)$ converge vers ∞ et $y(t)$ converge vers b quand $t \to t_0$, alors que se passe-t-il graphiquement ?	Il y a une asymptote horizontale $y = b$.

Si la courbe paramétrée $f(t) = (x(t), y(t))$ est telle que $y(t) - ax(t)$ converge vers b quand $t \to t_0$, alors que se passe-t-il graphiquement ?	Il y a une asymptote oblique $y = ax + b$.

Quelle est la longueur de la courbe paramétrique $f(t) = (x(t), y(t))$ entre les instant t_1 et t_2 ?	$\displaystyle\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt$