

16. Équations différentielles linéaires

Dans tout ce chapitre, \mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} et I un intervalle de \mathbb{R} non réduit à un point.

Définition 1.

On dit qu'une fonction définie sur un intervalle I à valeurs dans \mathbb{C} est dérivable sur I si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire le sont. Dans ce cas, on a $f' = (\operatorname{Re}(f))' + i(\operatorname{Im}(f))'$.

Exemple. $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{C}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et : $\forall t \in]0, +\infty[, f'(t) = \frac{1}{t} - i \sin(t)$.

Propriété 2.

Soit $a \in \mathbb{C}$. La fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est dérivable sur \mathbb{R} et l'on a :
 $\forall t \in \mathbb{R}, f'(t) = a e^{at}$.

Les règles usuelles de dérivation (somme, produit...) sont valables pour les fonctions à valeurs complexes.

Principe de résolution d'une équation différentielle linéaire :

0. On observe l'équation pour identifier l'ordre (la plus grande dérivée) et éventuellement, on met l'équation en forme.
1. On détermine les solutions y_h homogène associée.
2. On "devine" la forme d'une solution particulière de (E) qu'on note y_p . On reporte y_p dans l'équation (E) afin de la déterminer complètement.
3. On additionne $y = y_h + y_p$
4. On utilise éventuellement les conditions initiales pour déterminer les constantes.

1 Équations différentielles linéaires du premier ordre

1.1 Définitions

Définition 3.

On appelle **équation différentielle linéaire du premier ordre** sur I toute équation du type :

$$(E) : \quad \forall t \in I, \quad \alpha(t)y'(t) + \beta(t)y(t) = \gamma(t),$$

où $\alpha, \beta, \gamma : I \rightarrow \mathbb{K}$ sont des fonctions continues sur I et $y : I \rightarrow \mathbb{K}$ est une fonction **inconnue** dérivable sur l'intervalle I .

On appelle **solution de (E) sur I** toute fonction f de I dans \mathbb{K} , dérivable sur I et telle que :

$$\forall t \in I, \quad \alpha(t)f'(t) + \beta(t)f(t) = \gamma(t).$$

Le graphe d'une solution est appelée une *courbe intégrale* de (E) .

Dans la pratique, on écrit (E) sans la variable de l'inconnue y :

$$(E) : \quad \alpha(t)y' + \beta(t)y = \gamma(t),$$

Exemple. (exo) Montrer que la fonction $f(t) = \frac{t^2}{2}e^t$ est une solution sur \mathbb{R} de l'équation différentielle $(E) : y' - y = te^t$.

1.2 Résolution de l'équation en pratique

On veut résoudre l'équation $(E) : \quad \alpha(t)y' + \beta(t)y = \gamma(t)$.

Avant toute chose, on se place sur un intervalle I où α ne s'annule pas. C'est l'intervalle de définition des fonctions. On divise alors l'équation (E) par $\alpha(t)$, pour obtenir :

$$y' + a(t)y = b(t) \quad \text{avec } a(t) = \frac{\beta(t)}{\alpha(t)}, b(t) = \frac{\gamma(t)}{\alpha(t)}, \quad \forall t \in I$$

1.3 Etape 1 : Equation homogène

Définition 4.

On appelle **équation homogène associée à (E)** (ou *équation sans second membre*) l'équation homogène, notée (E_h) , définie par :

$$(E_h) : \quad \forall t \in I, \quad y' + a(t)y = 0.$$

Remarque : Le mot *homogène* signifie que le second membre de l'équation est la fonction nulle ($= 0$).

Propriété 5.

Soit a une fonction continue de I dans \mathbb{K} . Les solutions de l'équation différentielle homogène

$$(E_h) : y' + a(t)y = 0$$

sont **toutes les fonctions** y_h **de la forme :**

$$\forall t \in I, y_h(t) = \lambda e^{-A(t)},$$

où $\lambda \in \mathbb{K}$ est une constante et A est une primitive de la fonction a sur I .

Exemple. (exo) Résoudre sur \mathbb{R} l'équation différentielle $(E) : y' + \frac{t}{t^2+1}y = 0 = 0$.

1.4 Etape 2 : Solution particulière de l'équation avec second membre

On revient à l'équation avec second membre : $(E) : y' + a(t)y = b(t)$.

Pour trouver y_p une solution particulière de (E) , on doit "deviner" la forme de y_p . Puis on reporte dans l'équation (E) , c'est-à-dire qu'on calcule $y_p' + a(t)y_p = b(t)$. On se sert de l'égalité pour déterminer complètement y_p .

Pour "deviner" la forme de y_p , il y a essentiellement trois méthodes : reconnaître un cas du cours, faire la variation de la constante... ou avoir du flair (mais ça, c'est avec la pratique que ça vient).

lorsque a est une constante (les cas faciles)

On cherche y_p solution particulière qui "ressemble" à $b(t)$ le second membre.

Si b est un polynôme P , c'est-à-dire $b(t) = P(t)$. On cherche alors une solution particulière y_p de (E) de la forme

$$y_p(t) = R(t)$$

où R est un polynôme inconnu **de même degré** que P . On détermine les coefficients de R en reportant y_p dans l'équation (E) .

Si b est de la forme $b(t) = P(t)e^{mt}$, m étant un élément de \mathbb{K} et P un polynôme.

On cherche alors une solution particulière y_p sous la forme :

- $y_p(t) = R(t)e^{mt}$ si $m \neq -a$ (quand l'exponentielle du second membre n'est pas la même que celle de la solution homogène)
- $y_p(t) = t \times R(t)e^{mt}$ si $m = -a$ (quand l'exponentielle du second membre est la même que celle de la solution homogène!)

où R est un polynôme inconnu **de même degré** que P . On détermine les coefficients de R en reportant y_p dans l'équation (E) .

Exemple. Déterminer une solution particulière y_p sur \mathbb{R} des équations différentielles

$$(E_1) : y' - 2y = (t+1)e^{-t} \quad \text{et} \quad (E_2) : y' - 2y = te^{2t}$$

- Si b de la forme $b(t) = P(t)\cos(mt)$ ou $b(t) = P(t)\sin(mt)$ avec $m \in \mathbb{R}$ et P un polynôme à coefficients réels. On a deux méthodes : la méthode réelle ou la méthode complexe.

Méthode réelle : On cherche une solution particulière y_p de (E) sous la forme $y_p(t) = q(t)\cos(mt) + s(t)\sin(mt)$ où q et s sont des polynômes de degré inférieur ou égal à celui de P . On détermine les coefficients de q, s en *devinez la fin de la phrase !*

Méthode complexe : On pose une équation complexe (*une nouvelle équation ! valable comme aide de calcul pour la solution particulière uniquement*) en remplaçant le y par z et le $\sin(mt)$ ou le $\cos(mt)$ par e^{imt} :

$$(E_C) : z' + az = P(t)e^{imt}$$

On cherche une solution particulière z_p de cette équation (comme dans le cas précédent), sous la forme $z_p(t) = R(t)e^{imt}$ avec R un polynôme à coefficients complexes de même degré que P .

Quand on a trouvé z_p , on revient en réel :

- Si le second membre de l'équation réelle était en $\cos(mt)$, on pose $y_p = \text{Re}(z_p)$.
- Si le second membre de l'équation réelle était en $\sin(mt)$, on pose $y_p = \text{Im}(z_p)$.

Remarquons que la solution particulière y_p de (E) ainsi obtenue apparaîtra bien sous la forme annoncée $y_p(t) = q(t)\cos(mt) + s(t)\sin(mt)$.

Exemple. (exo) Déterminer une solution particulière sur \mathbb{R} de l'équation différentielle

$$(E) : y' - 2y = t \sin(t).$$

• **Les autres cas : Méthode de variation de la constante**

On se base sur la solution de l'équation homogène $y_h = \lambda e^{-A(t)}$. On recopie le résultat dans y_p en remplaçant la **constante** λ par une **fonction** $\lambda(t)$ inconnue (et à déterminer !!) :

$$\forall t \in I, y_p(t) = \lambda(t)e^{-A(t)},$$

On calcule la dérivée y_p' et on reporte dans l'équation $(E) : y_p' + a(t)y_p = b(t)$. Après calcul, on doit réussir à isoler $\lambda'(t)$:

$$\lambda'(t) = \text{une fonction de la variable } t$$

On calcule alors une primitive du total (une seule suffit puisqu'on ne cherche qu'une seule solution particulière) pour obtenir $\lambda(t)$. Et on n'oublie pas de reporter le résultat dans le $y_p(t) = \lambda(t)e^{-A(t)}$ du début !

Notons que la méthode de variation de la constante ne fournit pas toujours une solution particulière explicite. Il faut pour cela être capable de déterminer des primitives !

Exemple. Déterminer une solution particulière sur \mathbb{R} de l'équation différentielle

$$(E) : y' - ty = te^{t^2/2}$$

Lorsque la fonction b est compliquée, on peut quelquefois procéder en plusieurs étapes en «découpant» b en plusieurs morceaux individuellement plus simples : c'est le *principe de superposition*.

Pour chercher une solution particulière de

$$(E) : y' + a(t)y = b_1(t) + b_2(t)$$

1. On cherche y_{p1} solution particulière de $(E_1) : y' + a(t)y = b_1(t)$.
2. On cherche y_{p2} solution particulière de $(E_2) : y' + a(t)y = b_2(t)$.
3. On additionne $y_p = y_{p1} + y_{p2}$.

(On peut découper en plus de morceaux si besoin !)

1.4.1 Etape 3 : Solution totale de l'équation

Propriété 6.

Soit a et b fonctions continues sur I à valeurs dans \mathbb{K} et (E) l'équation différentielle :

$$(E) : y' + a(t)y = b(t)$$

Si y_h est une solution de l'équation homogène associée et y_p une solution particulière de l'équation (E) sur I , alors les solutions de (E) sont toutes les fonctions de la forme

$$y = y_p + y_h$$

1.4.2 Etape 4 : Conditions initiales

Définition 7.

Dans une équation différentielle, on appelle **condition de Cauchy** toute condition imposant la valeur d'une solution ou de l'une de ses dérivées en un point de I .

Propriété 8.

Soient $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$. L'équation différentielle $(E) : y' + a(t)y = b(t)$ avec la condition de Cauchy $y(t_0) = y_0$ admet une solution **unique** sur I . Autrement dit, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, par un point quelconque de coordonnées $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$, il passe une courbe intégrale et une seule.

Exemple. (exo) Déterminer les solutions sur \mathbb{R} de l'équation différentielle $(E) : y' - ty = 2t$ vérifiant la condition initiale $y(0) = -1$. On donne que l'ensemble des solutions est $y(t) = \lambda e^{\frac{t^2}{2}} - 2$ avec λ une constante.

2 Équations différentielles linéaires du deuxième ordre

2.1 Généralités

Définition 9.

Soit I un intervalle de \mathbb{R} . On appelle **équation différentielle linéaire du deuxième ordre à coefficients constants** sur I toute équation du type

$$(E) : \quad \forall t \in I, \quad ay'' + by' + cy = d(t),$$

où a, b, c sont trois éléments (« constantes ») de \mathbb{K} avec $a \neq 0$, d une fonction continue sur I à valeurs dans \mathbb{K} et y une fonction **inconnue** deux fois dérivable sur I à valeurs dans \mathbb{K} .

On appelle **solution** de (E) sur I toute fonction f deux fois dérivable sur I à valeurs dans \mathbb{K} telle que :

$$\forall t \in I, \quad af''(t) + bf'(t) + cf(t) = d(t).$$

Le graphe d'une solution est appelée une *courbe intégrale* de (E) .

Dans toute la suite, on donnera les résultats pour $I = \mathbb{R}$.

Méthode de résolution d'une équation différentielle linéaire : retournez au début du cours si vous avez (déjà) oublié.

2.2 Etape 1 : Résolution de l'équation homogène

Définition 10.

On appelle **équation homogène associée à (E)** (ou *équation sans second membre*) l'équation, notée (E_h) , définie par

$$(E_h) : \quad \forall t \in I, \quad ay'' + by' + cy = 0.$$

Propriété 11.

L'équation caractéristique d'une équation différentielle $ay'' + by' + cy = 0$ (avec $a \neq 0$), est l'équation du second degré $ar^2 + br + c = 0$. On note Δ son discriminant.

▷ Si $\Delta > 0$, l'équation caractéristique admet deux racines réelles distinctes r_1 et r_2 . Les solutions réelles de l'équation différentielle (E_h) sont alors toutes les fonctions y_h de la forme :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y_h(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t} \quad \text{où } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

▷ Si $\Delta = 0$, l'équation caractéristique admet une unique racine réelle r_0 (racine double). Les solutions réelles de l'équation différentielle (E_h) sont alors toutes les fonctions y_h de la forme :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y_h(t) = (\lambda t + \mu) e^{r_0 t} \quad \text{où } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

▷ Si $\Delta < 0$, l'équation caractéristique admet deux racines complexes conjuguées $r = \alpha + i\beta$ et $\bar{r} = \alpha - i\beta$, où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$. Les solutions réelles de l'équation différentielle (E_h) sont alors toutes les fonctions y_h de la forme :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y_h(t) = e^{\alpha t} (\lambda \cos(\beta t) + \mu \sin(\beta t)) \quad \text{où } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Remarque : Toute expression de la forme $\lambda \cos(x) + \mu \sin(x)$ peut s'écrire sous la forme $R \cos(x + \varphi)$ ou $R \sin(x + \psi)$. Par conséquent, lorsque $\Delta < 0$, on peut aussi affirmer que les solutions réelles de l'équation différentielle homogène (E_h) : $ay'' + by' + cy = 0$ sont toutes les fonctions de la forme :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t) = R e^{\alpha t} \cos(\beta t + \varphi) \quad \text{avec } (R, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}.$$

C'est cette forme qui est couramment utilisée en physique.

Exemple. Trouver les solutions à valeurs réelles de l'équation différentielle homogène

$$(E_h) : y'' + 2y' + 5y = 0.$$

2.3 Etape 2 : Recherche d'une solution particulière

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3$, d une fonction continue sur \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{K} et (E) l'équation différentielle

$$(E) : \quad ay'' + by' + cy = d(t).$$

On dispose de deux méthodes pour déterminer une solution particulière de (E) : soit on trouve une solution particulière vraiment évidente, soit on se trouve dans l'un des cas suivants.

• **1er cas :** $d(t) = P(t) e^{mt}$, où P est un polynôme à coefficients dans \mathbb{K} et $m \in \mathbb{K}$

On a alors trois cas pour la d'une solution particulière y_p :

- Si m n'est pas une racine de l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$, alors on pose $y_p(t) = R(t) e^{mt}$
- Si m est une racine simple de l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$, alors on pose $y_p(t) = t \times R(t) e^{mt}$
- Si m est la racine double de l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$, alors on pose $y_p(t) = t^2 \times R(t) e^{mt}$

où R est un polynôme inconnu tel que $\deg R = \deg P$ dans tous les cas. On reporte y_p dans l'équation (E) pour déterminer les coefficients de R .

Remarque : le cas où d est un simple polynôme est un cas particulier de cette étude (c'est le cas $m = 0$).

Exemple. Résoudre l'équation différentielle

$$(E) : y'' + 2y' + y = 2e^{-t}.$$

• **2e cas :** $d(t) = P(t) \cos(mt)$ ou $d(t) = P(t) \sin(mt)$, où P est un polynôme à coefficients réels et m un nombre réel.

On pose une équation complexe (*une nouvelle équation, valable uniquement pour aider au calcul d'une solution particulière*) en remplaçant y par z et le $\cos(mt)$ ou $\sin(mt)$ du second membre par e^{imt} .

$$(E_{\mathbb{C}}) \quad az'' + bz' + cz = P(t) e^{imt}$$

On cherche une solution particulière z_p de cette équation différentielle grâce à la méthode précédente. Puis on revient dans \mathbb{R} :

- Si le second membre était $P(t) \cos(mt)$, alors $y_p = \operatorname{Re}(z_p)$
- Si le second membre était $P(t) \sin(mt)$, alors $y_p = \operatorname{Im}(z_p)$

• **3e cas :** Si le second membre est de la forme $d(t) = P(t) e^{kt} \cos(mt)$ ou $d(t) = P(t) e^{kt} \sin(mt)$ où P est un polynôme à coefficients réels et k et m sont des nombres réels, on passe aussi aux complexes et on cherche une solution particulière z_p de l'équation

$$(E_{\mathbb{C}}) : az'' + bz' + cz = P(t) e^{(k+im)t}.$$

Puis on revient dans \mathbb{R} :

- Si le second membre était $P(t) e^{kt} \cos(mt)$, alors $y_p = \operatorname{Re}(z_p)$
- Si le second membre était $P(t) e^{kt} \sin(mt)$, alors $y_p = \operatorname{Im}(z_p)$

Remarque : Lorsque la fonction d est «compliquée», on peut utiliser le *principe de superposition* :

Pour chercher une solution particulière de

$$(E) : ay'' + by' + cy = b_1(t) + b_2(t)$$

1. On cherche y_{p1} solution particulière de $(E_1) : ay'' + by' + cy = b_1(t)$.
2. On cherche y_{p2} solution particulière de $(E_2) : ay'' + by' + cy = b_2(t)$.
3. On additionne $y_p = y_{p1} + y_{p2}$.

2.4 Etape 3 : Solutions de l'équation

Propriété 12.

Les solutions de (E) sur \mathbb{R} , sont toutes les fonctions de la forme $y = y_p + y_h$, où y_h est une solution de l'équation homogène associée et y_p est une solution particulière de l'équation.

2.5 Etape 4 : conditions initiales

Propriété 13.

Soient $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ avec $a \neq 0$, d une fonction continue de \mathbb{R} dans \mathbb{K} et $t_0 \in \mathbb{R}$.

Pour tout $(y_0, y'_0) \in \mathbb{R}^2$, l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = d(t)$ possède une solution unique vérifiant $y(t_0) = y_0$ et $y'(t_0) = y'_0$.

Exemple. Résoudre $(E) : y'' + 2y' + 5y = 10 \cos t$ avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.

Exercice 1

(**) Résoudre sur \mathbb{R} et préciser la solution qui vaut y_0 à l'instant $t = 0$:

$$\begin{aligned} y' - 3y &= 2, & y' - 3t^2y &= t^2, & y' + ty &= t^3, \\ y' + 2y &= e^{2t}, & y' - 5y &= e^{5t}, & y' - y &= \sin(t). \end{aligned}$$

Exercice 2

(**) Résoudre les équations suivantes sur l'intervalle précisé :

$$\begin{aligned} y' + \tan(x)y &= \sin(x) \quad \text{sur } \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[, & y' + \tan(x)y &= \cos^3(x) \quad \text{sur } \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[, \\ (1 + x^2)y' + 2xy &= 1 \quad \text{sur } \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Exercice 3

(**)

1. Calculer la dérivée de $f :]1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$.
 $t \mapsto \ln(t + \sqrt{t^2 - 1})$
2. Résoudre sur $]1, +\infty[$ l'équation différentielle $(E) : y' - \frac{y}{t-1} = \frac{(t-1)}{\sqrt{t^2-1}}$.

Exercice 4

(**) Résoudre sur \mathbb{R} le problème de Cauchy suivant :

$$(C) \begin{cases} y' - y = \frac{te^t}{\sqrt{1+t^2}} - t + 1 \\ y(0) = -1. \end{cases}$$

Exercice 5

(**) Soit (E) l'équation différentielle du premier ordre $xy' + y = 3x^2$.

1. Résoudre cette équation sur $]0; +\infty[$, puis sur $] -\infty; 0[$.
2. Existe-t-il des solutions de cette équation sur \mathbb{R} ?

Exercice 6

(**) Résoudre les équations suivantes et préciser la solution qui vérifie les conditions de Cauchy $y(0) = y_0$ et $y'(0) = y'_0$:

$$\begin{aligned} y'' - 5y' + 6y &= 0, & y'' - 3y' &= 0, & y'' + 4y &= 0 \\ y'' + 4y' + 4y &= 0, & y'' - 2y' + 2y &= 0 \end{aligned}$$

Exercice 7

(**) Résoudre sur \mathbb{R} les équations suivantes :

$$y'' + 2y' - 8y = e^{3t}, \quad y'' - 3y' - 18y = t e^{4t},$$

$$y'' - 10y' + 41y = \sin(t), \quad y'' - 2y' + 2y = \sin(t) e^t,$$

$$y'' - 4y' + 3y = 2e^t - 3\cos(2t).$$

Exercice 8

(Oscillation d'un ressort)(***)

Nous allons décrire le mouvement d'un objet de masse m fixé à l'extrémité d'un ressort (en position verticale) de raideur k qu'on étire d'une certaine longueur et qu'on lâche. On repère la position de la masse par son ordonnée $z(t)$ à l'instant t sur un axe vertical orienté vers le bas et dont l'origine est le point d'attache du ressort.

On note ℓ la longueur à vide du ressort et g la constante gravitationnelle.

1. On suppose dans cette question qu'il n'y a pas de force de frottement.

(a) Montrer que z vérifie l'équation différentielle

$$\frac{m}{k} z'' + z = \frac{mg}{k} + \ell.$$

(b) On suppose qu'à l'instant $t = 0$, l'objet se situe à hauteur z_0 et que sa vitesse est nulle. En résolvant l'équation précédente, exprimer $z(t)$ en faisant intervenir la constante $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, appelée pulsation propre du système.

Tracer l'allure du graphe de z . À quel type de mouvement a-t-on affaire ?

2. On suppose maintenant que la masse est plongée dans un liquide qui provoque une force de frottement opposée au mouvement et proportionnelle à la vitesse, dont la norme vaut $\alpha z'$. On pose $\xi = \frac{\alpha}{2\sqrt{mk}}$. La constante ξ est appelée le facteur d'amortissement du système.

(a) Montrer que z vérifie l'équation différentielle :

$$z'' + 2\xi\omega_0 z' + \omega_0^2 z = g + \omega_0^2 \ell.$$

(b) Avec les mêmes conditions initiales qu'à la question précédente, déterminer l'expression de $z(t)$ distinguant trois cas suivant la valeur de ξ .

Tracer pour chaque cas l'allure du graphe de z .

À quel type de mouvement a-t-on affaire dans chacun des cas ?

Fiche de révision XVI : Equations différentielles linéaires

Sur quel type d'équation du premier ordre porte ce cours ?

Et ça veut dire quoi, premier ordre ?

$\alpha(t)y'(t) + \beta(t)y(t) = \gamma(t)$ avec α, β, γ des fonctions.

premier ordre signifie que y est dérivé une seule fois.

Donner brièvement les étapes d'une résolution d'équation différentielle linéaire du premier ordre ou du second ordre.

1. On détermine les solutions y_h homogène associée.
2. On "devine" la forme d'une solution particulière de (E) qu'on note y_p . On reporte y_p dans l'équation (E) afin de la déterminer complètement.
3. On additionne $y = y_h + y_p$
4. On utilise éventuellement les conditions initiales pour déterminer les constantes.

Pour résoudre $\alpha(t)y'(t) + \beta(t)y(t) = \gamma(t)$, quelle est la première opération à faire ?

Tout diviser par $\alpha(t)$ pour ne plus rien avoir devant y' .

Donner les solutions de l'équation différentielle $y' + a(t)y = 0$. Comment s'appelle ce type d'équation ?

$y_h(t) = \lambda e^{-A(t)}$ où λ est une constante et A est une primitive de a . C'est une équation homogène.

On cherche une solution particulière y_p de $y' + ay = b(t)$ où a est une constantes. Donner la forme de y_p dans les cas suivants :

1. y_p est un polynôme inconnu de degré n .
2. $y_p = Qe^{mt}$ avec Q un pôleynome inconnue de degré n si $m \neq -a$ et de degré $n + 1$ si $m = -a$.

1. Si $b(t)$ est un polynôme de degré n
2. Si $b(t) = Pe^{mt}$ avec P un polynôme de degré n et m une constante.

On cherche une solution particulière y_p de $y' + ay = b(t)$ où a est une constante et $b(t) = P \cos(mt)$ ou $b(t) = P(t) \sin(mt)$ avec P un polynôme de degré n et m une constante. Donner la méthode complexe pour déterminer y_p .

On pose l'équation complexe $z' + az = P(t)e^{imt}$. On cherche une solution particulière $z_p(t) = R(t)e^{imt}$ avec R un polynôme à coefficients complexes de même degré que P . Quand on a trouvé z_p , on revient en réel :

- Si le second membre de l'équation réelle était en $\cos(mt)$, on pose $y_p = \operatorname{Re}(z_p)$.
- Si le second membre de l'équation réelle était en $\sin(mt)$, on pose $y_p = \operatorname{Im}(z_p)$.

Quelle est l'équation caractéristique de $ay'' + by' + cy = 0$?
Donner les solutions de cette équation différentielle.

$ar^2 + br + c = 0$ avec son discriminant Δ .

1. Si $\Delta > 0$, alors deux racines r_1 et r_2 . Les solutions sont $y_h(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}$
2. Si $\Delta = 0$, unique racine r_0 . Les solutions sont $y_h(t) = (\lambda t + \mu) e^{r_0 t}$
3. Si $\Delta < 0$, deux racines complexes conjuguées $r = \alpha + i\beta$ et $\bar{r} = \alpha - i\beta$. Les solutions sont $y_h(t) = e^{\alpha t} (\lambda \cos(\beta t) + \mu \sin(\beta t))$

avec λ, μ des constantes.

On cherche une solution particulière y_p de $y' + a(t)y = b(t)$ et les solutions simples ne marchent pas. Quelle est la méthode à employer?
Décrire la méthode.

Méthode de variation de la constante. On prend comme modèle la solution homogène $y_h = \lambda e^{-A(t)}$. On pose $y_p(t) = \lambda(t)e^{-A(t)}$ avec $\lambda(t)$ une fonction à déterminer. On reporte dans l'équation différentielle, on isole λ' et on primitive pour trouver λ . On remplace dans y_p pour finir.

Donner la forme de y_p une solution particulière de $ay'' + by' + cy = P(t)e^{mt}$, avec P polynôme de degré n et m constantes.

- Si m n'est pas une racine de l'équation caractéristique, alors $y_p(t) = R(t)e^{mt}$
- Si m est une racine simple de l'équation caractéristique, alors $y_p(t) = t \times R(t)e^{mt}$
- Si m est la racine double de l'équation caractéristique, alors $y_p(t) = t^2 \times R(t)e^{mt}$

où R est un polynôme inconnu de degré n . On reporte y_p dans l'équation (E) pour déterminer les coefficients de R .

Quelle est la forme des solutions d'une équation différentielle linéaire? (premier ordre et second ordre)

$y = y_p + y_h$ avec y_h les solutions de l'équation homogène et y_p une solution particulière.

A quoi servent les conditions initiales? (premier ordre et second ordre)

à déterminer la ou les constantes dans les solutions homogènes y_h

Sur quel type d'équation du second ordre porte ce cours?
Et ça veut dire quoi, second ordre?

$ay'' + by' + cy = d(t)$ avec a, b, c des constantes.
second ordre signifie que y est dérivé deux fois.

Donner la méthode pour trouver y_p une solution particulière de $ay'' + by' + cy = P(t) \cos(mt)$ ou $= P(t) \sin(mt)$, avec P polynôme de degré n et m constantes.

On pose une équation complexe $az'' + bz' + cz = P(t)e^{imt}$. On cherche une solution particulière z_p de cette équation différentielle grâce à la méthode précédente. Puis on revient dans \mathbb{R} :

- Si le second membre était $P(t) \cos(mt)$, alors $y_p = \operatorname{Re}(z_p)$
- Si le second membre était $P(t) \sin(mt)$, alors $y_p = \operatorname{Im}(z_p)$

Donner la méthode pour trouver d y_p une solution particulière de $ay'' + by' + cy = P(t)e^{kt} \cos(mt)$ ou $= P(t)e^{kt} \sin(mt)$, avec P polynôme de degré n et m, k constantes.

on passe aussi aux complexes $az'' + bz' + cz = P(t)e^{(k+im)t}$. et après, même méthode que précédemment.

Si on doit chercher une solution particulière d'une equation différentielle (premier ou second ordre) ayant pour second membre $d_1(t) + d_2(t)$, que faire ?

Principe de superposition. On fait une solution particulière y_{p1} avec le second membre d_1 , puis une solution particulière y_{p2} avec le second membre d_2 . La solution particulière est alors $y_p = y_{p1} + y_{p2}$