22. Suites réelles (et complexes)

1 Généralités sur les suites

1.1 Définitions

Définition.
On appelle suite numérique toute famille $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels indexée par $\mathbb{N}$, c'est-à-dire toute application u définie sur $\mathbb{N}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) :

$$\begin{array}{rcl} u : \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \to & u(n) = u_n \end{array}$$

On note la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou même $u = (u_n)$ lorsqu'il n'y a pas ambiguïté. L'ensemble des suites réelles est noté $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Celui des suites complexes est noté $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

On peut représenter une suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ sur un graphe, par une suite de points isolés.

Remarque :

1. Une suite numérique de terme général u_n peut aussi être indexée par les nombres entiers naturels supérieurs à un entier n_0. Une telle suite est notée $(u_n)_{n\geqslant n_0}$. L'étude d'une telle suite est identique à celle d'une suite indexée par $\mathbb{N}$.
2. Attention à ne pas confondre $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite (en entier) et u_n UN terme de la suite.

Exemples.

— Suite définie terme par terme :$u_0 = 1,\ u_1 = 1,5,\ u_2 = 0,4,\ u_3 = 0,\ u_4 = 1,\ u_5 = 0,6...$ mais il faut alors définir une infinité de termes !
— Suite définie par une formule dépendant de n : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = n^2 - 2$. On peut alors calculer tous les termes indépendamment : $u_{10} = (10)^2 - 2 = 98$.
— Suite définie par récurrence : le terme $n+1$ se calcule à l'aide des termes précédents. $u_0 = 1,\ u_{n+1} = 2u_n - 1$. Si on veut un terme de la suite, on doit alors calculer tous les termes qui précédent !

Définition 2.
Une suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite constante s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \alpha$ ou, ce qui est équivalent, si elle vérifie

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n.$$

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire si elle est constante au delà d'un certain rang, c'est-à-dire lorsqu'elle vérifie :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, u_{n+1} = u_n.$$

Exemple. La suite $\left(\lfloor \frac{1}{n} \rfloor\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ stationne à la valeur 0 à partir du rang 2.

Désormais, jusqu'au paragraphe 6, on ne s'intéresse qu'aux suites réelles.

1.2 Suites monotones

Définition 3.
On dit qu'une suite **réelle** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est :

1. croissante si elle vérifie : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geqslant u_n$,
2. décroissante si elle vérifie : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leqslant u_n$,
3. strictement croissante si elle vérifie : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} > u_n$,
4. strictement décroissante si elle vérifie : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} < u_n$.

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante ou décroissante est dite monotone. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ strictement croissante ou strictement décroissante est dite strictement monotone.

Remarque : Les propriétés précédentes peuvent être valables uniquement « au delà d'un certain rang ».
Techniques : étude de la monotonie d'une suite réelle. Pour étudier la monotonie d'une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il existe essentiellement deux méthodes :

On peut étudier le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$:
— si pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante ;
— si pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} - u_n = 0$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante ;
— si pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Exemple. Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = -3$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n - n^2$.
Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne contient que des termes **strictement positifs**, on peut aussi étudier la position du quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ par rapport à 1. Plus précisément,
— si pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante ;

— si pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante ;
— si pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Propriété 4.
Si $a > 0$, la suite $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone. Plus précisément, si $0 < a < 1$, cette suite est strictement décroissante ; si $a = 1$, cette suite est constante et si $a > 1$, la suite est strictement croissante.

Démonstration.

1.3 Suites majorées, minorées, bornées

Définition.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est :
- majorée si elle vérifie : $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant M$.
- minorée si elle vérifie : $\exists m \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant m$.
- bornée si elle est majorée et minorée, c'est-à-dire si elle vérifie l'une des deux conditions équivalentes suivantes :
  i) $\exists m \in \mathbb{R}, \exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, m \leqslant u_n \leqslant M$.
  ii) $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leqslant M$.

Remarque :

1. Un majorant de la suite n'est pas forcément un des termes de la suite. Par exemple, la suite $(1 - 1/n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, est majorée par 1, qui n'appartient pas à la suite.
2. Une suite positive est une suite minorée par 0.

2 Suites arithmétiques et suites géométriques

2.1 Suites arithmétiques

Définition 6.
Une suite de nombres réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite arithmétique s'il existe un réel r tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = u_n + r$$

Le nombre réel r est appelé la raison de la suite arithmétique. Il est défini de manière unique et ne dépend pas de n.

Propriété 7.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r. Alors,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = u_0 + nr.$$

Exemple. Donner le sens de variation d'une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0.

Propriété.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note S_n la somme des n premiers termes d'une suite arithmétique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de raison r, c'est-à-dire $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}$. On a

$$S_n = \frac{n}{2}(u_0 + u_{n-1}).$$

Plus généralement, la somme de n termes consécutifs d'une telle suite est obtenue grâce à la formule

$$\frac{(\text{nombre de termes}) \times (\text{premier terme} + \text{dernier terme})}{2}.$$

Exemple. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = u_n + 1, \forall n \in \mathbb{N}$ est une suite arithmétique de raison $r = 1$. Elle est strictement croissante et on a $u_n = 3 + n \times (1) = 3 + n$ pour tout n. La somme des n premiers termes est $S_n = \frac{n}{2}(3 + 3 + (n-1)) = \frac{n(5+n)}{2}$.

2.2 Suites géométriques

Définition 9.
Une suite de nombres réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite géométrique s'il existe un réel q tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = q \times u_n$$

Le nombre réel q est appelé la raison de la suite géométrique. Il est défini de manière unique (sauf lorsque la suite est nulle) et ne dépend pas de n.

Propriété 10.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q. Alors,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = u_0 \times q^n$$

Exemple. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de premier terme $u_0 > 0$ et de raison $q > 0$. Etudier le sens de variation de la suite. Et Si $q < 0$?

Propriété.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k$ la somme des n premiers termes de $(u_n)_{n\geqslant 0}$.

— si $\mathbf{q \neq 1}$, alors pour tout entier $n \geqslant 0$, on a

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k = u_0 \times \sum_{k=0}^{n-1} q^k = u_0 \times \frac{1-q^n}{1-q}.$$

Plus généralement, la somme de n termes consécutifs d'une telle suite est obtenue grâce à la formule

$$(\text{premier terme}) \times \frac{1-q^{\text{nombre de termes}}}{1-q}.$$

— si $q = 1$, alors pour tout entier $n \geqslant 0$, on a $S_n = n \times u_0$.

Exemple. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = 2u_n, \forall n \in \mathbb{N}$ est une suite géométrique de raison 2. Elle est strictement croissante et on a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = 5 \times 2^n$. La somme des n premiers termes est $S_n = 5 \times \dfrac{1-2^n}{1-2} = -5(1-2^n)$.

3 Convergence des suites réelles

3.1 Limite finie d'une suite réelle

Définition.

On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ si u_n est aussi proche que l'on veut de ℓ au delà d'un certain rang, ce qui s'écrit :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N_\varepsilon,\quad |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente et le réel ℓ est appelé limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. La limite ℓ d'une suite convergente est unique.
On note

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \qquad \text{ou} \qquad u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$$

Remarque : On dit qu'une suite est divergente ou qu'elle diverge lorsqu'elle n'est pas convergente.

Définition.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente. On note ℓ sa limite.

— S'il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N,\ u_n \geqslant \ell$, alors on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell^+$.

— S'il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N,\ u_n \leqslant \ell$, alors on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell^-$.

3.2 Propriétés des suites convergentes

Propriété 14.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 $\Leftrightarrow$ $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Remarque : Attention il existe des suites (u_n) qui ne convergent pas mais telles que la suite $(|u_n|)$ converge. Par exemple la suite $\big((-1)^n\big)$ diverge mais la suite $\big(|(-1)^n|\big)$ constante égale à 1 qui converge vers 1.

Propriété.

Toute suite convergente est bornée.

3.3 Suites tendant vers l'infini

Définition 16.

— On dit qu'une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ si on peut rendre u_n aussi grand que l'on veut au delà d'un certain rang, c'est-à-dire si et seulement si elle vérifie

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists N_A \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N_A,\ u_n \geqslant A.$$

— On dit qu'une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$ si on peut rendre u_n aussi petit que l'on veut au delà d'un certain rang, c'est-à-dire si et seulement si elle vérifie

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists N_A \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N_A,\ u_n \leqslant A.$$

Une suite tendant vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ n'est pas une suite convergente. On dit qu'elle diverge vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ ou encore que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet $+\infty$ ou $-\infty$ pour limite.

Propriété.

- Si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$, alors elle est minorée. Au delà d'un certain rang, elle est minorée par un réel strictement positif.
- Si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$, alors elle est majorée. Au delà d'un certain rang, elle est majorée par un réel strictement négatif.

Remarque : On parle donc de limite aussi bien pour une suite convergente que pour une suite divergeant vers $+\infty$ ou vers $-\infty$. Lorsque la limite d'une suite existe, cette limite est donc un élément ℓ de $\overline{\mathbb{R}}$.

3.4 Des limites connues (et à connaître)

Propriété 18.

Soit (u_n) une suite définie à l'aide d'une fonction, c'est à dire $u_n = f(n)$ avec une f une fonction réelle continue.

$$\text{Si } \lim_{x\to\infty} f(x) = \ell, \quad \text{avec } \ell \in \overline{\mathbb{R}}, \quad \text{alors } \lim_{n\to\infty} u_n = \ell.$$

Exemples.

- Les suites $(n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(n^2)_{n\in\mathbb{N}}$, $(n^3)_{n\in\mathbb{N}}$... divergent vers $+\infty$. Plus généralement, toute suite $(n^b)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $b > 0$ diverge vers $+\infty$.
- Les suites $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^\star}$, $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^\star}$, $\left(\frac{1}{n^3}\right)_{n\in\mathbb{N}^\star}$... convergent vers 0. Plus généralement, toute suite $\left(\frac{1}{n^b}\right)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ avec $b > 0$ converge vers 0.
- Les suites $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $a > 1$ divergent vers $+\infty$
- Les suites $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $0 < a < 1$ convergent vers 0
- Si $a = 1$ (resp. $a = 0$) la suite $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante et converge donc vers 1 (resp. 0).

Remarque : Attention, si $a < 0$, alors la suite $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas défini à l'aide d'une fonction !

- Si $-1 < a < 0$, Les suites $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers 0, mais en alternant de signe.
- Si $a = -1$, la suite $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ prend alternativement les valeurs 1 et -1, elle ne converge pas.
- Si $a < -1$, la suite $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente. Elle change de signe alternativement.

Propriété 19.

Soit (u_n) une suite ayant une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Soit f une fonction réelle continue.

$$\text{Si } \lim_{x\to\ell} f(x) = a, \quad \text{alors } \lim_{n\to\infty} f(u_n) = a.$$

Exemple. Soit $u_n = \frac{1}{n^2}$, alors $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$. Comme $\lim_{x\to 0} e^x = 1$, on a $\lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n^2}} = 1$.

Remarque : Les techniques de calculs de limites sur les fonctions (factorisation par le terme dominant, composition, etc.) vont donc se retrouver dans les calculs de limite de suite. C'est le bon moment pour réviser le chapitre sur les fonctions !

3.5 Opérations sur les limites

Propriété 20.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles.
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 et si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, alors la suite $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Exemple. La suite $\left(\dfrac{\sin(n)}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ tend vers 0 car la suite $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ tend vers 0 et la suite $(\sin(n))_{n\geqslant 1}$ est bornée.

Opérations de limites simples : On considère $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles admettant respectivement $\ell_1 \in \overline{\mathbb{R}}$ et $\ell_2 \in \overline{\mathbb{R}}$ pour limite. Les opérations suivantes sur les limites sont valables dans $\overline{\mathbb{R}}$ si ce ne sont pas des formes indéterminées :

$\lim(u_n + v_n)$	$\lim(u_n \times v_n)$	$\lim(\lambda u_n)$	$\lim(\frac{1}{u_n})$	$\lim(\frac{v_n}{u_n})$
$\ell_1 + \ell_2$	$\ell_1 \times \ell_2$	$\lambda \ell_1$	$\frac{1}{\ell_1}$	$\frac{\ell_2}{\ell_1}$

Exemples.

Remarque : La somme d'une suite divergente et d'une suite convergente est une suite divergente. On ne peut rien dire de la somme ou du produit de deux suites divergentes.

Exemple. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les deux suites de termes généraux $u_n = 1+(-1)^n$ et $v_n = 1-(-1)^n$.
Les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ prennent alternativement la valeur 0 et la valeur 2 et ne sont pas convergentes. Par contre, la suite $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite constante égale à 2 et elle est donc convergente, et la suite $(u_n \times v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite constante égale à 0 et est donc convergente.

Propriété.

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite divergeant vers $+\infty$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite minorée alors la suite $(u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.
2. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$(resp. $-\infty$) et si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée au delà d'un certain rang par un nombre **strictement positif**, alors la suite $(u_nv_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).
3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite divergeant vers $-\infty$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite majorée alors la suite $(u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$.
4. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) et si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée au delà d'un certain rang par un nombre **strictement négatif**, alors la suite $(u_nv_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$ (resp. $+\infty$).

Exemple. La suite $(\sin(n)+n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$ car c'est la somme de la suite $(\sin(n))$ minorée par -1 et de la suite (n^2) qui diverge vers $+\infty$.

4 Limites et relation d'ordre

4.1 Inégalités

Propriété 22.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites convergentes.

1. S'il existe un entier N_0 tel que $\forall n \geqslant N_0, u_n \geqslant 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \geqslant 0$.
2. S'il existe un entier N tel que $\forall n \geqslant N,\ u_n \leqslant v_n$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

Théorème 23.
« des gendarmes » Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites telles que : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$. Si les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la **même** limite ℓ, alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers ℓ.

Corollaire 24.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites. Si pour tout $n\in\mathbb{N}, |u_n| \leqslant v_n$ et si la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers 0.

Propriété 25.
(quand il n'y a qu'un gendarme) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $u_n \leqslant v_n$.

1. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend aussi vers $+\infty$.
2. Si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend aussi vers $-\infty$.

4.2 Limite d'une suite monotone

Théorème 26.
(Théorème « de la limite monotone »)

1. (a) Toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante et majorée converge vers un réel ℓ. (avec $\ell = \sup\{u_n, n\in\mathbb{N}\}$).
   (b) Toute suite croissante et non majorée tend vers $+\infty$.
2. (a) De même, toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante et minorée converge vers un réel ℓ. (avec $\ell = \inf\{u_n, n\in\mathbb{N}\}$)
   (b) Toute suite décroissante et non minorée tend vers $-\infty$.

Remarque : Toute suite monotone admet donc une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$.

4.3 Suites adjacentes

Définition 27.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. On dit que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes si et seulement si :

1. l'une des deux suites est croissante
2. l'autre décroissante.
3. leur différence $(v_n-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.

Remarque : Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites adjacentes telles que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, alors on a nécessairement : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n \leqslant v_n$.

Propriété 28.
Deux suites adjacentes $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une limite commune ℓ.
De plus, si (u_n) est la suite croissante et (v_n) la suite décroissante, alors on a : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n \leqslant \ell \leqslant v_n$.

Démonstration. Supposons que (u_n) est la suite croissante et (v_n) la suite décroissante.

— La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par v_0 donc elle converge vers une limite $\ell_u \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \leqslant \ell_u$.

— La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par u_0 donc elle converge vers une limite $\ell_v \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\ell_v \leqslant v_n$.

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$ et puisque

$$\lim_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = \lim_{n\to+\infty} v_n - \lim_{n\to+\infty} u_n = \ell_v - \ell_u,$$

on a $\ell_u = \ell_v = \ell$, ce qui termine la preuve.

5 Comparaison des suites

5.1 Définitions

Définition 29.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. On dit que

1. la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est négligeable devant $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$$

   On note alors $u_n = o(v_n)$ (u_n est un "petit o" de v_n).

2. la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équivalente à $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$$

   On note alors $u_n \sim v_n$ (u_n est équivalent à v_n).

5.2 Propriétés

Propriété.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}, (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quatre suites réelles.

1. Si $u_n = o(v_n)$ et $v_n = o(w_n)$, alors $u_n = o(w_n)$. (transitivité)
2. Si $u_n = o(w_n)$ et $v_n = o(w_n)$, alors $u_n + v_n = o(w_n)$.
3. Si $u_n = o(w_n)$ et $v_n = o(x_n)$, alors $u_n v_n = o(w_n x_n)$.

Exemple. On a $\ln(n) = o(n)$ et $n = o(e^n)$ donc $\ln(n) = o(e^n)$ par transitivité. Et $n\ln(n) = o(ne^n)$ par produit.

Propriété.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}, (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quatre suites réelles.

1. Si pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = v_n + w_n$ et si $w_n = o(v_n)$ alors $u_n \sim v_n$. (une suite est équivalente à son terme dominant)
2. Si $u_n \sim v_n$ et $v_n \sim w_n$, alors $u_n \sim w_n$ (transitivité).
3. Si $u_n \sim w_n$ et $v_n \sim x_n$ alors $u_n v_n \sim w_n x_n$. (produit d'équivalent)
4. Si $u_n \sim w_n$ et $v_n \sim x_n$ et si les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annulent pas au delà d'un certain rang, alors $\frac{u_n}{v_n} \sim \frac{w_n}{x_n}$. (division d'équivalent)

Remarque : Attention, on ne peut pas additionner ou soustraire avec des équivalents ! On ne peut pas appliquer une fonction sur un équivalent !

Propriété 32.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites équivalentes.

1. Si la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une limite (finie ou infinie), alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une limite et

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n.$$

2. Si la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas au delà d'un certain rang, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas au delà d'un certain rang.
3. Si la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive au delà d'un certain rang, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive au delà d'un certain rang.

Propriété 33.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente vers un réel ℓ **non nul**. Alors $u_n \sim \ell$.

Exemple. $\cos\frac{1}{n}$ tend vers 1 donc $\cos\frac{1}{n} \sim 1$.

Remarque : Il est absolument interdit d'écrire $u_n \sim 0$! Aucune suite (à part la suite stationnaire égale à 0) n'est équivalente à 0 !

5.3 Comparaison des suites de référence

5.3.1 Comparaisons des suites de type $(n^\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$

Propriété 34.

1. Pour tous réels α et β, si $\alpha < \beta$ alors $n^\alpha = o(n^\beta)$.
2. Pour tous nombres réels positifs a et b, si $0 < a < b$, alors $a^n = o(b^n)$.

Corollaire 35.

Soit $P = a_d X^d + a_{d-1} X^{d-1} + \cdots + a_1 X + a_0$ un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ avec $a_d \neq 0$. On a $P(n) \sim a_d n^d$ autrement dit :

$$a_d n^d + a_{d-1} n^{d-1} + \cdots + a_1 n + a_0 \quad \sim a_d n^d.$$

Un polynôme est équivalent à son terme de plus haut degré.

5.3.2 Comparaison des suites tendant vers $+\infty$

Propriété 36.

On a $\lim\limits_{n \to +\infty} n! = +\infty$.

Démonstration. Pour tout $n \geqslant 1$, on a $n! \geqslant n$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} n! = +\infty$.

Propriété 37.

Pour tous réels $\alpha > 0, \beta > 0$ et $a > 1$, on a

$$(\ln n)^\alpha = o(n^\beta), \qquad n^\beta = o(a^n), \qquad a^n = o(n!) \qquad n! = o(n^n).$$

5.3.3 Comparaison des suites tendant vers 0

Lemme 38.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites tendant vers $+\infty$ (ces suites ne s'annulent donc pas au delà d'un certain rang). Si $u_n = o(v_n)$ alors $\frac{1}{v_n} = o(\frac{1}{u_n})$.

Propriété 39.

Pour tous réels $\alpha > 0, \beta > 0$ et $a \in]0, 1[$, on a

$$\frac{1}{n!} = o(a^n), \quad a^n = o\left(\frac{1}{n^\beta}\right) \quad \text{et} \quad \frac{1}{n^\beta} = o\left(\frac{1}{(\ln n)^\alpha}\right).$$

5.4 Avec des fonctions usuelles

Propriété 40.

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de nombres réels telle que $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0}$ alors on a :

$$\sin(u_n) \sim u_n \qquad \tan(u_n) \sim u_n \qquad 1 - \cos(u_n) \sim \frac{u_n^2}{2} \qquad \ln(1 + u_n) \sim u_n$$

$$\mathrm{e}^{u_n} - 1 \sim u_n.$$

Exemple.

1. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{2n-1}{2n+4}\right)^{3n}$.
2. Déterminer un équivalent de la suite $\big(\ln(\cos(1/n))\big)_{n \in \mathbb{N}}$

6 Suites de nombres complexes

Définition.

Soit $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes. On dit que la suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si la suite de nombres réels $(|z_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

Remarque : Il n'y a pas de relation d'ordre sur $\mathbb{C}$ qui prolonge la relation d'ordre sur $\mathbb{R}$. Il n'y a donc pas de notion de suite complexe croissante ou décroissante, ni de suite complexe majorée ou minorée.

Définition.

On dit que la suite de nombres complexes $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente si, et seulement si, il existe $\ell \in \mathbb{C}$ tel que $\lim\limits_{n \to +\infty} |z_n - \ell| = 0$, c'est-à-dire si, et seulement si,

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \ \forall n \geqslant N_\varepsilon, \ |z_n - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

On dit alors que la suite (z_n) converge vers ℓ et on note $\lim\limits_{n \to +\infty} z_n = \ell$. On dit que la suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est divergente si elle n'est pas convergente.

Attention : il n'y a pas de sens à dire que la suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers l'infini.

Propriété 43.

Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes. La suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell = a+ib$ (avec $(a,b)\in\mathbb{R}^2$) si, et seulement si, les suites de nombres réels $(\mathrm{Re}(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mathrm{Im}(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent respectivement vers a et b.

Corollaire 44.

Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes. Si $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ, alors $(\overline{z_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\overline{\ell}$.

Démonstration. Si la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell = a+ib$ $(a,b\in\mathbb{R})$, alors les suites $(\mathrm{Re}(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mathrm{Im}(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent respectivement vers a et b. Comme pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\mathrm{Re}(\overline{z_n}) = \mathrm{Re}(z_n)$ et $\mathrm{Im}(\overline{z_n}) = -\mathrm{Im}(z_n)$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathrm{Re}(\overline{z_n}) = a$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathrm{Im}(\overline{z_n}) = -b$. D'après la proposition précédente, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\overline{z_n} = a-ib = \overline{\ell}$.

Propriété 45.

Toute suite complexe convergente est bornée.

Remarque : Les résultats obtenus pour les suites de nombres réels qui ne font pas intervenir la relation d'ordre dans $\mathbb{R}$ restent valable pour les suites de nombres complexes.

Classe préparatoire ATS **mathématiques**

Fiche d'exercices XXII : Suites

Exercice 1

($\star$) Soient les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $\forall n\in\mathbb{N}, u_n = n^2-1$ et $v_0 = 1$, $\forall n\in\mathbb{N}, v_{n+1} = 2v_n+1$. Calculer les cinq premiers termes de chaque suite.

Exercice 2

($\star$) Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ défini par $\forall n\in\mathbb{N}, u_n = 5-3n$. Déterminer le sens de variation de la suite. Montrer qu'elle est majorée par 5.

Exercice 3

($\star\star$) Étudier la monotonie et la convergence des suites :

$$v_n = \frac{1}{1+n^2},\quad w_n = \frac{n!}{2^n},\quad x_n = \frac{n^3}{5^n},\quad \text{et}\quad u_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}.$$

Exercice 4

($\star$) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$, $\forall n\in N, u_{n+1} = u_n - 1$ Déterminer la nature de la suite (u), son sens de variation, l'expression de u_n en fonction de n et $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} u_k$.

Exercice 5

($\star$) Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_0 = 2$, $\forall n\in N, v_{n+1} = 3v_n$. Déterminer la nature de la suite (v), son sens de variation, l'expression de v_n en fonction de n et $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} v_k$.

Exercice 6

($\star\star$) On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par leurs premiers termes $u_0\in\mathbb{R}$ et $v_0\in\mathbb{R}$ et les relations :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{1}{4}(u_n+3v_n) \\ v_{n+1} = \dfrac{1}{4}(v_n+3u_n) \end{cases}$$

1. Que dire des suites $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
2. Donner l'expression des termes généraux de $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de n, u_0 et v_0 uniquement.
3. En déduire l'expression des termes généraux u_n et v_n.

Exercice 7

($\star\star$) Étudier la convergence des suites :

$$a_n = 3^{1/n} \qquad b_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n \qquad c_n = \frac{n-(-1)^n}{n+(-1)^n} \qquad d_n = \frac{2+3\cos(n)}{n+1}$$

$$u_n = n + 2\sin(n^2) \qquad v_n = 2n + (-1)^n n \qquad w_n = 3\sqrt{n^2+1} - 5n$$

$$t_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2+1} \qquad x_n = \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n}\ (a, b \in \mathbb{R}_+^*) \qquad y_n = \frac{n - n\ln n}{n + \ln n}.$$

$$z_n = n^{1/\ln n} \qquad s_n = (\ln n)^{1/n} \qquad q_n = \frac{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}{n}$$

Exercice 8

($\star\star$) Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = a+ib$ (avec $(a,b) \in \mathbb{R}$) et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{5}(3u_n + 2\overline{u_n})$. Cette suite est-elle convergente, et si oui, quelle est sa limite ?

Exercice 9

($\star\star$) Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$

1. Montrer que, $\forall n \in N, u_n \geqslant 1$.
2. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
3. La suite (u_n) est-elle convergente ? Si oui, déterminer sa limite.

Exercice 10

($\star\star\star$) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \cos(n)$ et $v_n = \sin(n)$.

1. Pour tout entier n, exprimer u_{n+1} et v_{n+1} en fonction de u_n, v_n, u_1 et v_1.
2. On suppose que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent respectivement vers x et y.
   Déterminer alors leurs limites x et y.
3. En déduire qu'elles sont toutes deux divergentes.

Exercice 11

($\star\star$) **Suites arithmético-géométriques.** Soit a et b deux nombres réels. On définit la suite arithmético-géométrique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$u_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + b.$$

1. Quelle est la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour $a = 0$? pour $a = 1$? pour $b = 0$? Donner dans ces trois cas une expression du terme général u_n ne dépendant que de n et étudier la convergence de la suite.
2. On suppose désormais que $a \neq 1$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = ax + b$.
   (a) Trouver l'unique réel α tel que $f(\alpha) = \alpha$.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f(u_n) - f(\alpha) = u_{n+1} - \alpha$.
   (c) Exprimer $f(u_n) - f(\alpha)$ en fonction de u_n, α et a uniquement.
   (d) Quelle est la nature de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_n - \alpha$?
   (e) Donner l'expression du terme général v_n en fonction de n et en déduire celle du terme général de u_n.
   (f) Discuter suivant la valeur de a la convergence de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En déduire les valeurs de a pour lesquelles la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et donner alors sa limite.

Exercice 12

($\star\star$) Exprimer u_n en fonction de n et examiner la convergence de la suite (u_n) pour :

1. $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 3u_n - 1$.
2. $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 5u_n + 4$.
3. $u_0 = x$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + 1}{2}$.

Exercice 13

($\star\star$) Soit u et v les suites définies par $u_n = 5 + \frac{1}{n}$ et $v_n = 5 - \frac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Montrer que ces suites sont adjacentes.

Exercice 14

($\star\star$) Montrer que les suites de termes généraux $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n}$ sont adjacentes. Que pouvez-vous en déduire ?

Exercice 15

($\star\star$) Montrer que les suites de termes généraux $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n.n!}$ sont adjacentes. (*Leur limite commune est en fait le nombre de Néper* e.)

Exercice 16

($\star$) Soit $u_n = n+1$, $v_n = n$ et $w_n = n^2$. Montrer que $u_n \sim v_n$ et $v_n = o(w_n)$.

Exercice 17

($\star$) Soit $u_n = n^2$ et $v_n = n^4$. Laquelle des suites est négligeable devant l'autre ?
Soit $w_n = 3^n$ et $x_n = 2^n$. Laquelle des suites est négligeable devant l'autre ?
Soit $z_n = 5n^3 - 100n + 25$. Donner un équivalent de z_n avec un seul terme.

Exercice 18

($\star\star$) Trouver une suite simple équivalente à la suite de terme général donné par

$$u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1} \qquad v_n = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \qquad w_n = n^{1/n} - 1$$

$$s_n = n \sin \frac{1}{n^2} \qquad t_n = \ln(n+1) - \ln n.$$

Exercice 19

($\star\star$) Utiliser des équivalents pour calculer les limites suivantes ($x \in \mathbb{R}$) :

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n$ c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n-x}\right)^n$

d) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{n^2+5n-4}{n^2-3n+7}\right)^n$ e) $\lim\limits_{n\to+\infty} (2n^2 - 3n + 2) \sin\left(\frac{1}{n^2+3n}\right)$

Exercice 20

($\star\star\star$)

1. Montrer que si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, alors la suite $(x_{2n} - x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0. (on pourra utiliser que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ, alors $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.)
2. En déduire que la suite (S_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, est divergente.
3. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\frac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k}$.
4. En déduire que $S_n \sim \ln(n)$.

Exercice 21

($\star\star\star$)

1. On pose $\forall n \in \mathbb{N}^\star, v_n = 1$ et $u_n = e^{\frac{1}{n}}$. Montrer que $u_n \sim v_n$ mais que $\ln(u_n) \not\sim \ln(v_n)$.
   Attention ! On ne peut pas prendre directement le Logarithme d'un équivalent car ça ne marche pas à tout les coups ! Pareil pour l'exponentiel ! Il faut refaire le calcul en entier à chaque fois !
2. Trouver un équivalent simple de $\ln(\sin(1/n))$.
3. Trouver un équivalent simple de $\ln(n^2 + 2n + 3)$.
4. Montrer que $\exp(\sin(\frac{1}{n})) \sim \exp(\frac{1}{n^2})$

Exercice 22

($\star\star\star$) Pour tout $x \in]0, +\infty[$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\varphi_n(x) = x - \ln(x) - n$.

1. Soit $x \in]0, +\infty[$ fixé. Montrer que la suite $(\varphi_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
2. Soit $n \geqslant 2$ fixé. Montrer que l'équation $\varphi_n(x) = 0$ admet exactement deux solutions notées x_n et y_n telles que $x_n \in]0, 1[$ et $y_n \in]1, +\infty[$.
3. En utilisant la question 1 et le sens de variation de φ_{n+1}, comparer $\varphi_{n+1}(x_n)$ et $\varphi_{n+1}(x_{n+1})$. En déduire que la suite $(x_n)_{n\geqslant 2}$ est décroissante.
4. Montrer que $(x_n)_{n\geqslant 2}$ converge vers 0.

Fiche de révision XXII : Suites

C'est quoi une suite, en gros ?	C'est une famille de nombre numérotée, qu'on note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Une suite (u_n) est constante si .... (deux réponses)	si il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \alpha$ Si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n$
Un suite (u_n) est croissante si	$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geqslant u_n$
Un suite (u_n) est décroissante si	$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leqslant u_n$

ça veut dire quoi étudier la monotonie de (u_n) et quelles sont les deux méthodes possibles ?	La monotonie, c'est le sens de variation (croissant ou décroissant) Méthode 1 : on étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$. (Positif : suite croissante, négatif : suite décroissante, nul : suite constante) Méthode 2 : on étudie $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, uniquement si u est une suite positive stricte. ($\geqslant 1$: suite croissante, $\leqslant 1$: suite décroissante, $= 1$: suite constante)

Si $a > 0$, donner le sens de variation de $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et sa limite	Si $a > 1$ la suite $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante. Limite $+\infty$ Si $a = 1$ la suite $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante. Limite 1 Si $a < 1$ la suite $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante. Limite 0

Une suite (u_n) est dite arithmétique si	$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + r$, avec r un réel fixé, la raison.

Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r, que vaut u_n en fonction de n ?	$u_n = u_0 + nr$

Une suite (u_n) est dite géométrique si	$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = qu_n$, avec q un réel fixé, la raison.

Si (u_n) est une suite géométrique de raison q, que vaut u_n en fonction de n ?	$u_n = u_0 q^n$

Si $(\lvert u_n \rvert)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, alors (u_n) a quelle limite ?	0 aussi

Si $u_n = f(n)$ avec une $x \to f(x)$ une fonction réelle continue qui tend vers ℓ quand $x \to \infty$, alors u_n a pour limite... ?	ℓ

Si $-1 < a < 0$, La suite $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite	0

Si $a \leqslant -1$, La suite $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite	Rien ! pas de limite.

Si f un fonction qui a pour limite ℓ en a et $u_n \to a$, quelle est la limite de $f(u_n)$?	ℓ

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 et si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, alors la suite $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers... ?	0

Si (u_n) est une suite positive, alors sa limite sera...	un nombre positif ou nul, ou $+\infty$, ou rien.

Si $\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ et les suites (u_n) et (w_n) convergent vers la **même** limite ℓ, alors la suite (v_n).... ?	converge aussi vers ℓ.

Si pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant v_n$ et $u_n \to +\infty$, alors v_n a pour limite...	$+\infty$

Que dire de la limite d'une suite croissante : si la suite est majorée ? si la suite n'est pas majorée ?	majorée : il y a une limite finie. non majorée : la limite est $+\infty$

Que dire de la limite d'une suite décroissante : si la suite est minorée ? si la suite n'est pas minorée ?	minorée : il y a une limite finie. non minorée : la limite est $-\infty$

On dit que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes si ...	L'une des deux suites est croissante, l'autre décroissante, leur différence $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.

Que dire de la limite de deux suites adjacentes ?	Elle existe et les deux suites ont la même limite.
(u_n) est négligeable devant (v_n) signifie quoi et se note comment ?	$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$ et ça se note $u_n = o(v_n)$.
(u_n) et (v_n) sont équivalentes signifie quoi et se note comment ?	$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$ et ça se note $u_n \sim v_n$
Si $u_n \sim v_n$ et que $v_n \to \ell$ (nombre ou infini), alors que dire de u_n ?	$u_n \to \ell$
Si $u_n \to \ell$ un nombre non nul, alors $u_n \sim$?	$u_n \sim \ell$
Si $a < b$ des réels, entre n^a et n^b, qui est négligeable devant qui ?	$n^a = o(n^b)$
Si $a < b$ des réels positifs stricts, entre a^n et b^n, qui est négligeable devant qui ?	$a^n = o(b^n)$
Entre $\ln n$, $n^a(a > 0)$, $b^n(b > 1)$, $n!$ et n^n, qui l'emporte sur qui ?	n^n l'emporte sur $n!$, qui l'emporte sur b^n, qui l'emporte sur n^a, qui l'emporte sur $\ln n$.
si (u_n) tend vers 0, alors $\sin u_n \sim$?	$\sin u_n \sim u_n$
si (u_n) tend vers 0, alors $\tan u_n \sim$?	$\tan u_n \sim u_n$
si (u_n) tend vers 0, alors $1 - \cos u_n \sim$?	$1 - \cos u_n \sim \frac{u_n^2}{2}$
si (u_n) tend vers 0, alors $\ln(1 + u_n) \sim$?	$\ln(1 + u_n) \sim u_n$
si (u_n) tend vers 0, alors $e^{u_n} - 1 \sim$?	$e^{u_n} - 1 \sim u_n$
Si (z_n) est une suite de nombre complexe, la suite est bornée signifie....	la suite $\|z_n l$ est bornée.
(z_n) converge vers $\ell = a + ib$ si la partie réelle de z_n ...?.. et la partie imaginaire de z_n..?..	$Re(z_n) \to a$ et $Im(z_n) \to b$.
Si (z_n) converge vers $\ell = a + ib$, alors $\bar{z_n}$ converge vers...	$\bar{\ell} = a - ib$.
Dans les suites, quand on parle de limite, d'équivalent ou de négligeable, c'est toujours pour quelle valeurs de n ?	$n \to +\infty$