23. Probabilités et statistiques

1 Statistique et Estimation (en bref)

Le but d'une étude statistique est d'obtenir une information à partir de données recueillies par des observations, des expériences ou des enquêtes. Ces données varient selon l'endroit, le moment, l'objet.... on les appelle variables statistiques. Lors d'une étude statistique, on appelle :

— Population : l'ensemble étudié.
— Individu : tout élément de la population.
— Echantillon de taille n : tout groupe de n individus pris dans la population.
— Variable statistique : l'aspect qu'on étudie sur les individus de la population.

Exemple. Pour étudier la résistance aux chocs d'une voiture, les constructeurs font des crash-tests sur un échantillon de la production. Les enquêtes d'opinion font des sondages sur des échantillons de la population.

Définition 1.

Une série statistique $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ est une suite de valeurs prises par une variable statistique sur une population (échantillon ou population totale).
A partir de la série statistique, on peut calculer plusieurs indicateurs :

— **La valeur médiane.** On classe les n valeurs d'une série statistique dans l'ordre croissant.
  — Si la liste contient un nombre impaire de valeur, La médiane est la valeur "milieu", c'est à dire la valeur numero $\frac{n+1}{2}$.
  — Si la liste contient un nombre paire de valeur, la médiane est la moyenne des deux valeurs milieu, c'est à dire la moyenne des valeurs numéro $\frac{n}{2}$ et $\frac{n}{2}+1$.

— **La moyenne.** Si on note n le nombre de valeurs, la moyenne est donné par la somme de toutes les valeurs, divisée par le nombre de valeurs :

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

— **La variance.**

$$Var = \frac{(x_1)^2 + (x_2)^2 + \cdots + (x_n)^2}{n} - (\bar{x})^2$$

— **L'écart-type.** L'écart-type est la racine carré de la variance $\sigma = \sqrt{Var}$. Il mesure la dispersion de la série.

La statistique permet de faire de l'estimation. Dans une situation où la moyenne et l'écart-type d'une variable n'est pas connu et où la population est très grande, on sélectionne un échantillon de population, et on calcule la moyenne et l'écart-type de cet échantillon. Et on se sert de ces valeurs pour estimer la moyenne et l'écart-type de la variable sur tout la population.

Propriété.

Estimation Si une variable possède une moyenne m et un écart-type σ inconnus, alors

— La moyenne m est estimée par la moyenne $\bar{x}$ de l'échantillon, c'est à dire $m = \bar{x}$.
— L'écart-type σ de la population est estimé par $\sqrt{\frac{n}{n-1}}\sigma_e$, avec σ_e l'écart-type de l'échantillon. C'est à dire $\sigma = \sqrt{\frac{n}{n-1}}\sigma_e$

Remarque : Si par curiosité, vous allez voir un vrai livre de statistique, vous verrez qu'il y a dans ce cours un "raccourci" sur l'écart-type. Il y a des n et des $n-1$ à gérer.

Exercice 1

Déterminer la médiane des notes des deux groupes d'une classe à un devoir.
— Groupe A : 5, 6, 6,7,7,8,8, 10, 10, 10, 11, 12, 13, 14, 16, 18, 20
— Groupe B : 0, 1, 3, 4, 6, 8, 8 , 9, 10, 11, 11, 12, 13, 14, 14, 15

Exercice 2

Lors d'un examen, sur 80 copies corrigées, un correcteur a obtenu les notes suivantes, qu'il a réparti dans un tableau :

note	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	18
effectif	2	2	5	10	9	10	12	10	7	5	5	1	1	1

Calculer la moyenne $\bar{x}$ et l'écart type σ de la série.

Remarque : Un échantillon de note est dit "normal" si environ 30 % de ses notes sont hors de l'intervalle $[\bar{x} - \sigma; \bar{x} + \sigma]$ et 5% de ses notes en dehors de l'intervalle $[\bar{x} - 2\sigma; \bar{x} + 2\sigma]$. Cet échantillon de note est normal.

2 Dénombrement

2.1 L'essentiel sur les ensembles

On considère E un ensemble, et A, B des parties (ou sous-ensembles) de E. On rappelle que :

— L'union de A et B, notée $A \cup B$, est la partie de E dont les éléments sont dans A ou B. (ou dans les deux à la fois). On a $x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A$ ou $x \in B$.
— L'intersection de A et B, notée $A \cap B$, est la partie de E dont les éléments sont à la fois dans A et dans B. On a $x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A$ et $x \in B$.

— le complémentaire de A dans E, noté $E\backslash A$ (ou $\bar{A}$ ou $\mathcal{C}^E A$) par la partie de E dont les éléments n'appartiennent pas à A. On a $x \in E\backslash A \Leftrightarrow x \notin A$ et $x \in E$.

Définition 3.
Si E est un ensemble fini, le *cardinal* de E est le nombre d'élément de E. On le note $Card(E)$ ou $\#E$.

Propriété 4.
Si E et F sont des ensembles finis, alors $E \cup F$ et $E \cap F$ sont finis et on a

$$Card(E \cup F) = Card(E) + Card(F) - Card(E \cap F)$$

Si les ensembles E et F sont disjoints (c'est à dire $E \cap F = \emptyset$) , alors on a

$$Card(E \cup F) = Card(E) + Card(F)$$

Exemple. Dans une classe de 31 élèves, le cours d'allemand est suivi par 12 élèves et le cours d'anglais par 14 élèves. On sait qu'il y a 8 élèves qui étudient à la fois l'allemand et l'anglais. Combien y a-t-il d'élèves dans cette classe qui étudient l'une ou l'autre de ces deux langues ?

Propriété 5.
Soit E est un ensemble fini et A un sous-ensemble de E. Le cardinal du complémentaire $E\backslash A$ est donné par

$$Card(E\backslash A) = Card(E) - Card(A)$$

Exemple. Et combien d'élèves ne font ni anglais, ni allemand ?

Propriété 6.
Soient E et F deux ensembles finis, on rappelle que $E \times F = \{(e, f), e \in E, f \in F\}$ est le produit cartésien de E et F. On a

$$Card(E \times F) = Card(E) \times Card(F)$$

De même, si Si $E_1, \dots, E_p$ sont p ensembles finis, alors

$$Card(E_1 \times \cdots \times E_p) = Card(E_1) \times \cdots \times Card(E_p)$$

En particulier, si E est un ensemble fini, alors E^n est fini et

$$Card(E^n) = (Card(E))^n$$

Exemple. Une voiture est fabriquée suivant trois déclinaisons : berline, coupé, break, et elle est disponible en 5 couleurs distinctes. Combien de modèles distincts de voiture existe-t-il ?

2.2 Apprendre à compter

Soit un ensemble E contenant n éléments. On veut tirer p éléments dans cet ensemble E. On a plusieurs situations possibles : Est-ce que l'ordre dans lequel on tire les éléments compte ? Est-ce qu'on remet l'éléments qu'on a tiré en place avant de tirer de nouveau un élément ?

Avec ordre et avec remise : On tire les éléments p les uns après les autres, l'ordre dans lesquels on les tire a une importance, et à chaque tirage on remet l'élément tiré dans l'ensemble (on peut donc tirer plusieurs fois le même élément). Dans ce cas, le nombre de tirage est :

$$n^p = \underbrace{n}_{\substack{\text{nombre de choix}\\ \text{au 1-er tirage}}} \times \underbrace{n}_{\substack{\text{nombre de choix}\\ \text{au 2-ième tirage}}} \times \underbrace{\cdots}_{\cdots} \times \underbrace{n}_{\substack{\text{nombre}\\ \text{au p-ième tirage}}}$$

Exemple. Combien peut-on écrire de mots de trois lettres minuscules ? (qui ne sont pas nécessairement dans le dictionnaire).

Avec ordre et sans remise : On tire les p éléments les uns après les autres, l'ordre dans lesquels on les tire a une importance, et à chaque tirage on garde l'élément tiré (on ne peut pas tirer plusieurs fois le même élément). Dans ce cas, le nombre de tirage est :

$$\underbrace{n}_{\substack{\text{nombre de choix}\\ \text{au 1-er tirage}}} \times \underbrace{(n-1)}_{\substack{\text{nombre de choix}\\ \text{au 2-ième tirage}}} \times \underbrace{\cdots}_{\cdots} \times \underbrace{(n-p+1)}_{\substack{\text{nombre}\\ \times\text{au p-ième tirage}}}$$

$$= \frac{n!}{(n-p)!}$$

Note : Si on tire les n éléments avec ordre et sans remise, ça s'appelle une permutation. On obtient alors $n!$ tirages possibles.

Exemple. 8 athlètes disputent une course de 100 m. Combien y a-t-il de podiums distincts possibles ?

Sans ordre et sans remise : soit on tire les p éléments d'un seul coup. Soit on les tire les uns après les autres mais sans que l'ordre dans lesquels on les tire ne compte et en gardant l'élément tiré (on ne peut pas tirer plusieurs fois le même élément). Dans ce cas, le nombre de tirage est

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

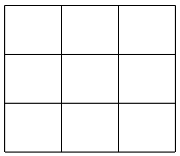
Exemple. On tire 5 jetons dans un sac qui contient 20 jetons numérotés de 1 à 20. Combien de poignée différentes de 5 jetons peut-on obtenir ?

2.3 Conseils pour les dénombrements

1. **Passer au complémentaire est parfois plus rapide :** pour compter les garçons dans la classe ATS, il est plus rapide de compter le nombre de filles et de le retrancher à l'effectif total.
2. **Le principe du "et"** Si le dénombrement d'un ensemble se décompose en une succession de p étapes offrant respectivement $n_1, \dots, n_p$ possiblités (où chaque nombre n_i ne dépend QUE de l'étape i), alors le nombre total de possibilités est $n_1 \times \cdots \times n_p$.

   Exemple. Une plaque d'immatriculation est constituée d'une succession de deux lettres, trois chiffres, deux lettres (les lettres I, O, U ne sont jamais utilisées). Combien existe-t-il de plaque différentes ?
3. **Découper pour mieux compter :** Quand on veut dénombrer un ensemble, on peut partitionner ("découper") celui-ci en plusieurs sous-ensembles disjoints plus facile à dénombrer. Le cardinal global est alors la somme des cardinaux de la partition faite.

   Exemple. Dénombrer le nombre de carré (de toutes tailles) dans le quadrillage

   Il y a 9 carrés de taille 1, 4 carré de taille 2 et 1 carré de taille 3. Donc au total 9+4+1= 14 carrés.
4. **Découper pour mieux compter (2) :** Lorsqu'un ensemble à dénombrer est défini par des expression « Au moins.... » ou « Au plus.... », il est plus simple de partitionner cet ensemble en sous-ensembles définis à par l'expression « Exactement... ». (N'oubliez pas le premier conseil au passage)

   Exemple. Dénombrer les mots de 5 lettres contenant au moins une fois la lettre A.
   - On peut dénombrer les mots qui contiennent exactement une fois A (5 choix pour la position de A, puis les 4 lettres restantes à choisir parmi 25 avec ordre et remise, donc 5×25^4), puis ceux qui contiennent exactement 2 fois A(choix de deux positions de A= 2 à choisir parmi 5 donc $\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!3!} = 10$, puis les 3 lettres restantes à choisir parmi 25 avec ordre et remise, donc 10×25^3), exactement 3 fois A ($\binom{5}{3} \times 25^2 = 10 \times 25^2$), exactement 4 fois A ($\binom{5}{4} \times 25^1 = 5 \times 25$), exactement 5 fois A (1 possibilité). Et on additionne les résultats : $5 \times 25^4 + 10 \times 25^3 + 10 \times 25^2 + 5 \times 25 + 1 = 2115751$.
   - On peut aussi passer au complémentaire : on compte les mots qui ne contiennent pas la lettre A (5 lettres à choisir parmi 25 avec ordre et avec remise, donc 25^5). Puis retirer ce nombre au nombre total de mots (5 lettres à choisir parmi 26 avec ordre et avec remise, donc 26^5) . Ce qui est plus rapide : $26^5 - 25^5 = 2115751$
5. **Avec ou sans ordre ?** On doit choisir p éléments parmi n, sans ordre et sans remise. Dans les faits, certes, on tire ces éléments un après l'autre... Mais on n'a pas intérêt à considérer l'ordre dans lesquels ces éléments sont tirés pour faire les calculs. On utilise alors les combinaisons, en regardant le résultat d'un tirage sans l'ordre d'obtention des éléments.

   Exemple. Combien de mains de 5 cartes peut-on obtenir à l'aide d'un jeu de 23 cartes ?

3 Probabilités sur un univers fini

3.1 Univers et événements

Définition 7.
L'ensemble des résultats d'une expérience aléatoire est appelé **univers des possibles**, on le note en général Ω.
Chaque sous-ensemble de Ω est appelé un événement. L'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ des parties de Ω est donc l'ensemble des événements.
Les événements élémentaires sont les singletons de Ω.

Dans cette section, on n'étudie que le cas où Ω est un ensemble fini.

Exemples.
- L'univers des résultats d'un jet de dé est $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. L'événement « obtenir un nombre pair » est le sous -ensemble $\{2, 4, 6\}$ de Ω. Les événements élémentaires ou singletons sont $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}$.
- L'univers des résultats d'un lancer de pièce est $\Omega = \{$ Pile, Face $\}$.
- Le premier jour de panne d'une machine depuis sa mise en route est $\Omega = \mathbb{N}^\star$. Ce n'est pas un ensemble fini.

Définition 8.

Si A et B sont deux événements

- L'événement $\Omega \backslash A$ se note $\overline{A}$ ou *non* A : c'est l'évènement contraire de A
- L'événement $A \cup B$ se lit « A ou B » : A se produit ou B se produit (non exclusif !).
- L'événement $A \cap B$ se lit « A et B » : A et B se produisent (en même temps).
- $A \backslash B = A \cap \overline{B}$: A se produit, mais pas B.

Exemple. Expérience du lancer de dé. On définit A= « le résultat est pair » $=\{2,4,6\}$ et B= « Le résultat est inférieur ou égal à 3 »$=\{1,2,3\}$.

- L'événement contraire de A est $\overline{A} = \{1,3,5\}$.
- L'événement »le résultat est pair ou inférieur ou égal à 3« est $A \cup B = \{1,2,3,4,6\}$. L'événement « le résultat est pair et inférieur ou égal à trois » est $A \cap B = \{2\}$.
- L'événement « le résultat est pair, mais pas inférieur ou égal à 3 » est $A \backslash B = \{4,6\}$.

Définition 9.

On dit que deux événements A et B sont **incompatibles** si $A \cap B = \emptyset$. les deux événements ne peuvent pas se réaliser en même temps à l'issue de l'expérience.
On dit que l'événement A implique l'événement B si $A \subset B$. Si A se produit, alors B se produit.

Exemple. Expérience du lancer de dé : l'événement A= « obtenir un nombre inférieur à 2 » implique B=« obtenir un nombre inférieur à 3 ».

Définition 10.

Une famille $A_1, \ldots, A_n$ d'événement de Ω est une partition (ou système complet d'événements) si et seulement si

1. Les A_i sont incompatibles deux à deux : $\forall i,j \in \{1,\ldots,n\}, i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$.
2. $A_1 \cup \cdots \cup A_n = \Omega$

3.2 Probabilités sur un univers fini

Définition 11.

Une probabilité sur un univers fini Ω est une application $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ telle que

1. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
2. Pour tous événements incompatibles A et B, $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

Equiprobabilité. Soit Ω un ensemble fini non vide. Pour toute partie A de Ω, on pose

$$\mathbb{P}(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

On a bien défini une probabilité, qui s'appelle l'équiprobabilité.
Chaque événement élémentaire a la même chance de se produire, à savoir $\frac{1}{Card(\Omega)}$.

Propriété 12.

Soient A et B deux événements.

1. $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$. En particulier $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.
2. $\mathbb{P}(B \backslash A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$. En particulier, si $A \subset B$, alors $\mathbb{P}(B \backslash A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$
3. Si A implique B, alors $\mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$.

Exemple. On lance un dé rouge et un dé vert. Quelle est la probabilité qu'au moins un des deux donne un résultat pair ?

Propriété.

Si un événement A se décompose $A = A_1 \cup \cdots \cup A_n$, avec $A_1, \cdots, A_n$ des événements deux à deux incompatibles, alors on a

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \cdots + \mathbb{P}(A_n)$$

Remarque :

- Si $\Omega = A_1 \cup \cdots \cup A_n$ (partition de Ω), alors $1 = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \cdots + \mathbb{P}(A_n)$.
- Si on décompose un événement A comme réunion d'événements élémentaires $\{a_1\}, \ldots \{a_n\}$, alors $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\{a_1\}) + \cdots + \mathbb{P}(\{a_n\})$

Exemple. Dans une classe où tous les élèves font une LV (anglais, allemand et espagnol). La probabilité qu'un élève fasse anglais est 1/5, celle qui fasse allemand est 3/10. Alors la probabilité qu'il fasse espagnol est 1-1/5-3/10= 1/2.

Propriété 14.

Si A et B sont deux événements, alors

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

3.3 Probabilités conditionnelles

Définition 15.

Soit E un événement de probabilité non nulle. Pour tout événement A, on appelle la probabilité de A sachant E le nombre, noté $\mathbb{P}(A|E)$ (ou $\mathbb{P}_E(A)$) défini par

$$\mathbb{P}(A|E) = \frac{\mathbb{P}(A \cap E)}{\mathbb{P}(E)}$$

Remarque : On a par conséquent des formules pour l'intersection : $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)$ et $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)$

Exemple. A la naissance d'un enfant, on suppose qu'il y a autant de chance qu'un garçon ou qu'une fille naisse. Vous rencontrez un ami. Vous savez qu'il a deux enfants, sans vous souvenir si ce sont des garçons ou des filles ou les deux. Votre ami est accompagné d'une fille. Quelle est la probabilité qu'il ait deux filles ?

L'univers est $\Omega = \{(F,F),(F,G),(G,F),(G,G)\}$ où la première lettre identifie le sexe du premier enfant et la deuxième du second enfant. La probabilité est l'équiprobabilité. On note A= « L'ami a deux filles » et E= « l'ami a au moins une fille ». On constate que $A \subset E$, donc $A \cap E = A$. La probabilité qu'on cherche est $\mathbb{P}(A|E)$.

$$\mathbb{P}(A|E) = \frac{\mathbb{P}(A \cap E)}{\mathbb{P}(E)} = \frac{\mathbb{P}(\{(F,F)\})}{\mathbb{P}(\{(F,F),(F,G),(G,F)\}} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}$$

Propriété 16.

La fonction $\mathbb{P}_E : A \to \mathbb{P}(A|E)$ est une probabilité à part entière sur Ω. En particulier, pour tout événements A et B, on a

1. $\mathbb{P}(\overline{A}|E) = 1 - \mathbb{P}(A|E)$
2. $\mathbb{P}(B \backslash A|E) = \mathbb{P}(B|E) - \mathbb{P}(A \cap B|E)$
3. $\mathbb{P}(A \cup B|E) = \mathbb{P}(A|E) + \mathbb{P}(B|E) - \mathbb{P}(A \cap B|E)$

Propriété 17.

Si des événements $E_1, \dots, E_n$ forment une partition (ou système complet d'événements) et si A est un événement, on a

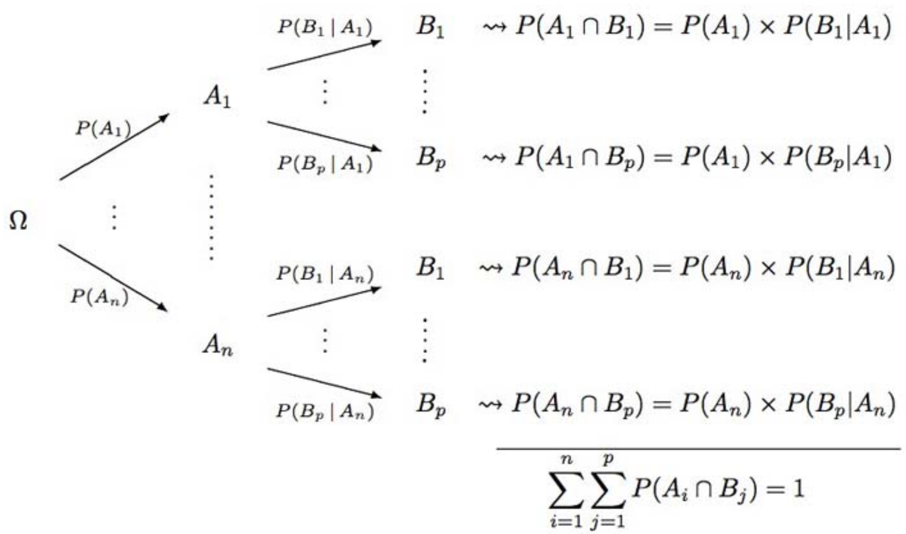
$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap E_1) + \mathbb{P}(A \cap E_2) + \cdots \mathbb{P}(A \cap E_n)$$

On en déduit la formule des probabilités totales : $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|E_1)\mathbb{P}(E_1) + \cdots + \mathbb{P}(A|E_n)\mathbb{P}(E_n)$. Les événements E_i représentent les différentes causes possibles qui peuvent engendrer A.

Pour manipuler les probabilités conditionnelles et les situation où certains critères dépendent l'un de l'autre, on peut utiliser l'arbre de probabilités, qui présente visuellement les formules précédentes.

Construction d'un arbre de probabilité

On donne deux partitions : $A_1, \dots, A_n$ ("premier critère" ou "cause") et $B_1, \dots, B_p$ ("deuxième critère" ou "conséquence") dont on ne connait les probabilités que sachant déjà les A_i. On peut alors construire l'arbre suivant :



Les probabilités sur les flèches sont appelées probabilité de transition.

Règles de calcul des arbres

- la somme des probabilités des flèches partant d'un même noeud (point) vaut 1.
- La probabilité à l'extrémité d'une branche est le produit des flèches y menant, et ça correspond à l'intersection des événements A_i et B_j.

Cet arbre permet de calculer :

— les probabilités de toutes les intersections possibles.

— la probabilité d'un événement B_j, en sommant toutes les probabilités contenant B_j qui sont à l'extrémité de l'arbre.

Exemple. (exo) Monsieur Z. vient au lycée en train une fois sur deux en moyenne, en voiture deux fois sur cinq et en bus dans les autres cas. Lorsqu'il vient en train, il y a une probabilité de 0,1 qu'il soit en retard. Lorsqu'il vient en voiture, il y a une probabilité de 0,2 qu'il soit en retard. Lorsqu'il vient en bus, il y a une probabilité de 0,6 qu'il soit en retard.

1. Construire l'arbre de probabilité. On notera T l'événement « Monsieur Z vient en train », V l'événement « Monsieur Z vient en voiture », B l'événement « Monsieur Z vient en bus », R l'événement « Monsieur Z est en retard ».
2. Déterminer la probabilité que Monsieur Z soit venu en bus et soit en retard.
3. Déterminer la probabilité que Monsieur Z soit en retard.
4. Aujourd'hui, monsieur Z. est en retard. Quelle est la probabilité qu'il soit venu en bus ?

3.4 Indépendance

Dans le vocabulaire courant, dire que deux événements sont indépendants signifie qu'ils n'ont pas de liens entre eux. On parle *d'indépendance physique*. Mais en mathématiques, l'indépendance a un sens différent.

Définition 18.

Soient A, B deux événements. On dit que les événements A et B sont indépendants si et et seulement si ils vérifient

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

Remarque :

1. En conséquence, on a $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$ et $\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B)$. La réalisation de l'un ne change pas la probabilité que l'autre se réalise.
2. Si A et B sont indépendants, alors A et $\overline{B}$ sont indépendants et $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.
3. Si des événements sont physiquement indépendants, alors ils sont mathématiquement indépendants. Mais la réciproque est fausse.

Exemple. On lance indépendamment deux dés à 6 faces, un rouge et un vert. On considère A= « le dé vert affiche 1 », B= « Le dé rouge affiche 2 » et C=« les deux dés affichent le même nombre ». Montrer que A, B et C sont deux à deux indépendants.

4 Variable aléatoire réelle

Définition 19.

Soit Ω l'univers des possibles. On appelle variable aléatoire réelle sur Ω toute application de Ω dans $\mathbb{R}$. C'est une valeur qui dépend du résultat de l'expérience aléatoire.
On notera $(X \in A)$, ou $(X = a)$ des événements concernant la valeur de X. Ces événements dépendent de l'expérience aléatoire, mais cette expérience aléatoire n'apparait plus dans la notation de X.

Exemple. (fil rouge) Un joueur lance deux fois de suite la même pièce de monnaie. A chaque lancer, si obtient pile, il gagne 1 euros et s'il obtient face, il perd 2 euros. L'univers est $\Omega = \{P, F\}^2$. Notons X la variable aléatoire égale au gain (algébrique) du joueur. On a $X(P, P) = 2$, $X(P, F) = -1, X(F, P) = -1$ et $X(F, F) = -4$, donc $X(\Omega) = \{-4, -1, 2\}$.

4.1 Variable aléatoire finie

Définition 20.

Dans le cas où X prend un nombre dénombrable de valeur, c'est une variable aléatoire finie. Connaître les valeurs a prises par X et la probabilité $\mathbb{P}(X = a)$ de prendre ces valeurs, c'est ce qu'on appelle la **loi** de la variable aléatoire X.
On peut expliciter cette loi par un tableau, une liste de cas ou par des formules permettant de calculer $\mathbb{P}(X = a)$ pour tout a.

Exemple. $(X = -1)$ est un l'événement correspondant à $\{(P, F), (F, P)\}$ dans l'expérience aléatoire. La probabilité de cet événement est alors $\mathbb{P}(X = -1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$. Et on fait de même pour les autres valeurs prises par X. On obtient alors la loi de X :

a	-4	-1	2
$\mathbb{P}(X = a)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

4.2 Espérance, Variance et écart-type d'une variable aléatoire finie

Soit X une variable aléatoire réelle telle que $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$.

Définition 21.

On appelle espérance de X le nombre réel $E(X)$ défini par

$$E(X) = \sum_{k=1} x_k \mathbb{P}(X = x_k) = x_1\mathbb{P}(X = x_1)+x_2\mathbb{P}(X = x_2)+\cdots+x_n\mathbb{P}(X = x_n)$$

L'espérance de X correspond à la valeur moyenne prise par X. Une variable aléatoire d'espérance nulle est dite centrée.

On note que l'espérance ne dépend que de la loi de X, et pas de X directement. Deux variables différentes, mais ayant même loi auront donc la même espérance.

Exemple. L'espérance de gain X est

$$E(X) = -4 \times \frac{1}{4} + (-1) \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} = -1$$

Propriété.

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles finies.

1. $\forall a, b \in \mathbb{R}, E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$ (linéarité)
2. Si $a \leqslant X \leqslant b$, alors $a \leqslant E(X) \leqslant b$. En particulier, si X est positive, alors son espérance aussi.
3. Si $X \leqslant Y$, alors $E(X) \leqslant E(Y)$ (croissance)

Propriété 23.

Espérance d'une composée. Pour toute fonction $g : X(\Omega) \to \mathbb{R}$, l'espérance de la variable aléatoire $g(X)$ est

$$E(g(X)) = \sum_{k=1} g(x_k)\mathbb{P}(X = x_k)$$

$$= g(x_1)\mathbb{P}(X = x_1) + g(x_2)\mathbb{P}(X = x_2) + \cdots + x_n\mathbb{P}(X = x_n)$$

Définition 24.

On appelle variance de X le nombre réel $V(X)$ défini par

$$V(X) = E((X - E(X))^2) = E(X^2) - E(X)^2$$

Une variable aléatoire est dite réduite si et seulement si sa variance vaut 1

La variance mesure la dispersion de X par rapport à $E(X)$. On utilise le plus souvent la deuxième formule pour la calculer.

Exemple. On a déjà $E(X) = -1$, calculons $E(X^2)$ (par la formule de la composée)

$$E(X^2) = (-4)^2 \times \frac{1}{4} + (-1)^2 \times \frac{1}{2} + 2^2 \times \frac{1}{4} = \frac{11}{2} \Rightarrow V(X) = \frac{11}{2} - 1 = \frac{9}{2}$$

Propriété.

1. $\forall a, b \in \mathbb{R}, V(aX + b) = a^2V(X)$. En particulier, si $a = 1$, on remarque que la variance ne change pas quand on décale d'une constante b une variable aléatoire
2. $V(X) \geqslant 0$

Attention, la variance n'est pas linéaire ! ! En général $V(X + Y) \neq V(X) + V(Y)$.

Définition 26.

On appelle écart type de X le nombre $\sigma(X)$ défini par $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$. L'écart type mesure aussi la dispersion de X par rapport à l'espérance, mais a l'avantage d'être homogène par rapport aux valeurs de X.

Propriété.

Si X est d'espérance m et d'écart-type $\sigma \neq 0$, alors la variable aléatoire $\tilde{X} = \frac{X-m}{\sigma}$ est centrée réduite. De plus, on a pour tout $\epsilon > 0$,

$$\mathbb{P}(|X - m| \geqslant \epsilon) \leqslant \frac{\sigma^2}{\epsilon^2} \quad \text{(Inégalité de Bienaymé-Tchebychev)}$$

4.3 Lois usuelles finies

Définition 28.

X suit une loi uniforme sur un ensemble $\{x_1, \ldots, x_n\}$ si $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ et si les événements $(X = x_i)$, $i = 1, \ldots, n$ sont équiprobables, de même probabilité $\frac{1}{n}$.

Exemple. Si X suit une loi uniforme sur $\{1, \ldots, n\}$, alors $E(X) = \frac{n+1}{2}$ et $V(X) = \frac{n^2-1}{12}$.

Définition 29.

X suit une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ de paramètre $p \in [0,1]$ quand $X(\Omega) = \{0,1\}$,

$$\mathbb{P}(X=1) = p, \qquad \mathbb{P}(X=0) = 1-p$$

Cette loi représente une expérience aléatoire qui n'a que deux issues possibles : succès $(X=1)$ et échec $(X=0)$.
On a alors $E(X) = p$ et $V(X) = p(1-p)$.

Définition 30.

On fait une suite de n expériences identiques et indépendantes. Le succès ayant à chaque fois la probabilité p de se produire. On compte X le nombre de succès pendant mes n expériences. Alors X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ de paramètres $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [0,1]$. Les valeurs prises par X sont $0, 1, \dots, n$. La probabilité que X vaille k (c'est-à-dire qu'il y a eu k succès pendant mes expériences) est :

$$\mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

On a alors $E(X) = np$ et $V(X) = np(1-p)$.

Exemple. Tirage *successifs* de n boules avec remise dans une urne contenant des boules noires et des boules blanches. On compte le nombre de boules blanche. Ce nombre suit une loi binomiale.

Exercice 3

On considère X une variable aléatoire suivant une loi $\mathcal{B}(6, \frac{1}{4})$. Calculer la probabilité des événements suivants : "X vaut 4" ; "X est supérieur à 5" ; "X est inférieur strictement à 2" ; "X est supérieur à 1".

4.4 Variables aléatoires indépendantes

Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires définies sur un même univers Ω. On note :

$$(X_1 = x_1) \cap \cdots \cap (X_n = x_n) = (X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n)$$

Définition 31.

On dit que X et Y sont indépendants si pour tout $(x,y) \in (X(\Omega) \times Y(\Omega))$, on a

$$\mathbb{P}(X=x, Y=y) = \mathbb{P}(X=x) \times \mathbb{P}(Y=y)$$

On dit que $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes si pour tout $x_i \in X_i(\Omega), i = 1, \dots, n$, on a

$$\mathbb{P}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = \mathbb{P}(X_1 = x_1) \times \cdots \times \mathbb{P}(X_n = x_n)$$

Propriété 32.

1. Si X et Y sont indépendantes, alors $E(XY) = E(X)E(Y)$ et $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$
2. Si $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes , alors

$$E(X_1 \times \cdots \times X_n) = E(X_1) \times \cdots \times E(X_n),$$

$$V(X_1 + \cdots + X_n) = V(X_1) + \cdots + V(X_n)$$

Propriété.

Si les $X_1, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant toute la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$, alors $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$.

4.5 Variable aléatoire continue

Quand une variable prend un nombre de valeurs qu'on peut compter, on dit qu'elle est discrète. Quand une variable peut prendre toutes les valeurs dans un intervalle, on dit qu'elle est continue. L'exemple principal et fondamental de ce type de loi est la loi normale.

Définition 34.

La loi d'une variable aléatoire continue X est donnée par sa fonction de répartition ou sa densité.

- F la fonction de répartition est la fonction telle que, pour tout nombre réel a, le nombre $F(a)$ est la probabilité que X soit inférieure ou égale à a : $F(a) = \mathbb{P}(X \leqslant a)$.
- f la densité est la dérivée (si elle existe) de la fonction de répartition F. Ainsi, $F(a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx$

Exemple.

Propriété 35.

Soit X variable aléatoire continue de densité f et de fonction de répartition F.

- F est une fonction croissante, elle a pour limite 0 en $-\infty$ et 1 en $+\infty$
- une fonction f est une densité $\Leftrightarrow f \geqslant 0$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.
- F est l'aire sous la courbe de la densité.

Remarque : : Pour les variables aléatoires continues, on a $\mathbb{P}(X = a) = 0$ pour tout a. Donc $P(X \leqslant a) = P(X < a)$.

Par contre, on peut calculer la probabilité que X soit dans un certain intervalle.

Propriété 36.

Soit X variable aléatoire continue de densité f et de fonction de répartition F.

$$\mathbb{P}(X \leqslant a) = F(a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx$$

$$\mathbb{P}(X \geqslant a) = 1 - \mathbb{P}(X \leqslant a) = 1 - F(a) = 1 - \int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \int_{a}^{+\infty} f(x)dx$$

$$\mathbb{P}(a \leqslant X \leqslant b) = F(b) - F(a) = \int_{a}^{b} f(x)dx, \text{ si } a < b$$

Exemple.

Propriété 37.

Soit X variable aléatoire continue de densité f. Alors l'espérance et la variance de X se calculent par :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx, \quad Var(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - (E(X))^2$$

Exemple.

4.6 La loi Normale

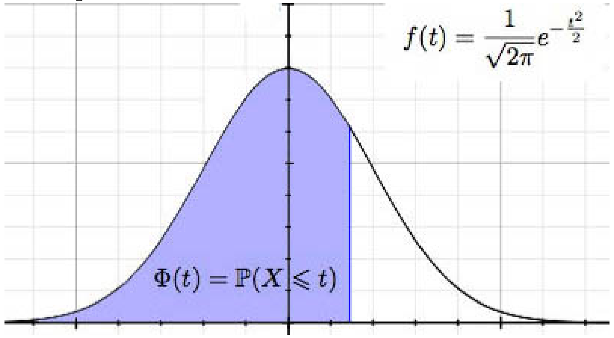
Définition 38.

Une variable aléatoire X suit la loi normale , notée $\mathcal{N}(m;\sigma)$, (ou loi de Laplace-Gauss, ou Gaussienne) de moyenne m et d'écart type σ si sa densité de probabilité est

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}$$

Si $m = 0$ et $\sigma = 1$, alors on dit que la loi normale est centrée réduite.

Exemple. Soit X variable aléatoire de loi normale centrée réduite ($m = 0$ et $\sigma = 1$). Le graphe de sa densité est une courbe en cloche appelée courbe de Gauss. Sa fonction de répartition est notée Φ (ou Π), on rappelle que $\Phi(t) = \mathbb{P}(X \leqslant t)$. Ce sont les valeurs de Φ qu'on a dans les formulaires.



Si on connait $\mathbb{P}(X \leqslant t)$ avec t positif, on peut déduire d'autres valeurs de la fonction de répartition par les règles de calculs suivantes :

- Pour les nombres négatifs : on a $\mathbb{P}(X \leqslant -t) = 1 - \mathbb{P}(X \leqslant t)$.
- Pour les supérieurs : $\mathbb{P}(X \geqslant t) = 1 - \mathbb{P}(X \leqslant t)$
- Et les encadrements $\mathbb{P}(a \leqslant X \leqslant b) = \mathbb{P}(X \leqslant b) - \mathbb{P}(X \leqslant a)$.

Théorème 39.

Si Y est une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(m,\sigma)$, alors $T = \frac{Y-m}{\sigma}$ suit une loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$.

Il suffit de retirer m et de diviser par σ dans toutes les égalités/inégalités et on se ramène à la loi centrée réduite !

Remarque : Quand vous ferez le cours sur la réglementation et la sécurité en Béton armé, le tableau de la loi Normale donné n'est pas celui de $\mathbb{P}(X \leqslant t)$. Ce sont les valeurs de $\mathbb{P}(X \leqslant t) - 0,5$.

Fiche d'exercices XXIII : Probabilités et statistiques

Exercice 1

($\star$) Dans une classe de 25 élèves, 16 sont des garçons. Il y a 20 élèves qui étudient l'anglais et parmi eux 13 garçons.

1. Combien y a-t-il de filles ?
2. Combien y a-t-il de garçons qui n'étudient pas l'anglais ?
3. Combien y a-t-il de filles qui n'étudient pas l'anglais ?

Exercice 2

($\star\star$) Dans un lot de 20 pièces fabriquées, il y en a 4 de mauvaises. Dans le lot, on prélève au hasard 4 pièces simultanément.

1. Combien de prélèvements différents peut-on obtenir ?
2. Quel est le nombre de prélèvements où :
   (a) Les quatre pièces sont bonnes ?
   (b) Au moins une pièce est mauvaise ?
   (c) Une seule pièce est mauvaise ?
   (d) deux pièces au moins sont mauvaises ?

Exercice 3

($\star\star$) On interroge au hasard 50 enfants pratiquant un sport. 25 enfants pratiquent le football, 22 le tennis et 16 le basket-ball. 7 pratiquent le football et le tennis, 5 pratiquent le basket et le football, et 2 pratiquent les trois sports. On appelle un de ces enfants au hasard. Quelle est la probabilité qu'il pratique

1. Le football ?
2. Le tennis ?
3. Le football et le tennis ?
4. le football ou le tennis ?

Exercice 4

($\star\star$) On permute au hasard les n tomes d'une encyclopédie. Quelle est la probabilité p que les tomes 1 et 2 se retrouvent côte à côte dans cet ordre ?

Exercice 5

($\star\star$) Dans une ville, il y a 45% de fumeurs et 35% de personnes atteintes de bronchites. On sait de plus que, parmi les bronchiteux, 65% sont des fumeurs.

— Calculer la probabilité qu'une personne prise au hasard soit un fumeur bronchiteux.

— On choisit un fumeur au hasard, quelle est la probabilité qu'il soit bronchiteux ?

Consigne : ne pas utiliser d'arbre !

Exercice 6

($\star\star$) Une urne contient 16 boules : 8 blanches, 5 noires et 3 rouges. On tire, sans remise, 3 boules dans l'urne. On suppose l'équiprobabilité des tirages. Soit X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe +1 si les trois boules sont de couleurs différentes et -1 dans tous les autres cas. Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.

Exercice 7

($\star\star$) On dispose de 12 jetons numérotés de 1 à 12. On appelle "main" quatre jetons de numéros distincts tirés sans remise dans les 12 jetons, sans tenir compte de l'ordre. Déterminer.

1. Le nombre total de mains.
2. Le nombre de mains ne comportant que des numéros pairs
3. Le nombre de mains comportant trois numéros pairs et un numéro impair
4. Le nombre de mains comportant quatre numéros consécutifs
5. Le nombre de mains comportant 4 numéros dont seulement 3 sont consécutifs.

Exercice 8

($\star\star$) Alice et Bruno sont les seuls candidats à un examen. La probabilité de la réussite d'Alice est de 90% et celle de Bruno est de 60%. Leurs réussites sont indépendantes. On appelle X la variable aléatoire donnant le nombre total de réussite à un examen. X vaut 0 si les deux échoue, 1 si un seul réussit et 2 si tous les deux réussissent. Déterminer :

1. La probabilité d'avoir $X = 0$
2. La probabilité d'avoir $X = 2$
3. La probabilité d'avoir $X = 1$
4. La probabilité qu'Alice ait réussi sachant que $X = 1$
5. La probabilité que $X = 1$ sachant qu'Alice a réussi

Exercice 9

($\star\star$) Une chaine de production fabrique des pièces mécanique dont 80% sont bonnes (notation B) et 20% défectueuses (notation $\bar{B}$). Un teste de contrôle rapide à la sortie de la chaine permet d'accepter ou refuser chaque pièce mais celui-ci est aléatoire. On note A : « La pièce est acceptée » et $\bar{A}$: « la pièce n'est pas acceptée ». On observe que si la pièce est bonne, elle est acceptée avec une probabilité de 90%. Si la pièce est défectueuse, elle n'est pas acceptée avec une probabilité de 85%. Calculer :

1. $\mathbb{P}(A \cap B)$
2. $\mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{B})$
3. $\mathbb{P}(A)$
4. La probabilité que la pièce soit bonne sachant qu'elle est acceptée.
5. La probabilité que la pièce soit défectueuse sachant qu'elle n'est pas acceptée.

Exercice 10

($\star\star$) Une entreprise fabrique en grande quantité des tiges métalliques pour l'industrie. Leur longueur et leur diamètre sont exprimés en millimètres. Dans un lot de tiges, 3% des tiges ne sont pas conformes pour la longueur. On prélève au hasard 50 tiges de ce lot pour vérification. Le lot est suffisamment important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 50 tiges. On considère la variable aléatoire Y qui, à tout prélèvement de 50 tiges, associe le nombre de tiges non conformes pour la longueur.

1. Quelle loi suit la variable aléatoire ?
2. Calculer la probabilité que, dans un prélèvement, deux tiges ne soient pas conformes pour la longueur.
3. Calculer la probabilité que, dans un prélèvement, au plus deux tiges ne soient pas conformes pour la longueur.

On ne cherchera pas les valeurs approchées.

Exercice 11

($\star\star$) Sur une ligne d'autobus, si on est contrôlé sans avoir de ticket, l'amende coûte 150 euros. La probabilité d'être contrôlé un certain jour est de $\frac{1}{10}$. Le fait d'être contrôlé un jour est indépendant du fait de l'être un autre jour. Déterminer :

1. La probabilité d'être contrôlé tous les jours pendant 5 jours consécutifs
2. La probabilité d'être contrôlé exactement une fois pendant 5 jours consécutifs
3. Le montant moyen par jour des amendes infligées à un fraudeur, qui n'achète jamais de ticket.
4. Le nombre moyen de contrôle d'un passager sur 80 jours consécutifs.
5. la probabilité de ne jamais être contrôlé sur 80 jours consécutifs.

Exercice 12

($\star\star$) Une usine fabrique des ampoules électriques. la durée de fonctionnement exprimée en année d'une ampoule électrique est une variable aléatoire T de densité f avec $f(t) = 2e^{-2t}$ pour $t \geqslant 0$ et $f(t) = 0$ pour $t < 0$ (loi exponentielle). Déterminer

1. La durée de vie moyenne d'une ampoule électrique
2. L'écart type de la durée de vie d'une ampoule électrique
3. La probabilité qu'une ampoule électrique dure plus d'un an
4. La probabilité qu'une ampoule électrique dure plus de 4 ans.
5. La probabilité qu'une ampoule dure plus de 2 ans sachant qu'elle a déjà fonctionné 1 an.

Exercice 13

($\star\star$) Soit variable aléatoire X suivant la loi normale $\mathcal{N}(24; 6,5)$. Calculer :

1. $\mathbb{P}(X \geqslant 27)$
2. $\mathbb{P}(X \geqslant 10)$
3. $\mathbb{P}(18 \leqslant X \leqslant 20)$
4. $\mathbb{P}(|X| \geqslant 20)$.

On donne les valeurs suivantes (approchées) pour T suivant la loi normale centrée réduite : $\mathbb{P}(T \leqslant 0,46) = 0,68$, $\mathbb{P}(T \leqslant 2,15) = 0,98$, $\mathbb{P}(T \leqslant 0,61) = 0,73$ et $\mathbb{P}(T \leqslant 0,92) = 0,82$ et $\mathbb{P}(T \leqslant 6,76) = 1$.

Exercice 14

($\star\star\star$) Des circuits électriques sont fabriqués en série. On constate que leur résistance X en Ohm suit une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma)$ qu'on cherche à déterminer. On constate que la probabilité d'avoir un circuit de résistance supérieure à 125Ω est $\mathbb{P}(X > 125) = 2,3\%$ et que la probabilité d'avoir un circuit de résistance inférieure à 80Ω est $\mathbb{P}(X \leqslant 80) = 15,9\%$.
On donne pour Y suivant une loi normale centrée réduite les résultats suivants $\mathbb{P}(Y \leqslant 1) = 84,1\%$ et $\mathbb{P}(Y \leqslant 2) = 97,7\%$.

1. Montrer que $\mathbb{P}\left(\frac{X-m}{\sigma} \leqslant 125\right) = 97,7\%$ et en déduire que $m + 2\sigma = 125$.
2. Montrer que $\mathbb{P}\left(\frac{X-m}{\sigma} \leqslant \frac{80-m}{\sigma}\right) = 15,9\%$ et en déduire que $m - \sigma = 80$.
3. Déterminer les valeurs de m et σ

Soit une série statistique x_1, x_2, x_3, ..., x_n classée dans l'ordre croissant. Comment trouver sa médiane ?	Si la liste contient un nombre impaire de valeur, La médiane est la valeur "milieu", c'est à dire la valeur numero $\frac{n+1}{2}$. Si la liste contient un nombre paire de valeur, la médiane est la moyenne des deux valeurs milieu, c'est à dire la moyenne des valeurs numéro $\frac{n}{2}$ et $\frac{n}{2}+1$.
Soit une série statistique x_1, x_2, x_3, ..., x_n. comment trouver sa moyenne ?	$\bar{x} = \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$
Soit une série statistique x_1, x_2, x_3, ..., x_n de moyenne $\bar{x}$. Comment trouver sa variance et son écart-type ?	Variance $Var = \frac{(x_1)^2+(x_2)^2+\cdots+(x_n)^2}{n} - (\bar{x})^2$ Ecart-type $\sigma = \sqrt{Var}$.
Le cardinal d'un ensemble E est...	le nombre d'élément dans l'ensemble et il se note $Card(E)$ ou $\#E$
$Card(E \cup F) =$	$Card(E) + Card(F) - Card(E \cap F)$
Dire que E et F son disjoint signifie que ...	$E \cap F = \emptyset$
$Card(E \backslash A) =$	$Card(E) - Card(A)$
$Card(E \times F) =$	$Card(E) \times Card(F)$
On tire p élément dans un ensemble de n éléments, avec ordre et avec remise. Combien de tirages différents possible ?	n^p
On tire p élément dans un ensemble de n éléments, avec ordre et sans remise. Combien de tirages différents possible ?	$\frac{n!}{(n-p)!}$

On tire p élément dans un ensemble de n éléments, sans ordre et sans remise (Ou alors les p éléments tirés d'un seul coup) Combien de tirages différents possible ?	$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$
L'événement $A \cup B$ se produit quand....	A se produit ou B se produit (non exclusif !)
L'événement $A \cap B$ se produit quand....	A se produit et B se produit (en même temps).
L'événement $A \backslash B$ se produit quand....	A se produit, mais pas B.
L'événement $\overline{A}$ se produit quand....	A ne se produit pas.
Si P est une probabilité, alors la probabilité de l'univers total vaut....	1
Si P est une probabilité, $P(\overline{A}) =$ ...	$1 - P(A)$
Si P est une probabilité, $P(A \cup B) =$	$P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
la probabilité de A sachant E est ...	$P(A\|E) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)}$
Si des événements $E_1, \ldots, E_n$ forment une partition, alors la formule des probabilités totales est $P(A) =$ ...	$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A\|E_1)\mathbb{P}(E_1) + \cdots + \mathbb{P}(A\|E_n)\mathbb{P}(E_n)$

Donner la méthode et les deux règles pour construire un arbre de probabilité avec deux critères : un premier critère A et un deuxième critère B qu'on ne connait que par rapport à A.	On commence par prévoir une branche par cas possible pour A, avec la probabilité de chaque cas sur la branche. Puis au bout de chaque branche de A, on met une branche par cas possible de B avec les probabilité. avec les règles : la somme des probabilités des flèches partant d'un même noeud (point) vaut 1. l'extrémité d'une branche, l'évènement est l'intersection des branches y menant et la probabilité le produit est le produit des branches.
A et B sont indépendants signifie que...	$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$
Qu'est-ce qu'une variable aléatoire X et sa loi sur un univers fini ?	X est une valeur qui dépend du résultat d'une expérience aléatoire, sa loi correspond aux valeur a que peut prendre X et à la probabilité de chaque valeur.
Soit X une variable aléatoire finie prenant les valeurs $x_1, \dots, x_n$, quelle est l'espérance de X et ça représente quoi ?	$E(X) = x_1\mathbb{P}(X = x_1) + x_2\mathbb{P}(X = x_2) + \dots + x_n\mathbb{P}(X = x_n)$ représente la moyenne de X.
Soit X une variable aléatoire finie prenant les valeurs $x_1, \dots, x_n$, et g une fonction. $E(g(X)) = ...$	$g(x_1)\mathbb{P}(X = x_1) + g(x_2)\mathbb{P}(X = x_2) + \dots + x_n\mathbb{P}(X = x_n)$
Soit X une variable aléatoire finie prenant les valeurs $x_1, \dots, x_n$, la variance et l'écart-type de X sont ... ?	$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$ et $\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}$
Dire que X prenant les valeurs $x_1, \dots, x_n$ suit une loi équiprobable signifie	$P(X = x_1) = P(X = x_2) = \dots = \frac{1}{n}$.

X suit une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ signifie que ...	X n'a que deux issues possibles : succès $(X = 1)$ avec probabilité p et échec $(X = 0)$ avec probabilité $1 - p$
On fait une suite de n expériences identiques et indépendantes. Le succès ayant à chaque fois la probabilité p de se produire. On compte X le nombre de succès pendant mes n expériences. Quelle est la loi de X ?	X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ avec $\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k}p^k(1 - p)^{n-k}$ pour $k = 0, 1, \dots .n$.
Si X et Y sont des variables aléatoires indépendantes, alors $P(X = x, Y = y) =$?	$P(X = x) \times P(Y = y)$.
Si X et Y sont des variables aléatoires indépendantes, alors $E(XY) =$	$E(XY) = E(X)E(Y)$
Si la loi d'une variable aléatoire continue X est donnée par sa fonction de répartition F, à quoi correspond $F(a)$?	$F(a) = \mathbb{P}(X \leqslant a)$
Si une variable aléatoire continue X a une fonction de répartition F et une densité f. Quelle est le lien entre F et f ? $F(a)$ se calcule comment à partir de f ?	$F' = f$ et $F(a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx$ ($F(a)$ est l'aire sous la courbe de f de $-\infty$ à a.)
Soit X variable aléatoire continue de densité f et de fonction de répartition F, alors $P(X \leqslant a) =$?	$= F(a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx$
Soit X variable aléatoire continue de densité f et de fonction de répartition F, $P(X \geqslant a) = ...$?	$= 1 - \mathbb{P}(X \leqslant a) = \int_{a}^{+\infty} f(x)dx$

X variable aléatoire continue de densité f, l'espérance et la variance de X sont...	$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx,$$ $$Var(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - (E(X))^2$$
Si X a pour densité $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}$, alors la loi de X s'appelle comment ?	la loi normale, notée $\mathcal{N}(m;\sigma)$, de moyenne m et d'écart-type σ.
La loi normale est dite centrée réduite quand....	sa moyenne est 0 et son écart-type 1.
Soit X variable aléatoire de loi normale centrée réduite et de fonction de répartition Φ. $P(X \leqslant t) = ?$	$P(X \leqslant t) = \Phi(t)$
Soit X variable aléatoire de loi normale centrée réduite et de fonction de répartition Φ. $P(X \leqslant -t) = ?$	$1 - \mathbb{P}(X \leqslant t) = 1 - \Phi(t)$
Soit X variable aléatoire de loi normale centrée réduite et de fonction de répartition Φ. $P(X \geqslant t) = ?$	$= 1 - \mathbb{P}(X \leqslant t) = 1 - \Phi(t)$
Soit X variable aléatoire de loi normale centrée réduite et de fonction de répartition Φ. $P(a \leqslant X \leqslant b) = ?$	$\mathbb{P}(X \leqslant b) - \mathbb{P}(X \leqslant a)$
Si Y est une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(m,\sigma)$, alors $T = \frac{Y-m}{\sigma}$ suit quelle loi ?	loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$.