19. Développements limités

1 Développement limité d'une fonction réelle

1.1 Définition

Définition 1.
Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant 0 ou d'extrémité 0. Soit n un entier naturel. On dit que la fonction f possède un développement limité à l'ordre n en 0 ($dl_n(0)$) si et seulement si il existe des constantes réelles $a_0, a_1, \dots, a_n$ telles qu'on ait

$$\forall x \in I, \quad f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n) \text{ quand } x \to 0$$

Remarque : On rappelle que $o(x^n)$ pour $x \to 0$ signifie un reste inconnu qui tend vers 0 plus vite que x^n. Ce terme doit figurer dans tout les calculs, et au bon endroit. On verra plus loin comment faire des calculs avec ce terme.

Exemples.

1. Si une fonction f est dérivable en 0 , alors à l'ordre 1 en 0 : $f(x) = f(0) + f'(0)x + o(x)$.
2. Les polynômes réels admettent des développements limités à tous les ordres. Par exemple, $(1+x)^4 = 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4$ admet pour développement limité en 0 :

$$(1+x)^4 = 1 + 4x + 6x^2 + o(x^2) \text{ développement limité à l'ordre 2 en 0}$$

$$(1+x)^4 = 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4 + o(x^7) \text{ développement limité à l'ordre 7 en 0}$$

3. La fonction $f(x) = x - x^2 + 2x^3 + x^3 \ln(1+x)$ admet un développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 car $x^3 \ln(1+x) = o(x^3)$, ce qui donne $f(x) = x - x^2 + 2x^3 + o(x^3)$.

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + o(x^n)$$

Démonstration. On a pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et tout entier naturel n,

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x} - \frac{x}{1-x} x^n,$$

donc

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + \frac{x}{1-x} x^n = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n)$$

puisque $\lim_{x \to 0} \frac{x}{1-x} = 0$. Ainsi la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{1-x}$ admet un développement limité à l'ordre n en 0, pour toute valeur de n.

Définition 2.
Soit $a \in \mathbb{R}$, n un entier naturel et f une fonction définie sur un intervalle I contenant a ou d'extrémité a.
On dit que f admet un développement limité à l'ordre n en a si et seulement si, lorsque x tend vers a, on a :

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a)^1 + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$$

Remarque : Pour le développement limité de f en a, on pose $x = a + h$ et on remplace dans f. Quand $x \to a$, on a $h \to 0$ et on fait le développement limité en 0 en h. Ensuite, on revient à x grâce à $h = x - a$... et on ne développe surtout pas les $(x-a)^k$.
Dans la suite du cours, on considérera surtout des développements limités au voisinage de 0.

1.2 Formule de Taylor-Young et existence d'un développement limité

Notation. Une fonction f est dite de classe $\mathcal{C}^n$ si elle est dérivable n fois de suite. Pour noter les premières dérivées, on peut utiliser les "prime" : f' (f dérivée une fois), f'' (f dérivée deux fois), mais au-delà, on utilise un numéro entre parenthèse : $f^{(3)}$ (f dérivée trois fois), $f^{(4)}$ (f dérivée quatre fois), ...

Théorème 3.
(Formule de Taylor-Young) Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle I contenant a, alors f possède un développement limité à l'ordre n en a qui est donné par

$$\forall x \in I, \qquad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^n) \qquad \text{quand} \qquad x \to a$$

$$= f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2} + f'''(a)\frac{(x-a)^3}{6} + \cdots + f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!}$$
$$+ o((x-a)^n)$$

Corollaire 4.

Une fonction f de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle I contenant 0 possède un développement limité à l'ordre n en 0 qui est donné par :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!} + o(x^n)$$

$$= f(0) + f'(0)\,x + f''(0)\frac{x^2}{2} + f'''(0)\frac{x^3}{6} + \cdots + f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

Exemple. La fonction exponentielle est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et elle est égale à ses dérivées successives et en particulier, on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ \exp^{(n)}(0) = \exp(0) = 1$. Elle admet ainsi un développement limité en 0 de tout ordre donné, à l'ordre n par :

$$\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

Exercice 1

On considère $f(x) = \exp(2x+3)$ pour tout x réel. Calculer $f(0), f'(0), f"(0), f^{(3)}(0)$ et en déduire un dl à l'ordre 3 en 0 de f en utilisant la formule de Taylor-Young.

1.3 Propriétés du développement limité

Propriété.

(Unicité du développement limité) Si f est une fonction définie sur I qui admet deux développements limités à l'ordre n en 0

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n) \qquad \text{et} \qquad f(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k + o(x^n),$$

alors les deux développements limités sont les mêmes, autrement dit : $\forall k \in [\![0, n]\!],\ a_k = b_k$.

Propriété.

(Parité et développement limité en 0)

- Si f est une fonction paire qui admet un développement limité en 0, alors son développement limité ne contient que des puissances paires de x.
- Si f est une fonction impaire qui admet un développement limité en 0, alors son développement limité ne contient que des puissances impaires de x.

Remarque : Cette proposition n'admet pas de réciproque : une fonction qui admet des développements limités pairs en 0 à tout ordre n'est pas nécessairement paire. Un développement limité est une propriété locale et on ne peut pas en déduire des propriétés globales sur les fonctions.

Propriété.

(Troncature) Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un point ou une extrémité de I. Si f admet un développement limité à l'ordre n en a qui est

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k + o((x-a)^n)$$

alors f admet un développement limité en a à l'ordre p pour tout $p \leqslant n$ qui est

$$f(x) = \sum_{k=0}^{p} a_k (x-a)^k + o((x-a)^p)$$

Exemple. Si $f(x) = x^2 + 2x^4 + x^5 + o(x^6)$, la troncature à l'ordre 4 du développement limité de f est :

$$f(x) = x^2 + 2x^4 + o(x^4).$$

Opérations autorisées sur les dln Comme les développements limités sont de VRAIES égalité, on peut faire toutes les opérations standards : addition, soustraction, multiplication, division de développement limités... à condition de faire attention aux termes $o(x^n)$. On peut aussi leur appliquer des fonctions ou mettre une fonction à l'intérieur d'un développement limité... Mais toujours en faisant attention au $o(x^n)$ (c.f détails plus loin).

Substitution Dans le développement limité de f en a, on peut remplacer x par n'importe quelle fonction $g(x)$ à condition que $g(x)$ tende vers a aussi !

Exemple. On a pour x tendant vers 0 : $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + o(x^n)$. On remplaçant x par $-x$ qui tend aussi vers 0, on obtient :

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n)$$

1.4 Intégration et dérivation d'un développement limité

Théorème 8.
Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Si f possède un développement limité en a à l'ordre n, alors toute primitive F de f possède un développement limité en a à l'ordre $n+1$. De plus si f admet pour développement limité

$$f(x) = c_0 + c_1 (x-a)^1 + c_2 (x-a)^2 + \cdots + c_n (x-a)^n + o((x-a)^n)$$

alors pour une primitive F de f, on a

$$F(x) = \boxed{F(a)} + c_0 (x-a)^1 + \frac{c_1 (x-a)^2}{2} + \frac{c_2 (x-a)^3}{3} + \cdots + \frac{c_n (x-a)^{n+1}}{n+1}$$

$$+ o((x-a)^{n+1})$$

Remarque : Ce théorème dit que l'on peut formellement intégrer un développement limité terme à terme... à condition de ne pas oublier la constante d'intégration $F(a)$).

Propriété 9.
Soit n un nombre entier et f une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle I contenant le point a. La fonction f admet un développement limité à l'ordre n en a et sa dérivée f' admet un développement limité à l'ordre $n-1$ en a (attention!!), qu'on obtient en dérivant terme à terme le développement limité de f en a :

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2 (x-a)^2 + c_3 (x-a)^3 + \cdots + c_n (x-a)^n + o((x-a)^n)$$

donne en dérivant

$$f'(x) = c_1 + 2c_2 (x-a) + 3c_3 (x-a)^2 + \cdots + nc_n (x-a)^{n-1} + o((x-a)^{n-1})$$

Remarque : Attention en dérivant : on perd un ordre et le terme constant de f !

Exemple. La fonction $f(x) = \frac{1}{1+x}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1, +\infty[$, donc F sa primitive et f' sa dérivée aussi. Le développement limité à l'ordre 3 en 0 de f est $f(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3)$. On peut en déduire un développement limité en 0 à l'ordre 4 de $F(x) = \ln(1+x)$ et à l'ordre 2 de $f'(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}$:

$$\ln(1+x) = \ln 1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4); \quad \frac{-1}{(1+x)^2} = -1 + 2x - 3x^2 + o(x^2)$$

Exercice 2

On considère $f(x) = \exp(2x+3)$ pour tout x réel. On sait qu'un développement limité à l'ordre 3 en 0 de f est

$$f(x) = e^3 + 2e^3 x + 2e^3 x^2 + \frac{4e^3}{3} x^3 + o(x^3)$$

1. En déduire un dl à l'ordre 4 de la primitive $F(x) = \int_0^x \exp(2t+3)dt$ de f
2. Déterminer un dl à l'ordre 2 de la dérivée de f.

1.5 Développements limités classiques

Attention ces développements limités ne sont valables que pour x au voisinage de 0.

$$\begin{array}{rcccccccccl}
\exp(x) = & 1 & +x & +\frac{x^2}{2!} & +\frac{x^3}{3!} & +\frac{x^4}{4!} & +\frac{x^5}{5!} & +\frac{x^6}{6!} & +\cdots & \Rightarrow \frac{x^k}{k!} \\
\operatorname{ch} x = & 1 & & +\frac{x^2}{2!} & & +\frac{x^4}{4!} & & +\frac{x^6}{6!} & +\cdots & \Rightarrow \frac{x^{2k}}{(2k)!} \\
\operatorname{sh} x = & & x & & +\frac{x^3}{3!} & & +\frac{x^5}{5!} & & +\cdots & \Rightarrow \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
\cos x = & 1 & & -\frac{x^2}{2!} & & +\frac{x^4}{4!} & & -\frac{x^6}{6!} & +\cdots & \Rightarrow (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \\
\sin x = & & x & & -\frac{x^3}{3!} & & +\frac{x^5}{5!} & & +\cdots & \Rightarrow (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}
\end{array}$$

Remarque : On utilise $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$, $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$ pour obtenir ces développements limités à partir de celui de l'exponentielle.

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \cdots - \frac{x^n}{n} + o(x^n) \quad \left(\text{en intégrant } \frac{-1}{1-x}\right)$$

$$\operatorname{Arctan}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + o(x^n) \quad \text{Modèle : } (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

Remarque : On part de $\frac{1}{1-x}$ et on remplace x par $-x^2$ pour obtenir $\frac{1}{1+x^2}$. Puis on intègre pour obtenir l'arctan.

$$(1+x)^\alpha = 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$$
$$+o(x^n)$$

Exemple. Pour $\alpha = \frac{1}{2}$, si on veut un développement limité à l'ordre 2 de $\sqrt{1+x} = 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+o(x^2)$.

$$\mathrm{Arcsin}(x) = x+\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{40}x^5+o(x^5) \qquad \mathrm{Arccos}(x) = \frac{\pi}{2}-x-\frac{1}{6}x^3-\frac{3}{40}x^5+o(x^5)$$

Remarque : Si on a besoin de plus que l'ordre 5, on fait un développement limité de $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ avec la formule $(1+x)^\alpha$ et en remplaçant x par $-x^2$. Puis on intègre pour avoir l'arcsin ou l'arccos.

2 Opérations sur les développements limités

2.1 Le formulaire non-officiel des o().

L'avantage des développements limités (par rapport aux équivalents), c'est qu'il s'agit d'une véritable égalité. Toutes les opérations sont autorisées (on va voir addition, multiplication, composition plus loin) à conditions qu'on sache gérer les $o(x^n)$ avec $n \in \mathbb{Z}$, qui sont des fonctions inconnues qui tendent vers 0 à une certaine vitesse. On peut voir le o comme une notation qui avale tout ce qui est superflu, sauf la puissance de x. Soient n et p deux entiers relatifs et a un réel, on se place au voisinage de 0. Voilà quelques formules utiles :

1. $o(x^0) = o(1)$ est simplement une quantité qui tend vers 0 en 0.
2. $o(-x^n) = o(x^n)$ et $o(ax^n) = o(x^n)$: les constantes et les signes sont avalées par o.
3. Si $n \leqslant p$, $o(x^n) \pm o(x^p) = o(x^n)$ et $o(x^n) \pm ax^p = o(x^n)$. Le o avale les puissances supérieures ou égale à lui dans les additions et les soustractions.
4. $o(x^n) \times o(x^p) = o(x^{n+p})$, $o(x^n) \times ax^p = o(x^{n+p})$, et $\frac{o(x^n)}{ax^p} = o(x^{n-p})$. En multiplication ou en division, on peut regrouper et simplifier des puissances. On peut aussi en factoriser en les faisant sortir du o.

2.2 Opérations simples

Pour faire des addition, soustraction et multiplication avec des développement limités, on développe les opérations "à la main". Mais on ne conserve aucune des puissances qui dépasse la puissance du plus petit $o(x^n)$.

Exemple. Développement limité à l'ordre 3 de $e^x + e^{-x}$
On a $e^x = 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)$ et $e^{-x} = 1+(-x)+\frac{(-x)^2}{2}+\frac{(-x)^3}{6}+o(x^3)$. Donc

$$e^x+e^{-x} = 1+1+x-x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}-\frac{x^3}{6}+o(x^3) = 2+x^2+o(x^3)$$

Exemple. Développement limité à l'ordre 3 de $(2+x)e^x$. On a $e^x = 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)$ et $2+x = 2+x+o(x^3)$. Donc

$$(2+x)e^x = (2+x)\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)$$
$$= 2+2x+x^2+\frac{x^3}{3}+o(x^3)+x+x^2+\frac{x^3}{2}+\frac{x^4}{6}+o(x^4)$$
$$= 2+3x+2x^2+\frac{5x^3}{6}+o(x^3)$$

Exercice 3

Ecrire un développement limité à l'ordre 1 en 0 de toutes les fonctions présente dans la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\tan(x)}{\sin(x)+\mathrm{e}^x-1}$ et simplifier. En déduire la limite de f en 0.

2.3 Développement limité d'une composée

Soit u une fonction continue de I dans $\mathbb{R}$ admettant un dl à l'ordre n au voisinage de $a \in I$:

$$u(x) = u(a)+c_1(x-a)+c_2(x-a)^2+\cdots+c_n(x-a)^n+o((x-a)^n)$$

et f une fonction continue de $J = u(I)$ dans $\mathbb{R}$ admettant un dl à l'ordre n au voisinage de $b = u(a)$:

$$f(y) = d_0+d_1(y-b)+d_2(y-b)^2+\cdots+d_n(y-b)^n+o((y-b)^n).$$

On désire calculer le dl à l'ordre n de $f \circ u$ en a.
on a

$$f\circ u(x) = f(u(x)) = f\Big(u(a)+c_1(x-a)+c_2(x-a)^2+\cdots+c_n(x-a)^n+o((x-a)^n)\Big)$$

On remplace y par tout le développement limité de u (sauf le $o((x-a)^n)$), et comme $u(a) = b$, il reste :

$$f\circ u(x) = d_0+d_1\Big(c_1(x-a)+c_2(x-a)^2+\cdots+c_n(x-a)^n\Big)$$

$$+d_2\Big(c_1(x-a)+c_2(x-a)^2+\cdots+c_n(x-a)^n\Big)^2+\cdots$$

$$+d_n\Big(c_1(x-a)+c_2(x-a)^2+\cdots+c_n(x-a)^n\Big)^n+o((x-a)^n).$$

On développe les parenthèses en ne conservant (et en ne calculant !) que les termes de puissances inférieure à n.

Exemple. Calculons le dl à l'ordre 4 au voisinage de 0 de la fonction $g : x \mapsto \mathrm{e}^{\sin(x)}$. Le dl4 du sinus en 0 est $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$, on a

$$g(x) = e^{x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)} = e^y \quad \to \quad y = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$$

$$= 1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{6} + \frac{y^4}{24} + o(y^4)$$

$$= 1 + \left(x - \frac{x^3}{6}\right) + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^3 + \frac{1}{24}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^4 + o(x^4)$$

$$= 1 + x - \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{x^4}{3}\right) + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{3x^4}{24} + o(x^4)$$

Lors des calculs, on peut s'arrêter dès que l'on obtient des termes de puissance dépassant celle du petit o.

Exercice 4

Calculer le développement limité d'ordre 4 au voisinage de 0 de la fonction $g : x \mapsto \ln(\cos(x))$.

2.4 Développement limité d'un quotient

Propriété 10.

Soit f et g deux fonctions définies sur I et admettant un développement limité au voisinage de a. Si $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$ alors $\frac{f}{g}$ admet un dl à l'ordre n en a.

Technique. Le développement limité de $\frac{1}{g}$ On écrit le développement limité de g en a :

$$g(x) = d_0 + d_1(x-a) + d_2(x-a)^2 + \cdots + d_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$$

Si $d_0 \neq 0$, alors on peut factoriser par d_0 et on a

$$\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{d_0} \times \frac{1}{1 + \frac{d_1}{d_0}(x-a) + \frac{d_2}{d_0}(x-a)^2 + \cdots + \frac{d_n}{d_0}(x-a)^n + o((x-a)^n)}.$$

En posant $y = \frac{d_1}{d_0}(x-a) + \frac{d_2}{d_0}(x-a)^2 + \cdots + \frac{d_n}{d_0}(x-a)^n + o((x-a)^n)$ et en utilisant dl de $\frac{1}{1+y}$, on obtiendra le dl de $\frac{1}{g(x)}$.

Exemple. Montrons que le dl de tan à l'ordre 5 en 0 est

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)$$

On a $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$ et $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$. On cherche

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\right)\frac{1}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)}$$

On utilise $\frac{1}{1+y} = 1 - y + y^2 - y^3 + y^4 - y^5 + o(y^5)$ en remplaçant y par $-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$. On a alors

$$\tan x = \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} \underbrace{- \frac{x^4}{24} + \frac{x^4}{4}}_{5x^4/24} + o(x^5)\right)$$

$$= x + \frac{x^3}{2} + \frac{5x^5}{24} - \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{12} + \frac{x^5}{120} + o(x^5) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{16x^5}{120} + o(x^5) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)$$

Remarque : Si $\lim_{x\to a} g = 0$, il se peut que $\frac{f}{g}$ admette tout de même un dl en a (il faut bien sur que f ait également une limite nulle). Si les dl de g et de f commencent par la même puissance de x alors on peut simplifier les deux dl par cette puissance de x.

Exemple. Calculons le dl de $\dfrac{\ln(1+x)}{\ln(1-x)}$ à l'ordre 2 au voisinage de 0.

$$\frac{\ln(1+x)}{\ln(1-x)} = \frac{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)}{-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)} = \frac{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)}{-\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right)}$$

$$= -\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right)\left(1 - \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3}\right) + \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3}\right)^2 + o(x^2)\right)$$

$$= \left(-1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right)\left(1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{12} + o(x^2)\right)$$

$$= -1 + x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

3 Applications des développements limités

3.1 Recherche de limites et d'équivalents

Si f admet un dl en a du type

$$f(x) = \sum_{k=p}^{n} c_k (x-a)^k + o((x-a)^n) \qquad \text{lorsque } x \longrightarrow a \quad \text{avec } c_p \neq 0$$

et $0 \leqslant p \leqslant n$, alors

$$f(x) \underset{a}{\sim} c_p (x-a)^p$$

f est équivalent au premier terme non nul de son développement limité.

Exemple.

1. On cherche $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} - 1}{x^2}$. On commence par trouver un équivalent en 0 de

$$\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} - 1 =$$

$$\frac{\left(1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}+o(x^3)\right) - \left(1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}-\frac{x^3}{16}+o(x^3)\right)}{x} - 1$$

$$= \frac{x+\frac{x^3}{8}+o(x^3)}{x} - 1 = 1 + \frac{x^2}{8} + o(x^2) - 1 = \frac{x^2}{8} + o(x^2) \sim \frac{x^2}{8}$$

Donc

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} - 1}{x^2} = \frac{1}{8}$$

2. Déterminer un équivalent au voisinage de $+\infty$ de

$$f(x) = \exp(\frac{1}{x}) - \frac{x(x+1)}{1+x^2}.$$

On cherche les termes dominants

$$f(x) = \exp(\frac{1}{x}) - \frac{x^2(1+1/x)}{x^2(1+1/x^2)} = \exp(\frac{1}{x}) - \frac{1+\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x^2}}$$

On pose $\boxed{y = \dfrac{1}{x}}$ avec $\boxed{y \to 0}$

$$f(x) = e^y - \frac{1+y}{1+y^2}$$

On fait un développement limité.

$$f(x) = \left(1 + y + \frac{y^2}{2} + o(y^2)\right) - (1+y)\left(1 - y^2 + o(y^2)\right)$$

$$f(x) = \frac{3y^2}{2} + o(y^2) = \frac{3}{2x^2} + o_\infty(\frac{1}{x^2})$$

donc $f(x) \sim_\infty \frac{3}{2x^2}$.

Exercice 5

A l'aide d'un développement limité, déterminer la limite suivante :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - \sin(5x)}{\sin(x) + \sin(5x)}$$

3.2 Recherche de tangente et position de la courbe par rapport à sa tangente

Si une fonction f possède un DL d'ordre 1 au voisinage de a :

$$f(x) = \underbrace{c_0 + c_1(x-a)}_{T} + o(x-a)$$

alors T est l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a.
Si on peut pousser ce DL à un ordre supérieur, le premier terme non nul qui suit permet de préciser la position de la courbe par rapport à cette tangente au voisinage du point d'abscisse a (étude du signe de $f - T$).

Exemple. Déterminer la tangente en 0 de la fonction $f : x \mapsto \ln(x^2+2x+2)$ ainsi que la position de la courbe par rapport à cette tangente.
On doit faire apparaitre $\ln(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + o(y^3)$ donc on factorise le 2 :

$$f(x) = \ln\left(2\left[1 + x + \frac{x^2}{2}\right]\right) = \ln 2 + \ln\left(1 + \boxed{x + \frac{x^2}{2}}\right)$$

$$= \ln 2 + \left(x + \frac{x^2}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(x + \frac{x^2}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(x + \frac{x^2}{2}\right)^3 + o(x^3)$$

$$\ln(x^2+2x+2) = \ln 2 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) = (\ln 2 + x) - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

Donc la tangente à la courbe en 0 est $T(x) = \ln 2 + x$.
Au voisinage de 0, on a

$$f(x) - T(x) = -\frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

Pour $x < 0$ au voisinage de 0, on a $f(x) - T > 0$ donc f est au-dessus de la tangente.
Pour $x > 0$ au voisinage de 0, on a $f(x) - T < 0$ donc f est en-dessous de la tangente.
La courbe croise la tangente en 0.

Exercice 6

1. Calculer le dl à l'ordre 4 en 0 de $\cos x + \operatorname{ch} x$.
2. En déduire la tangente à la courbe de $x \to \cos x + \operatorname{ch} x$ au point $x = 0$ ainsi que la position de la courbe par rapport à la tangente.

3.3 Recherche d'une asymptote et position de la courbe par rapport à son asymptote

Quand x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$, on pose $\boxed{h = \frac{1}{x}}$ pour se ramener à une variable tendant vers 0. On peut alors utiliser un DL.

Exemple. Trouver les asymptotes de la courbe représentative de la fonction $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$ et les placer par rapport à cette courbe.
En $+\infty$, on factorise par les termes dominants

$$f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} = x\sqrt{1 + 1/x + 1/x^2}$$

On pose $h = \frac{1}{x}$, alors $h \to 0^+$

$$f(x) = \frac{1}{h}\sqrt{1 + h + h^2} = \frac{1}{h}\left(1 + \frac{h + h^2}{2} - \frac{(h + h^2)^2}{8} + o(h^2)\right)$$
$$= \frac{1}{h} + \frac{1}{2} + \frac{3}{8}h + o(h) = x + \frac{1}{2} + \frac{3}{8x} + o(\frac{1}{x})$$

Donc $A(x) = x + \frac{1}{2}$ est asymptote à la courbe en $+\infty$.

$$f(x) - A(x) = \frac{3}{8x} + o_\infty(1/x) > 0$$

f est au-dessus de son asymptote.

En $-\infty$, on a de même

$$f(x) = -x\sqrt{1 + 1/x + 1/x^2} = -x - \frac{1}{2} - \frac{3}{8x} + o(1/x)$$

Donc $A(x) = -x - \frac{1}{2}$ est asymptote à la courbe en $-\infty$.

$$f(x) - A(x) = -\frac{3}{8x} + o_\infty(1/x) > 0$$

f est au-dessus de son asymptote.

4 TD 19 Développements limités

Exercice 1

($\star\star$) Déterminer le développement limité à l'ordre n en a des fonctions f suivantes :

$f_1(x) = \exp(x) - \frac{1}{2}\ln(1-x)$	$n = 3$	$a = 0$
$f_2(x) = \sqrt{1+x^2} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$n = 6$	$a = 0$
$f_3(x) = \sqrt{1+x}\,\arcsin(x)$	$n = 4$	$a = 0$
$f_4(x) = \cos^2(x)$	$n = 6$	$a = 0$
$f_5(x) = \cos(\sin(x))$	$n = 6$	$a = 0$
$f_6(x) = \exp(\cos(x))$	$n = 4$	$a = 0$
$f_7(x) = \operatorname{th}(x)$	$n = 5$	$a = 0$
$f_8(x) = \frac{\arctan(x)}{\arcsin(x)}$	$n = 4$	$a = 0$
$f_9(x) = \cos(x)$	$n = 4$	$a = \frac{\pi}{3}$
$f_{10}(x) = \ln(x)$	$n = 4$	$a = \mathrm{e}$
$f_{11}(x) = \exp(x)$	$n = 4$	$a = 2$
$f_{12}(x) = \frac{1}{x}$	$n = 4$	$a = 2$
$f_{13}(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$	$n = 3$	$a = 0$
$f_{14}(x) = \int_x^{x^2} \sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t$	$n = 4$	$a = 0$

Exercice 2

($\star\star\star$) Déterminer le développement limité à l'ordre 7 en 0 de la fonction tangente, en exploitant la relation qui existe entre cette fonction et sa dérivée.

Exercice 3

Déterminer les limites suivantes (avec les développements limités) :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{\sin(x)}}{x^3}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}{x},$$

$$\lim_{x\to 0} \left(\cos(x) + \frac{1}{2}\sin^2(x)\right)^{1/x^4}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - x\cos(x)}{\operatorname{sh}(x) - x\operatorname{ch}(x)},$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\exp(\arctan(x)) - \exp(\tan(x))}{\exp(\arcsin(x)) - \exp(\sin(x))}.$$

Exercice 4

($\star\star$)

1. Calculer le dl à l'ordre 2 en 0 de $\frac{e^x}{1-x}$
2. En déduire la tangente à la courbe de $x \to \frac{e^x}{1-x}$ au point $x = 0$ ainsi que la position de la courbe par rapport à la tangente.

Exercice 5

($\star\star$) On pose $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ pour $x \neq 0$. Déterminer l'asymptote à la courbe de f quand $x \to +\infty$ ainsi que la position de la courbe par rapport à l'asymtpote.

Exercice 6

($\star\star$) Etudier l'existence d'une tangente en 0 et la position de la courbe par rapport à cette tangente pour la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad f(x) = \frac{1}{x}\ln\left(\frac{\mathrm{e}^x - 1}{x}\right).$$

Exercice 7

($\star\star$) Etudier l'existence d'asymptotes et la position de la courbe par rapport à ces asymptotes pour les fonctions définies par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt[3]{x^2(x-2)} \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \mathbb{R}^* \setminus \{-1\}, \quad g(x) = \frac{x^2 - x + 2}{x+1}\,\mathrm{e}^{-1/x}.$$

Exercice 8

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = x\sqrt{\frac{x-1}{3x+1}}$$

1. On donne le tableau de variation (incomplet) de f :

x	$-\infty$		α		$?$		$?$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$		$\|\|$	$+$	
$f(x)$	$?$	$\nearrow$	$?$	$\searrow$	$?$		$?$	$\nearrow$	$?$

avec $||$ symbolisant des valeurs non définies, et α un reél. On prendra $\alpha \approx -\frac{1}{2}$. Compléter les limites et les valeurs remarquables du tableau.

2. Déterminer les équations des asymptotes de f en $+\infty$ et $-\infty$ ainsi que la position de la courbe par rapport aux asymptotes.
3. Tracer le graphe de f , ainsi que les asymptotes et les tangentes particulières.