21. Fonctions réelles de deux variables

1 Un peu de topologie

On se place principalement dans le plan $\mathbb{R}^2$ (occasionnellement dans l'espace $\mathbb{R}^3$ pour les représentations graphiques) muni de son repère orthonormal direct standard $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Si on considère deux points du plan $a(x, y)$ et $a'(x', y')$, on rappelle que la distance entre les deux points est

$$aa' = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}$$

Définition 1.
Pour a un point et r un réel strictement positif, on note :
- $B(a, r)$ la boule de centre a et de rayon r, sans son bord. C'est-à-dire tout les points m tels que $am < r$. La boule $B(a, r)$ est une boule ouverte et bornée.
- $\overline{B(a, r)}$ la boule de centre a et de rayon r avec son bord. C'est-à-dire tout les points m tels que $am \leqslant r$. La boule $\overline{B(a, r)}$ est une boule fermée et bornée.

Cette définition s'applique dans le plan (mais on visualisera un disque) et dans l'espace. Les vocabulaires « Boule » , « borné » , « ouvert » et « fermé » sont ceux de la topologie.

Définition.
On dit qu'un ensemble E de points (dans le plan ou l'espace) est
- bornée s'il existe une constante K telle que, pour tous points $m, n \in E$, $mn \leqslant K$.
- ouvert si pour tout point $a \in E$, il existe une boule de centre a et de de rayon non nul incluse dans E.
- fermé si son complémentaire est ouvert.

Note : ouvert n'est pas le contraire de fermé, car il existe des ensembles non ouvert et non fermé !

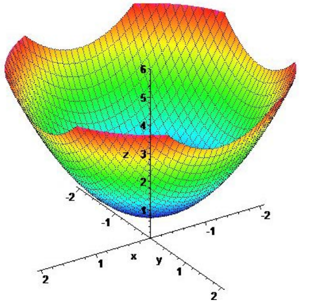
2 Fonctions de deux variables réelles à valeurs dans $\mathbb{R}$

Définition 3.
Soit A une partie de $\mathbb{R}^2$. On appelle fonction réelle de deux variables sur A une application

$$f : \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathbb{R}. \\ (x, y) & \longmapsto & f(x, y) \end{array}$$

Exemple. La fonction $f(x, y) = 3xy^2 - 2y + 1$ définie sur $\mathbb{R}^2$ est une fonction réelles de deux variables. On a $f(1, 2) = 3 \times 1 \times 2^2 - 2 \times 2 + 1 = 9$

Représentation graphique. On pose $z = f(x, y)$, et on obtient une surface $\{(x, y, f(x, y)),\ (x, y) \in A\}$ dans l'espace. Par exemple, $f(x, y) = 1 + x^2 + y^2$ est représentée ci-dessous. On appelle cette surface une paraboloïde.



Définition 4.
Une courbe plane est l'ensemble des points (x, y) du plan vérifiant $f(x, y) = 0$, avec f une fonction réelle de deux variables. L'égalité $f(x, y) = 0$ est appelée équation cartésienne de la courbe.

Exemples.
1. On considère la fonction $f(x, y) = 2x - 3y + 2$. La courbe plane d'équation $2x - 3y + 2 = 0$ est une droite.
2. On considère la fonction $f(x, y) = (x - 1)^2 + (y + 2)^2 - 6$. La courbe plane correspondante est un cercle.
3. On considère la fonction $f(x, y) = (x - 1)^2 - 3(y + 2)^2 + 1$. La courbe plane correspondante est une hyperbole.
4. On considère une fonction réelle d'une variable, sa courbe est donc $y = f(x)$. C'est la courbe plane correspondant à l'équation $y - f(x) = 0$.

Dans toute la suite du cours, on va considérer une fonction f de deux variables définies sur A une partie de $\mathbb{R}^2$. On veut étudier les différentes propriétés de f : limite, continuité, dérivabilité, extrema....

2.1 Limite et continuité des fonctions réelles de deux variables

Définition.
Soit $a \in A$ (ou sur la frontière de A) un point. On dit que f tend vers $\ell \in \mathbb{R}$ en a ou admet ℓ pour limite en a si et seulement si $|f(x,y)-\ell|$ tend vers 0 quand $\|(x,y)-a\|$ tend vers 0. Le réel ℓ est alors unique et on le note $\ell = \lim_a f$ ou $\ell = \lim_{u \to a} f(u)$.

On dit que f est continue en a si et seulement si f admet une limite en a, qui est alors nécessairement $f(a)$.

Définition 6.
Soit A une partie de $\mathbb{R}^2$. On dit qu'une fonction de 2 variables est continue sur A si et seulement si elle est continue en tout point de A. On note $\mathcal{C}(A,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur A.

Exemple. La fonction $f(x,y) = 1 + x^2 + y^2$ est continue en tout point de $\mathbb{R}^2$. Par contre, la fonction $g(x,y) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ n'est pas continue aux points $(y,0)$.

Propriété 7.
Si f et g sont deux fonctions définies sur une partie A de $\mathbb{R}^2$ et continues sur A, alors les fonctions $f+g$ et fg sont continues sur A. Si de plus g ne s'annule pas sur A, alors f/g est continue sur A.

Toutes les fonctions "standards" contenant des polynômes, des fractions, des exponentielles, des fonctions trigonométrique, des logarithmes... en x et y sont continues sur leur ensemble de définition. Il faudra par contre étudier précisément certains points quand ils ne sont pas définis par une formule standard.

Exemple. La fonction $f(x,y) = x^2\ln(y) - 3e^y$ est définie quand $y > 0$ donc sur $A = \mathbb{R}\times]0,+\infty[$. Sur son domaine de définition, la fonction est continue.

Définition 8.
On dit que f est bornée sur A si et seulement si il existe un nombre réel $M \geqslant 0$ tel que $\forall (x,y) \in A,\ |f(x,y)| \leqslant M$.

Propriété 9.
Toute fonction f continue sur une partie fermée bornée A de $\mathbb{R}^2$ est bornée sur A. De plus, il existe a et b dans $\mathbb{R}^2$ tels que $f(a)$ et $f(b)$ sont respectivement le plus petit et le plus grand élément de $f(A)$.

3 Calcul différentiel

3.1 Dérivée suivant un vecteur, dérivées partielles

Définition.
Soit $a \in A$ et $\overrightarrow{v}$ un vecteur non nul de $\mathbb{R}^2$. On dit que f est dérivable en a suivant le vecteur $\overrightarrow{v}$ si et seulement si

$$D_v f(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + t\overrightarrow{v}) - f(a)}{t}$$

existe et est un nombre réel. $D_v f(a)$ est alors le nombre dérivé de f en a suivant $\vec{v}$.

Exemple. Soit $a = (1,1)$, $\overrightarrow{v} = (1,2)$ et $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}. \\ (x,y) & \mapsto & x^2y^3 \end{array}$ Montrer que f est dérivable en a suivant $\overrightarrow{v}$ et calculer $D_{\vec{v}} f(a)$.

Définition 11.
Soit $a = (\alpha,\beta)$ un point (fixé) de A. On appelle dérivées partielles (premières) de f en a les dérivées de f en a suivant les vecteurs $e_1 = (1,0)$ et $e_2 = (0,1)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = D_{e_1} f(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f((\alpha,\beta)+t(1,0)) - f(\alpha,\beta)}{t} \qquad \text{dérivée partielle suivant } x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a) = D_{e_2} f(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f((\alpha,\beta)+t(0,1)) - f(\alpha,\beta)}{t} \qquad \text{dérivée partielle suivant } y$$

Propriété.
Soit $a = (\alpha,\beta) \in A$ un point fixé de A. Les applications $f_{(\alpha,\cdot)} : y \longmapsto f(\alpha,y)$ et $f_{(\cdot,\beta)} : x \longmapsto f(x,\beta)$ sont appelées les applications partielles associées à f au point (α,β). f admet des dérivées partielles premières en $a = (\alpha,\beta)$ si et seulement si ses applications partielles $f(\alpha,.)$ et $f(.,\beta)$ en a sont dérivables en β et α respectivement. On a dans ce cas :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \big(f(.,\beta)\big)'(\alpha) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a) = \big(f(\alpha,.)\big)'(\beta).$$

Remarque : Ce résultat signifie que pour dériver une fonction par rapport à x, on considère y comme une constante et qu'on dérive uniquement le x. Et pour dériver une fonction par rapport à y, on considère x comme une constante et on dérive uniquement le y.

Exemple. Soit $\theta : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \arctan(\frac{y}{x}) \end{array}$, calculons les dérivées partielles premières de θ.

Exercice 1

Soit $r : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \sqrt{x^2+y^2} \end{array}$. Calculer ses deux dérivées partielles premières.

Exemple. Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}. \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \frac{x^2}{y} & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases} \end{array}$. Calculer les dérivées partielles premières de f en $(0,0)$.

Remarque : Dans ce dernier exemple, on voit que f admet des dérivées partielles en $(0,0)$. Mais elle n'est pas continue en 0 (Par exemple $f(x,x^2) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$). Pour définir une notion de dérivabilité qui implique la continuité il va falloir demander un peu plus que l'existence des dérivées partielles.

3.2 Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.

Définition 13.

f est dite de classe $\mathcal{C}^1$ sur A si et seulement si elle admet des dérivées partielles en tout point de A et si les fonctions dérivées partielles sont continues sur A. On note $\mathcal{C}^1(A)$ ou $\mathcal{C}^1(A,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur A.

Exemple. La fonction θ définie plus haut est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}$. Toutes les fonctions standards sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur leur ensemble de définition SAUF la racine carrée et la valeur absolue en 0, les arcsin et arcos en 1 et -1.

Remarque :

- Si f est de classe $\mathcal{C}^1$, alors elle est continue.
- La somme, le produit et la différence de deux fonctions $\mathcal{C}^1$ est aussi $\mathcal{C}^1$. Le quotient de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ est de classe $\mathcal{C}^1$ si le dénominateur ne s'annule pas.

Théorème 14.

Le développement limité de f en $a = (\alpha, \beta)$ à l'ordre 1 est

$$f((x,y)) = f(a) + (x-\alpha)\frac{\partial f}{\partial x}(a) + (y-\beta)\frac{\partial f}{\partial y}(a) + o(\|(x,y)-a\|)$$

Remarque : Ce théorème s'interprète géométriquement : la surface définie par f a un plan tangent en a dont l'équation est

$$z = f(a) + (x-\alpha)\frac{\partial f}{\partial x}(a) + (y-\beta)\frac{\partial f}{\partial y}(a).$$

Le terme $o(\|(x,y)-a\|)$ représente l'écart entre $f(x,y)$ et le plan tangent : si (x,y) est proche de a, alors cet écart est "assez petit".

Exemple. Ecrire le développement limité à l'ordre 1 en $(0,0)$ de $f : (x,y) \mapsto \dfrac{\cos(y)}{1-x}$. En déduire une équation du plan tangent en $(0,0)$ à la surface représentant f.

3.3 Gradient

Définition 15.

Soient f une fonction de classe $\mathcal{C}^1(A)$ et $a \in A$. On appelle gradient de f en a et l'on note $\overrightarrow{\text{grad}}(f)(a)$ le vecteur

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f)(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a), \frac{\partial f}{\partial y}(a)\right).$$

On appelle gradient de f la fonction $\overrightarrow{\text{grad}}(f) : \begin{array}{ccc} A & \to & \mathbb{R}^2. \\ a & \mapsto & \overrightarrow{\text{grad}}(f)(a) \end{array}$

Exemple. Expliciter le gradient de la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}. \\ (x,y) & \mapsto & x^2y^3 \end{array}$

Théorème 16.

Soient f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Les fonctions $f+g$, fg , λf sont de classe $\mathcal{C}^1$ et l'on a :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f+g) = \overrightarrow{\text{grad}}(f) + \overrightarrow{\text{grad}}(g), \quad \overrightarrow{\text{grad}}(\lambda f) = \lambda\overrightarrow{\text{grad}}(f)$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}(fg) = f\overrightarrow{\text{grad}}(g) + g\overrightarrow{\text{grad}}(f).$$

De plus, si f ne s'annule pas, on a $\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{1}{f}\right) = \dfrac{-\overrightarrow{\text{grad}}(f)}{f^2}$.

Théorème 17.
Si f est de classe $\mathcal{C}^1$, alors f admet en tout point a une dérivée suivant tout vecteur $v=(h,k)$ et

$$D_v f(a) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}(f)(a)\cdot v \qquad \left(= h.\frac{\partial f}{\partial x}(a) + k.\frac{\partial f}{\partial y}(a)\right)$$

De plus, on a cette formule de d.l. à l'ordre 1 en 0 : $f(a+tv) = f(a) + D_v f(a)t + o(t)$.

Interprétation géométrique du gradient
On considère $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur U. Soit k réel fixé. On considère la ligne de niveau k de f :

$$E_k = \{(x,y)\in U,\ f(x,y)=k\}$$

Sur la ligne de niveau E_k, f est constante. Si on note $\vec{v}$ le vecteur directeur de la ligne de niveau en un point a de cette ligne, on a alors $D_{\vec{v}} f(a) = 0$
Comme $D_{\vec{v}}f(a) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}(f)(a)\cdot\vec{v}$, on a $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f)(a)\cdot\vec{v} = 0$ et donc le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f)(a)$ est orthogonal à $\vec{v}$.

En tout point, le gradient est orthogonal aux lignes de niveau.

3.4 Différentielle

Définition 18.
Soit $f \in \mathcal{C}^1$ et $a \in A$. L'application

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{d}f_a : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & v & \mapsto & \mathrm{d}f_a(v) = D_v f(a) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}(f)(a)\cdot v \end{array}$$

est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^2$, représentée dans les bases canoniques par la matrice ligne $J = \overrightarrow{\mathrm{grad}}(f)(a)$. Cette application $\mathrm{d}f_a$ s'appelle la différentielle de f en a.

Remarque : On a l'habitude de noter $\mathrm{d}x$ et $\mathrm{d}y$ les deux formes linéaires coordonnées :

$$\mathrm{d}x : (x,y)\mapsto x \qquad \text{et} \qquad \mathrm{d}y : (x,y)\mapsto y.$$

On a donc

$$\mathrm{d}f_a = \frac{\partial f}{\partial x}(a)\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}(a)\mathrm{d}y$$

Ce qui signifie qu'en un point $v=(h,k)\in\mathbb{R}^2$, on a

$$\mathrm{d}f_a(v) = \frac{\partial f}{\partial x}(a)h + \frac{\partial f}{\partial y}(a)k$$

On note aussi sans préciser le point a : $\mathrm{d}f = \dfrac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \dfrac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y$.

Exemple. Exprimer la différentielle en tout point de la fonction $f : (x,y) \to x^2y^3$.

3.5 Cas des fonctions composées

Théorème 19.
(Composition par une fonction d'une seule variable) On considère u et v deux fonctions réelles de la variable réelle t et on note g la fonction réelle définie par :

$$g(t) = f(u(t),v(t)).$$

Si u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ et si f est de classe $\mathcal{C}^1$, alors g est de classe $\mathcal{C}^1$ et on a :

$$g' = \frac{\partial f}{\partial x}\big(u,v\big)u' + \frac{\partial f}{\partial y}\big(u,v\big)v' = \left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f)(u,v)\right)\cdot(u',v').$$

Exemple. Soit f la température en chaque point d'un pays. On considère un point $M(t)$ (voiture) qui se déplace avec les coordonnées $(u(t),v(t))$. Ainsi la fonction $g(t) = f\big(u(t),v(t)\big)$ est la variation de la température au cours d'un voyage. La dérivée de g est donnée par : $g'(t) = \left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f)\big(u(t),v(t)\big)\right)\cdot\big(u'(t),v'(t)\big)$. Le vecteur $\big(u'(t),v'(t)\big)$ est le vecteur vitesse de la voiture donc la dérivée de la température au cours du voyage est le produit scalaire du gradient du champ de températures par le vecteur vitesse du mobile. En valeur absolue, $g'(t)$ est d'autant plus grand que le vecteur vitesse est dans la direction du gradient. Cela signifie que la variation de température est plus grande lorsque le mobile suit le vecteur gradient.

Théorème 20.
(Composition par une fonction de deux variables) On considère trois fonctions de deux variables u, v et f. On pose $g(x,y) = f\big(\mathbf{u}(x,y),\mathbf{v}(x,y)\big)$ (c'est à dire qu'on remplace x et y dans f par des fonctions u et v). Si u, v et f sont de classe $\mathcal{C}^1$, alors g est de classe $\mathcal{C}^1$ et l'on a

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial u}\big(\mathbf{u},\mathbf{v}\big)\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial v}\big(\mathbf{u},\mathbf{v}\big)\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x}(x,y)$$

et

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial u}\big(\mathbf{u},\mathbf{v}\big)\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial v}\big(\mathbf{u},\mathbf{v}\big)\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y}(x,y).$$

Pour la différentielle, on obtient

$$\mathrm{d}g = \left(\frac{\partial f}{\partial u}(u,v)\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}(u,v)\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x}\right)\mathrm{d}x + \left(\frac{\partial f}{\partial u}(u,v)\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}(u,v)\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y}\right)\mathrm{d}y.$$

Calcul de la différentielle en coordonnées polaires. On a une fonction $f : (x,y) \to f(x,y)$ et on remplace $x = r\cos(\theta)$ et $y = r\sin(\theta)$. On obtient donc $f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = g(r,\theta)$, qu'on veut dériver par rapport à r et θ. On utilise la formule précédente avec r à la place de x, θ à la place de y, x à la place de u et y à la place de v.

$$\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\frac{\partial(r\cos\theta)}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\frac{\partial(r\sin\theta)}{\partial r}$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta)\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)\sin\theta$$

et

$$\frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\frac{\partial(r\cos\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\frac{\partial(r\sin\theta)}{\partial \theta}$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta)(-r\sin\theta) + \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)(r\cos\theta)$$

La différentielle est donc

$$\mathrm{d}g = \left(\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}r + \left(-r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}\theta$$

3.6 Dérivées partielles secondes

Définition 21.

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

— Si la fonction dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ admet des dérivées partielles, on les note :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

— De même, si la fonction dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial y}$ admet des dérivées partielles, on les note :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Remarque : Les dérivées partielles $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ sont également appelées dérivées secondes croisées.

Exemple. Déterminer les dérivées partielles secondes de la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \exp(x\sin(y)). \end{array}$

Définition 22.

Une fonction définie sur un ouvert A de $\mathbb{R}^2$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur A si et seulement si elle admet des dérivées secondes en tout point et si ses quatre fonctions dérivées partielles secondes sont continues sur A. L'ensemble des fonctions réelles de classe $\mathcal{C}^2$ sur A est noté $\mathcal{C}^2(A,\mathbb{R})$. C'est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel.

Remarque : Les fonctions usuelles sont toutes de classe $\mathcal{C}^2$ sur leur ensemble de définition, SAUF la racine carrée et la valeur absolue en 0, les arcsin et arcos en 1 et -1.

Théorème 23.

(de Schwarz) Si f est de classe $\mathcal{C}^2$ alors on a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Attention : Si les dérivées partielles secondes d'une fonction f existent mais ne sont pas continues ce résultat n'est plus valable.

Théorème 24.

(Formule de Taylor-Young à l'ordre 2) Si f est de classe $\mathcal{C}^2$, alors elle admet un développement limité d'ordre 2 en tout point $a(\alpha,\beta)$:

$$f(x,y) = f(a) + p(x-\alpha) + q(y-\beta) + \frac{1}{2}\left(r(x-\alpha)^2 + 2s(x-\alpha)(y-\beta) + t(y-\beta)^2\right)$$

$+o(\|(x,y)-a\|^2)$, avec $p = \frac{\partial f}{\partial x}(a)$, $q = \frac{\partial f}{\partial y}(a)$, $r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)$, $s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a)$ et $t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)$ (notations de Monge).

Remarque : Autre version de cette formule :

$$f(a+(h,k)) = f(a) + ph + qk + \frac{1}{2}\left(rh^2 + 2shk + tk^2\right) + o(\|(h,k)\|^2)$$

Exemple. Donner un développement limité à l'ordre 2 en $(0,0)$ de la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}. \\ (x,y) & \mapsto & \mathrm{e}^{x\sin(y)} \end{array}$$

On calcule $f(0,0) = 1$,

$$p = \sin(y)e^{x\sin y} = 0; \quad q = x\cos(y)e^{x\sin y} = 0; \quad r = \sin^2(y)e^{x\sin y} = 0;$$

$$s = \cos(y)e^{x\sin y} + x\sin(y)\cos(y)e^{x\sin y} = 1;$$
$$t = -x\sin(y)e^{x\sin y} + x^2\cos^2(y)e^{x\sin y} = 0$$

Pour tout vecteur (h,k), on a donc

$$f(x,y) = 1 + 2xy + o(\|(x,y)\|^2)$$

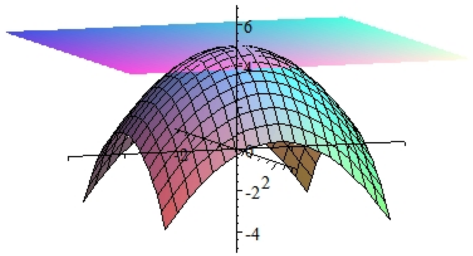
4 Extrema d'une fonction de deux variables

On considère une fonction f de deux variables et a un point de l'ensemble de définition de f qui ne soit pas sur le bord de l'ensemble de définition.

Définition 25.

— f présente un maximum local en a lorsqu'il existe $B(a,r)$ telle que $\forall v \in B(a,r),\ f(v) \leqslant f(a)$.
— f présente un minimum local en a lorsqu'il existe $B(a,r)$ telle que $\forall v \in B(a,r),\ f(v) \geqslant f(a)$.
— f présente un maximum global en a lorsque $\forall v \in A,\ f(v) \leqslant f(a)$.
— f présente un minimum global en a lorsque $\forall v \in A,\ f(v) \geqslant f(a)$.
— f présente un extremum local en a lorsque f admet en a un minimum local ou un maximum local.
— f présente un extremum global en a lorsque f admet en a un minimum global ou un maximum global.

Remarque : Graphiquement, la fonction f admet un extremum local en a si la surface représentant f reste localement en dessous ou au dessus du plan d'équation $z = f(a)$.

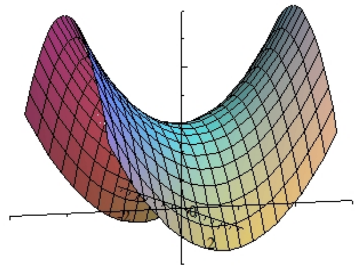


4.1 Cas d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$

Propriété 26.
Soit f de classe $\mathcal{C}^1$. Si f présente un extremum local en a, alors son gradient en a est nul.

Remarque : Autrement dit, pour que f présente un extremum local en a, il est nécessaire (mais non suffisant) que ses dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ s'annulent en ce point.

Attention : Le gradient de f peut s'annuler en un point qui n'est pas un extremum local. C'est le cas pour la fonction $(x,y) \to x^2 - y^2 + 3$ (représentée ci-dessous) dont le graphe est en forme de selle à cheval : en $(0,0)$, le gradient s'annule sans que la surface ne présente d'extremum local.



Définition 27.
Un point où les deux dérivées partielles de f sont nulles s'appelle un point critique de f. Un point critique n'est pas toujours un extremum local mais un extremum local se situe toujours en un point critique.

Exemple. Soit $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y$. Déterminer les points critiques de f.

4.2 Cas d'une fonction de classe $\mathcal{C}^2$

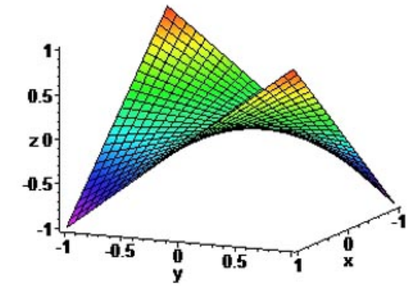
Théorème 28.
Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. Soit a un point critique de f. On calcule au point a la quantité :

$$s^2 - rt = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

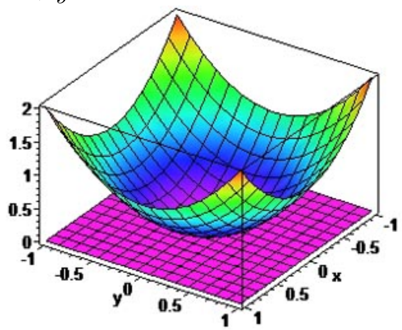
1. si $s^2 - rt < 0$, a est un extremum local de f. Plus précisément :
   — si $r > 0$, a est un minimum local de f.
   — si $r < 0$, a est un maximum local de f.
2. si $s^2 - rt > 0$, a est un point col.
3. si $s^2 - rt = 0$, alors on ne peut pas conclure.

Exemples.

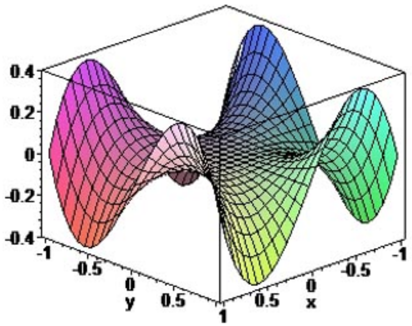
Etude des points critiques de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f : (x, y) \to xy$. Les dérivées partielles sont $\frac{\partial f}{\partial x} = y$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = x$. Donc le seul point critique est le point $(0, 0)$.
On calcule les dérivées secondes en $(0, 0)$: $r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$, $s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1$ et $t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$. Donc $s^2 - rt = 1 > 0$, c'est un point col.



(exo) Etudier les points critiques de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f : (x, y) \to x^2 + y^2$.



Remarque : Les points « selles » ne sont pas les seuls points cols : par exemple, voici le graphe de la fonction $(x, y) \to xy(x - y)(x + y)$ qui présente en $(0, 0)$ un point col d'ordre 4.



Classe préparatoire ATS **mathématiques**

Fiche d'exercices XXI : Fonctions de deux variables

Exercice 1

($\star\star$) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \qquad f(x, y) = xy \sin(x^2 + y^2)$$

Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Calculer ses dérivées partielles premières et donner sa différentielle.

Exercice 2

($\star\star$) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = 1 + (x - y)\cos(x^2 + y^2)$$

Déterminer l'équation du plan tangent en $(0, 0)$.

Exercice 3

($\star\star$) Soit J un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $\varphi : J \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur J et soit f définie sur $J \times J$ par

$$f(x, y) = \int_x^y \varphi(t)\mathrm{d}t \qquad \text{(à valeurs dans } \mathbb{R}\text{)}.$$

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $J \times J$ et calculer les dérivées partielles premières de f.

Exercice 4

($\star\star$) Calculer les dérivées partielles premières et secondes par rapport à x et y des fonctions de deux variables :

$$f(x, y) = e^{2x}\cos y \qquad g(x, y) = \cos(xy) \qquad h(x, y) = \sqrt{1 + x^2y^2}$$

$$k(x, y) = \ln(2 + x^2) + \ln(1 + y^2)$$

Exercice 5

($\star\star\star$) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\begin{cases} f(x,y) = \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0. \end{cases}$$

1. On admet que f est continue sur $\mathbb{R}^2$. Calculer les dérivées partielles de f en tout point (y compris $(0,0)$). On admet que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
2. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Calculer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ puis $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.
3. Cette fonction est-elle de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 6

($\star\star$) Déterminer les points critiques des fonctions suivantes définies de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$:

a) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$ *b)* $g(x,y) = (x-y)^2 + (x+y)^3$
c) $h(x,y) = x^2y + \ln(1+y^2)$ *d)* $k(x,y) = x^2 - y^2 - 2x + 4y$

Fiche de révision XXI : Fonctions de deux variables

une fonction réelles de deux variables $f(x,y)$ se représente graphiquement comment ?	On pose $z = f(x,y)$ et on obtient une surface.
Dire que f tend vers ℓ en a signifie que.......	$\lvert f(x,y)-\ell\rvert$ tend vers 0 quand $\lVert (x,y)-a\rVert$ tend vers 0.
f est continue en a signifie que	$f(x,y)$ tend vers $f(a)$ quand (x,y) tend vers a.
$f(x,y)$ est bornée si....	il existe M tel que $\lvert f(x,y)\rvert \leqslant M$ pour tout (x,y)
Comment calculer $\frac{\partial f}{\partial x}$?	On fixe y (comme s'il était constant) et on ne dérive la fonction que par rapport à x
Comment calculer $\frac{\partial f}{\partial y}$?	On fixe x (comme s'il était constant) et on ne dérive la fonction que par rapport à y
$f(x,y)$ est dite de classe $\mathcal{C}^1$ si	elle admet des dérivées partielles en tout point de A et si les fonctions dérivées partielles sont continues.
Le développement limité de f en $a = (\alpha,\beta)$ à l'ordre 1 est...	$f((x,y)) = f(a) + (x-\alpha)\dfrac{\partial f}{\partial x}(a)$ $+(y-\beta)\dfrac{\partial f}{\partial y}(a) + o(\lVert (x,y)-a\rVert)$
Le gradient de $f(x,y)$ est	$\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$.
$\overrightarrow{\text{grad}}(f+g) =$	$\overrightarrow{\text{grad}}(f) + \overrightarrow{\text{grad}}(g)$
$\overrightarrow{\text{grad}}(fg) =$	$f\overrightarrow{\text{grad}}(g) + g\overrightarrow{\text{grad}}(f)$
$\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{1}{f}\right) =$	$\frac{-\overrightarrow{\text{grad}}(f)}{f^2}$
la différentielle de f est	$df_a = \frac{\partial f}{\partial x}(a)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(a)dy$
Si $g(t) = f(u(t), v(t))$, que vaut g' ?	$g' = \left(\overrightarrow{\text{grad}}(f)(u,v)\right) \cdot (u', v')$

Si $g(x,y) = f\big(u(x,y), v(x,y)\big)$, que valent les dérivées partielles de g ?	$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial u}(\mathbf{u},\mathbf{v})\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial v}(\mathbf{u},\mathbf{v})\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial u}(\mathbf{u},\mathbf{v})\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial v}(\mathbf{u},\mathbf{v})\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y}(x,y).$
Quelles sont les dérivées partielles secondes de f ?	$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$
A quelle condition a-t-on $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$?	Si f est de classe $\mathcal{C}^2$
Donner un développement limité d'ordre 2 de $f(x,y)$ en a sous la forme $f(a+(h,k)) = ...$	$f(a+(h,k)) = f(a) + ph + qk + \frac{1}{2}\Big(rh^2 + 2shk + tk^2\Big) + o(\\|(h,k)\\|^2)$ avec $p = \frac{\partial f}{\partial x}(a)$, $q = \frac{\partial f}{\partial y}(a)$, $r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)$, $s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a)$ et $t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)$
f présente un maximum local en a si	$f(v) \leqslant f(a)$ dans une boule autour de a.
f présente un minimum local en a si	$f(v) \geqslant f(a)$ dans une boule autour de a.
Un extremum de f est ...	un maximum ou un minimum de f.
Si f présente un extremum local en a, alors son gradient en a est ?	nul.
a est un point critique de f signifie...	$\overrightarrow{\text{grad}}\, f(a)$ est nul
Si a est un point critique de f, comment savoir plus précisément quel type de point c'est ?	On calcule au point a la quantité $s^2 - rt$. — si $s^2 - rt < 0$, a est un extremum local de f. Plus précisément : si $r > 0$, a est un minimum local de f. si $r < 0$, a est un maximum local de f. — si $s^2 - rt > 0$, a est un point col. — si $s^2 - rt = 0$, alors on ne peut pas conclure.