18. Déterminants

1 Déterminant d'une matrice carrée

Le déterminant d'une matrice (toujours carrée) se note avec deux barres verticales à la place des parenthèses de la matrice. On va calculer les déterminants en augmentant progressivement la taille de la matrice.
Déterminant d'une matrice carrée de taille 1. Le déterminant de la matrice $A = (a)$ est $\det(A) = a$.

Déterminant d'une matrice carrée de taille 2. Le déterminant de la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ est le scalaire

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Déterminant d'une matrice carrée de taille 3. Le déterminant de la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix}$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ est le scalaire

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} = aek + bfg + cdh - ceg - bdk - afh. \qquad \text{(Règle de Sarrus)}$$

Au lieu de la règle de Sarrus, il vaut beaucoup mieux utiliser le développement en ligne ou colonne (précédé de quelques opérations de simplification, qu'on va voir plus loin) pour calculer un déterminant.

1.1 Technique du développement en ligne ou en colonne.

On choisit UNE ligne OU UNE colonne (entourez-la, c'est plus clair). Ensuite, on suit la ligne, coefficient par coefficient. A chaque fois, on ajoute un terme contenant trois éléments multipliés :

1. le coefficient
2. un signe $+$ ou $-$, en sachant que le tout premier coefficient en haut à gauche de la matrice est toujours un $+$ et que les signes sont disposés en damier.

$$\begin{vmatrix} ^{(+)}a & ^{(-)}b & ^{(+)}c \\ ^{(-)}d & ^{(+)}e & ^{(-)}f \\ ^{(+)}g & ^{(-)}h & ^{(+)}k \end{vmatrix}$$

3. le déterminant de départ où on a enlevé la ligne et la colonne du coefficient.

Quelque soit le choix de la ligne ou de la colonne, on aura toujours le même résultat.

Exemple. Calculer

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & -3 \end{vmatrix}$$

Déterminant d'une matrice carrée de taille n. On ne verra pas la formule exacte définissant un déterminant pour une matrice carré de taille n quelconque. On va utiliser uniquement le développement en ligne et en colonne, qui est valable quelque soit la taille de la matrice.

Par exemple, on calcule le déterminant d'une matrice carré d'ordre $n = 4$:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{vmatrix} = a_{1,1} \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{vmatrix} - a_{2,1} \begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{vmatrix}$$
$$+ a_{3,1} \begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{vmatrix} - a_{4,1} \begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \end{vmatrix}.$$

il reste à calculer des déterminants de matrices d'ordre 3, qu'on développe pour avoir des déterminants de taille 2.

Pour une matrice d'ordre 5, en faisant un développement en ligne ou colonne, on se ramène à des déterminants d'ordre 4, qu'on re-développe pour se ramener à des déterminants d'ordre 3...... Finalement, quelque soit la taille de la matrice, on arrivera toujours à revenir à des déterminant de taille 2 ou 3.

Exemple. Calculer le déterminant de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Une application de la méthode de développement en ligne et en colonne donne les résultats suivants :

Propriété 1.
Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit de ses coefficients diagonaux.
Le déterminant d'une matrice diagonale est le produit de ses coefficients diagonaux.
Une matrice contenant une colonne (ou une ligne) de zéros a un déterminant nul.

Exemple.

$$\begin{vmatrix} 2 & 24 & -78 \\ 0 & -3 & 45 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \times (-3) \times 1 = -6$$

Pour simplifier le calcul du déterminant, avant de faire un développement en ligne ou en colonne, on peut faire apparaître des 0 dans certaines lignes ou colonnes par des opérations de type "pivot".

1.2 Opérations sur les lignes et colonnes

Dans un déterminant (Attention, uniquement dans un déterminant, pas dans une matrice), on peut faire des opérations sur les lignes et les colonnes comme celles utilisées lors des pivots. Selon l'opération, ça modifie le déterminant ou pas.

Considérons une opération sur les lignes d'une matrice, transformant une matrice A en une nouvelle matrice A'. Alors, selon l'opération, le déterminant va changer aussi. Précisément,

— L'opération d'échange de ligne $L_i \leftrightarrow L_j$ change le signe du déterminant : $\det A' = -\det A$
— L'opération de multiplication $\boxed{\text{d'une}}$ ligne $L_i \leftarrow \alpha L_i$ multiplie le déterminant : $\det A' = \alpha \det A$.
— L'opération $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$ avec L_j une $\boxed{\text{autre}}$ ligne ne change pas le déterminant : $\det A' = \det A$

Et pareil pour les opérations sur les colonnes.

— L'opération d'échange de colonne $C_i \leftrightarrow C_j$ change le signe du déterminant : $\det A' = -\det A$
— L'opération de multiplication $\boxed{\text{d'une}}$ colonne $C_i \leftarrow \alpha C_i$ multiplie le déterminant : $\det A' = \alpha \det A$.
— L'opération $C_i \leftarrow C_i + \alpha C_j$ avec C_j une $\boxed{\text{autre}}$ colonne ne change pas le déterminant : $\det A' = \det A$

Quand on modifie la matrice A pour calculer son déterminant, on peut faire sans aucun risque les opérations $C_i \leftarrow C_i + \alpha C_j$ et $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$. Mais pour les échanges et la multiplication par un nombre, il faudra alors "corriger" la modification du déterminant en rajoutant un - ou en divisant par le nombre.

En utilisant les opérations sur les lignes et colonnes d'une matrice, on pourrait même se ramener à une matrice diagonale (en faisant un pivot de Gauss total) dont le déterminant est très facile à calculer. Mais en pratique, ce n'est pas la peine. On se contente de faire apparaitre le maximum de 0 sur une ligne ou une colonne, avant de développer.

Remarque : En application de cette méthode, une matrice qui a deux colonnes identiques ou deux lignes identiques a un déterminant nul.

Exemple. On calcule

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & -3 \end{vmatrix}$$

1.3 Déterminant d'une famille de vecteurs

Grâce aux matrices, on peut faire des déterminants avec des vecteurs. Mais attention, avec un nombre précis de vecteurs uniquement !

Définition 2. Soit $n \geqslant 1$ un entier et $\mathcal{B}$ une base de $\mathbb{R}^n$. Le déterminant d'une famille $(V_1, V_2, \ldots, V_n)$ de vecteurs de E dans la base $\mathcal{B}$, noté $\det_{\mathcal{B}}(V_1, V_2, \ldots, V_n)$, est le déterminant de la matrice formée en mettant côte à côte en colonne les coordonnées de ces vecteurs dans la base $\mathcal{B}$, autrement dit :

$$\det_{\mathcal{B}}(V_1, V_2, \ldots, V_n) = \det\big(\mathcal{M}(V_1, V_2, \ldots, V_n)\big).$$

Remarque : On retrouve le déterminant d'une famille de deux vecteurs dans le plan, ou d'une famille de trois vecteurs dans l'espace, qu'on avait vu en géométrie en début d'année.

2 Propriétés des déterminants

Théorème 3. Le déterminant vérifie les propriétés suivantes :

1. Si $A \in \mathcal{M}(n, n)$, A est inversible si et seulement si $\det A \neq 0$
2. $\forall A, B \in \mathcal{M}(n, n)$, $\det AB = \det A \times \det B$

En application du premier point de ce théorème, nous avons les résultats suivants

— Une famille de vecteurs est une base si et seulement si son déterminant est non nul.
— Une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ est bijective si et seulement si le déterminant de sa matrice est non nul

Propriété 4.

Le déterminant vérifie les propriétés supplémentaires suivantes :

1. Si $A \in \mathcal{M}(n,n)$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, alors $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$.
2. Le déterminant d'une matrice carré est égal au déterminant de sa transposée.
3. $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

Déterminant par bloc Quand il y a un gros bloc de zéros dans une matrice, on peut simplifier le calcul du déterminant par le résultat suivant.

Propriété 5.

On note A, B deux carrés de nombre et C un rectangle de nombre situés dans une matrice. On a

$$\begin{vmatrix} A & C \\ 0 & B \end{vmatrix} = \det(A)\det(B) \qquad \text{et} \qquad \begin{vmatrix} B & 0 \\ C & A \end{vmatrix} = \det(B)\det(A).$$

Exemple. Factoriser le polynôme

$$P : \lambda \to P(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & -613 & 1239 & -521 \\ 1 & 1-\lambda & -234 & -32 & 12 \\ 0 & 0 & -1-\lambda & 2 & -6 \\ 0 & 0 & -6 & 7-\lambda & -12 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & -4-\lambda \end{vmatrix}$$

Exercice 1

($\star$) Développer le déterminant suivant selon la deuxième colonne :

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 9 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

Exercice 2

($\star$) Faire successivement les opérations $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$ et $C_2 \leftarrow C_2 + 3C_1$ sur le déterminant suivant, puis développer selon la dernière ligne.

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 9 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

Exercice 3

Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Calculer les déterminants suivants sous forme factorisée :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ (a+1)^2 & (b+1)^2 & (c+1)^2 \\ (a+2)^2 & (b+2)^2 & (c+2)^2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & \cos(a) & \cos(2a) \\ 1 & \cos(b) & \cos(2b) \\ 1 & \cos(c) & \cos(2c) \end{vmatrix}$$

Exercice 4

($\star\star$) Pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{R}$ les matrices suivantes sont-elles inversibles ?

$$\begin{pmatrix} a-2 & 4 & 3 \\ 1 & a+1 & -2 \\ 0 & 0 & a-4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ a^2 & 1 & a \\ a & a^2 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 5

($\star\star$) Calculer le déterminant de la matrice de taille n dont tous les termes sont nuls, sauf une diagonale de 1 allant du bas gauche au haut droit (diagonale dans l'autre sens).

Exercice 6

($\star\star$) Déterminer $m \in \mathbb{R}$ tel que $\big((m+1, m-1); (4, m-1)\big)$ soit une base de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 7

(⋆⋆) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $\lambda \in \mathbb{R}$ pour que l'endomorphisme

$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+y+2z, (1+\lambda)y - 2z, (3+2\lambda)z) \end{array}$$

soit un automorphisme.

Exercice 8

(⋆⋆) Montrer que le déterminant d'une matrice antisymétrique de taille 3 est nul. Est-ce vrai pour une matrice antisymétrique de taille 2 ?

Fiche de révision XVIII : Déterminant

Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, alors det A se note comment et vaut combien ?	$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$
Si A est une matrice carrée de taille plus grande que 2, quelle méthode utiliser pour calculer son déterminant.	D'abord on simplifie le déterminant avec les opérations de ligne/colonne. Puis on fait un développement en choisissant une ligne ou une colonne.
Comment faire pour calculer le déterminant d'une matrice non carrée ?	ça n'existe pas !
Développer $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$ par rapport à la première ligne, sans calculer les déterminants de taille 2.	$a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - d\begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} + g\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}$
Développer $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$ par rapport à la deuxième colonne, sans calculer les déterminants de taille 2.	$-b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + e\begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix} - h\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}$
Le déterminant d'une matrice triangulaire est	le produit de ses coefficients diagonaux.
Le déterminant d'une matrice diagonale est....	le produit de ses coefficients diagonaux.
Une matrice contenant une colonne (ou une ligne) de zéros a un déterminant égal à ...	0
Donner les opérations sur la ligne L_j qui ne changent PAS le déterminant.	$L_j \leftarrow L_j + aL_i$ avec a un nombre et L_i une autre ligne.
Donner les opérations sur la colonne C_j qui ne changent PAS le déterminant.	$C_j \leftarrow C_j + aC_i$ avec a un nombre et C_i une autre colonne.
Dans $\mathbb{R}^n$, on peut calculer le déterminant d'une famille de combien de vecteur ? Comment faire ?	Il faut n vecteurs, on met les vecteurs côte à côte en colonne pour faire la matrice de la famille, puis on calcule le déterminant de la matrice.
Quel est le lien entre inversibilité de la matrice A et déterminant ?	A est inversible si et seulement si $\det A \neq 0$.
$\det(AB) = ?$	$\det A \times \det B$
Une famille de vecteurs est une base si et seulement si son déterminant est	différent de 0.
Une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ est bijective si et seulement si le déterminant de sa matrice est	différent de 0.
$\det(A^{-1}) = ?$	$\frac{1}{\det(A)}$

On note A, B deux carrés de nombre et C un rectangle de nombre situés dans une matrice. On a $\begin{vmatrix} A & C \\ 0 & B \end{vmatrix} = ?$	$\det(A)\det(B)$