

14. Méthodes de calcul de primitives et d'intégrales

1 Intégrale d'une fonction continue sur un intervalle

On rappelle qu'une primitive F d'une fonction continue f est une fonction dérivable vérifiant $F' = f$.

Théorème 1.

- Soit I un intervalle de \mathbb{R} et f une fonction continue sur I
- f possède toujours une primitive F sur I . Toutes les primitives de f sont les fonctions $F + C$ avec C une constante réelle.
 - Soit a un élément de I et $k \in \mathbb{R}$. Il existe une unique primitive F de f vérifiant $F(a) = k$.

Exemples.

1. Les primitives sur \mathbb{R} de la fonction polynomiale $f : x \mapsto x^3 + 2x + 3$ sont toutes les fonctions F de la forme :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \frac{1}{4}x^4 + x^2 + 3x + C, \quad \text{où } C \in \mathbb{R}.$$

2. La fonction \ln est l'unique primitive sur $]0, +\infty[$ de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui s'annule en 1.

Définition 2.

Soit f une fonction continue sur un intervalle I . Pour tous réels a et b appartenant à I , l'intégrale de f entre a et b est le nombre réel noté

$$\int_a^b f(x) dx \text{ et défini par}$$

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

où F désigne une primitive quelconque de f sur I , et ce quel que soit l'ordre des réels a et b .

Remarque :

- Une intégrale est un NOMBRE.
- Cette définition est licite puisque si F_2 désigne une autre primitive de f sur I , il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $F_2 = F + C$ et on a alors $F_2(b) - F_2(a) = F(b) + C - (F(a) + C) = F(b) - F(a)$.

- La variable x qui apparaît sous le signe intégral est une variable muette, on peut la remplacer par n'importe quelle lettre à condition que cette lettre ne soit pas déjà utilisée.
- Le dx à la fin de l'intégrale est très important, c'est lui qui dit la variable qu'on intègre et où se termine l'intégrale. Ne pas l'oublier ! $\int_a^b \dots dx$ signifie que x va de la valeur a à la valeur b .

Propriété.

(relation de Chasles) Soit f une fonction continue sur un intervalle I . Pour tous réels a, b et c appartenant à I , on a

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

et ce quel que soit l'ordre des réels a, b et c .

Propriété.

(Linéarité) Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I . Soit $a, b \in I$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$\int_a^b (\lambda f(x) + g(x)) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$$

Une intégrale peut servir à calculer une primitive qu'on ne peut pas calculer directement. En particulier quand il faut faire une intégration par partie ou un changement de variable, il est INDISPENSABLE d'écrire la primitive sous forme d'intégrale, avec les bonnes bornes !

Théorème 5.

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I et soit $a \in I$.

La fonction F définie pour tout $x \in I$ par $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a .

1.1 Exploiter les symétries et/ou la périodicité de la fonction à intégrer

On peut exploiter certaines propriétés des fonctions pour simplifier le calcul d'une intégrale :

- Soit $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction paire et continue, alors

$$\int_{-a}^a f(t) dt = \int_{-a}^0 f(t) dt + \int_0^a f(t) dt = 2 \int_0^a f(t) dt$$

— Soit $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction impaire et continue, alors

$$\int_{-a}^a f(t)dt = \int_{-a}^0 f(t)dt + \int_0^a f(t)dt = 0$$

— Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et f une fonction T -périodique et continue, alors

$$\int_{a+T}^{b+T} f(t)dt = \int_a^b f(t)dt, \quad \int_a^{a+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt,$$

Exemple. Calculer $I = \int_0^{2\pi} \frac{\sin^3(x)}{1 + \cos^2(x)} dx$.

2 Reconnaître la dérivée d'une fonction

2.1 Primitives usuelles

La façon la plus simple de trouver une primitive d'une fonction f est de reconnaître en f la dérivée d'une fonction usuelle. On omet à chaque fois la constante dans l'expression des primitives.

Fonction	Primitive	Intervalle
$x^k \quad (k \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$	$\frac{x^{k+1}}{k+1}$	\mathbb{R} ou \mathbb{R}_-
$\frac{1}{x^k} \quad (k \in \mathbb{R} \setminus \{1\})$	$\frac{1}{1-k} x^{k-1}$	\mathbb{R}_-
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}$	\mathbb{R}_+^* ou \mathbb{R}_-^*
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	\mathbb{R}^+
$\frac{1}{x}$	$\ln x $	\mathbb{R}_+^* ou \mathbb{R}_-^*
e^x	e^x	\mathbb{R}
a^x	$\frac{a^x}{\ln a}$	\mathbb{R}
$\cos x$	$\sin x$	\mathbb{R}
$\sin x$	$-\cos x$	\mathbb{R}

Fonction	Primitive	Intervalle
$\frac{1}{\cos^2(x)}$ ou $1 + \tan^2 x$	$\tan x$	$]-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi[\quad (k \in \mathbb{Z})$
$\tan x$	$-\ln \cos x $	$]-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi[\quad (k \in \mathbb{Z})$
$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$	\mathbb{R}
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	\mathbb{R}
$\frac{1}{\operatorname{ch}^2(x)}$ ou $1 - \operatorname{th}^2 x$	$\operatorname{th} x$	\mathbb{R}
$\operatorname{th} x$	$\ln(\operatorname{ch} x)$	\mathbb{R}
$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{Arctan} x$	\mathbb{R}
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{Arcsin} x$	$] -1; 1[$

2.2 Reconnaître la dérivée de la composée de deux fonctions

Il est facile de trouver une primitive d'une fonction lorsque celle-ci s'exprime sous la forme de la dérivée de la composée de deux fonctions.

Propriété 6.

Soit u une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur un intervalle I à valeurs dans un intervalle J et g une fonction continue sur J . On note G une primitive de g sur J .

Une primitive sur I de la fonction $u' \times g(u)$ est la fonction $G(u)$.

En application de ce résultat, on trouve toutes ces primitives classiques :

Fonction	Primitive	Fonction	Primitive
$u' \times u^k \quad (k \neq -1)$	$\frac{u^{k+1}}{k+1}$	$u' \sin(u)$	$-\cos(u)$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	$u' \cos(u)$	$\sin(u)$
$\frac{u'}{u}$	$\ln u $	$\frac{u'}{1+u^2}$	$\operatorname{Arctan}(u)$
$\frac{u'}{u^k} \quad (k \neq 1)$	$\frac{1}{(1-k)u^{k-1}}$	$\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$\operatorname{Arcsin}(u)$
$u' e^u$	e^u	$u' g(u)$	$G(u)$

Exemples.

3 Transformations d'expressions

Pour obtenir une primitive d'une fonction f continue sur I , il est parfois nécessaire de transformer l'expression de f pour reconnaître des fonctions que l'on sait intégrer.

3.1 Linéarisation d'un polynôme trigonométrique

Si f contient des produits ou des puissance de cosinus et/ou sinus, on linéarise l'expression (en remplaçant chaque sinus/cosinus l'aide de la formule d'Euler, puis en développant tout). On obtient alors une somme de termes en $\cos(\ell x)$ ou $\sin(mx)$ qu'on sait primitiver.

Exemple. Calculer $\int_0^\pi \sin^2(x) \cos^2(x) dx$.

3.2 Cas des fractions rationnelles simples

Pour trouver une primitive d'une fraction rationnelle, on la décompose en éléments simples (c.f le cours sur les fractions rationnelles). Les termes de la décomposition en éléments simples sont alors plus faciles à intégrer :

fonction	primitive
$\frac{1}{ax+b}$	$\frac{1}{a} \ln ax + b $
$\frac{1}{(ax+b)^k} \quad (k \neq 1)$	$\frac{1}{a(1-k)} \frac{1}{(ax+b)^{k-1}}$
$\frac{1}{x^2+1}$	$\arctan(x)$
$\frac{\lambda x + \mu}{ax^2 + bx + c}$	c.f changement de variable

Exemple. Calculer $\int_0^1 \frac{x^3}{x+2} dx$.

En effectuant la division euclidienne de X^3 par $X+2$, on obtient $X^3 = (X^2 - 2X + 4)(X+2) - 8$. Donc pour tout $x \in [0; 1]$, on a

$$\frac{x^3}{x+2} = x^2 - 2x + 4 - \frac{8}{x+2}.$$

On obtient ainsi

$$\int_0^1 \frac{x^3}{x+2} dx = \int_0^1 x^2 - 2x + 4 - \frac{8}{x+2} dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 4x - 8 \ln |x+2| \right]_0^1$$

$$= \frac{10}{3} - 8 \ln 3 + 8 \ln 2$$

Exemple. Calculer une primitive sur \mathbb{R} de $x \rightarrow \frac{x^2}{x^2+1}$.

Exemple. Calculer $\int_2^3 \frac{dx}{x^2-1}$.

4 Intégration par parties

4.1 La méthode d'intégration par parties

Théorème 7.

Soit u et v deux fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur un intervalle I et soit a, b deux éléments de I . On a

$$\int_a^b u'(x)v(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x) dx.$$

Démonstration. Les fonctions u, v, u' et v' étant continues sur I , les fonctions $u'v$ et uv' le sont également et possèdent donc des primitives sur I . Puisque uv est dérivable de dérivée $(uv)' = u'v + uv'$, la fonction uv est une primitive de la fonction $u'v + uv'$. Autrement dit,

$$\int_a^b (u'(x)v(x) + u(x)v'(x)) dx = [u(x)v(x)]_a^b$$

ce qui donne l'égalité

$$\int_a^b u'(x)v(x) dx + \int_a^b u(x)v'(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b$$

d'où provient la formule d'intégration par parties.

Remarque : La méthode d'intégration par parties sert à calculer des primitives de produit de deux fonctions, en primitivant l'une et dérivant l'autre. Elle peut être utile pour éliminer dans un produit une fonction qui n'est pas simple à primitiver (comme \ln , Arcsin , Arctan ...) et dont la dérivée s'intègre plus aisément. Elle permet aussi de calculer des intégrales dépendant d'un paramètre par récurrence (par exemple les intégrales de Wallis, voir exercice).

4.2 la primitive du logarithme népérien

Il arrive souvent qu'on utilise la formule d'intégration par parties, alors qu'aucun produit n'apparaît a priori dans la fonction f à primitiver... L'astuce consiste à considérer que l'on intègre le produit $1 \times f$.

Exemple. Calculer une primitive de \ln sur \mathbb{R}_+^* .

Cette astuce du "1" est à retenir!

4.3 Intégrales de fonctions de la forme $f(x) = P(x)e^{ax}$ où $P \in \mathbb{R}[X]$ et $a \in \mathbb{R}$

Le principe est d'appliquer plusieurs fois la méthode d'intégration par parties en dérivant le polynôme, ce qui finit par le faire disparaître.

Exemple. Calculer une primitive sur \mathbb{R} de la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $t \mapsto (t^2 + 3t)e^t$.

4.4 Fonctions de la forme $f(x) = P(x)\cos(ax)$ ou $f(x) = P(x)\sin(ax)$ où $P \in \mathbb{R}[X]$ et $a \in \mathbb{R}$

On applique plusieurs fois la méthode d'intégration par parties en dérivant le polynôme.

Exemple. Calculer $\int_0^\pi (x^2 + 2x - 3)\sin(2x)dx$.

5 Changements de variables

5.1 Définition

Théorème.

Soit f une fonction continue sur un intervalle J à valeurs dans \mathbb{R} . Soit φ une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur un intervalle I à valeurs dans J . Soit a et b deux éléments de I . On a

$$\int_a^b (f \circ \varphi)(x) \cdot \varphi'(x) dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y) dy.$$

5.2 Technique

Disons que l'on veuille effectuer un changement de variable dans l'intégrale $\int_a^b f(x) dx$. Cette méthode s'applique de deux manières différentes :

1er cas : On exprime une nouvelle variable en fonction de l'ancienne : $t = \varphi(x)$.

Cette technique est très utilisée lorsque la fonction f est presque sous la forme $f(x) = \varphi'(x)g(\varphi(x))$. Il faut alors effectuer chacune des étapes suivantes :

1. Vérification : On vérifie que φ est bien de classe \mathcal{C}^1 sur le segment d'extrémités a et b .

2. Les bornes : On transforme les bornes de l'intégrale : si $x = a$, alors $t = \varphi(a)$ et si $x = b$, alors $t = \varphi(b)$.
3. La différentielle : on calcule $dt = \varphi'(x) dx$ (en "dérivant" $t = \varphi(x)$).
4. L'intégrande : Dans $f(x) dx$, on cherche à faire apparaître le terme $\varphi'(x) dx$ en le met de côté. Dans tout ce qui reste, on doit voir apparaître $\varphi(x)$. Il ne doit pas rester de x "tout seul".
5. Remplacement : on remplace tout d'un seul coup. $\varphi'(x) dx$ par dt , tous les $\varphi(x)$ par t et les bornes par les nouvelles bornes... et on continue le calcul.

Exemple. Calculer $\int_0^{5\pi/2} \cos(x) \cos(\sin x) dx$.

2ème cas : On exprime l'ancienne variable en fonction d'une nouvelle : $x = \psi(t)$.

Il faut alors effectuer chacune des étapes suivantes :

1. Les bornes : On cherche α tel que $\psi(\alpha) = a$ et β tel que $\psi(\beta) = b$.
2. Vérification : On vérifie que ψ est de classe \mathcal{C}^1 sur le segment d'extrémités α et β .
3. La différentielle : on calcule $dx = \psi'(t) dt$ (en "dérivant" $x = \psi(t)$);
4. Remplacement : On remplace tout d'un seul coup : dx par $\psi'(t) dt$, tous les autres x par $\psi(t)$ et les bornes. Puis on continue le calcul de l'intégrale.

Exemple. Calculer $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx$.

5.3 Primitives d'éléments simples

On veut primitiver une fraction de la forme

$$\frac{dx + e}{ax^2 + bx + c}, \quad a, b, c, d, e \in \mathbb{R}, \Delta = b^2 - 4ac < 0.$$

On va chercher à se ramener à des primitives connues de la forme $\frac{u'}{u}$, $\frac{u'}{u^k}$ et $\frac{1}{1+x^2}$.
 En bref, les étapes à suivre dans l'ordre :

1. **Gérer le x au numérateur** : Si il y a du x au numérateur, on sépare l'élément simple en deux fractions. Une fraction est de la forme $\frac{u'}{u}$ (de primitive en $\ln|u|$) et une autre est de la forme $\frac{1}{ax^2+bx+c}$.
2. **Gérer le x au dénominateur** : On utilise une identité remarquable pour faire apparaître un carré parfait et une constante. Puis on fait un changement de variable pour se ramener à une fraction du type $\frac{1}{At^2+B}$.
3. **Dérivée d'une arctangente** : On fait un deuxième changement de variable pour se ramener à une fraction du type $\frac{1}{y^2+1}$.

Il est possible de faire en une seule fois les deux changements de variable pour aller plus vite.

1) Gérer le x au numérateur : Si y a du x au numérateur, on l'utilise pour faire apparaître la dérivée du dénominateur au numérateur :

$$\frac{dx + e}{ax^2 + bx + c} = \frac{\frac{d}{2a}(2ax + b) + \text{cst}}{ax^2 + bx + c} = \frac{d}{2a} \times \frac{(2ax + b)}{ax^2 + bx + c} + \text{cst} \times \frac{1}{ax^2 + bx + c}$$

Ce qui permet de calculer le début de la primitive. Il restera un terme en $\frac{1}{ax^2+bx+c}$ à primitiver ensuite.

Exemple. On veut calculer $\int_0^1 \frac{4x}{x^2 + 2x + 2} dx$. Le discriminant du trinôme $x^2 + 2x + 2$ est strictement négatif, donc on ne peut pas décomposer davantage, c'est un élément simple. On utilise le x du numérateur pour faire apparaître la dérivée du dénominateur.

2) Gérer le x au dénominateur : Dans la fraction restante $\frac{1}{ax^2+bx+c}$, si il y a un x sans carré au dénominateur, on doit le faire disparaître. On met le polynôme le $ax^2 + bx + c$ sous forme canonique (comme dans les équations de cercle/sphère) :

$$ax^2 + bx + c = \left(\sqrt{a} \cdot x + \frac{b}{2\sqrt{a}} \right)^2 + B$$

On pose comme changement de variable ce qui est à l'intérieur du carré ($t = \sqrt{a} \cdot x + \frac{b}{2\sqrt{a}}$) et on obtient une fraction du type $\frac{1}{t^2+B}$.

Exemple. (suite) Il reste à calculer

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$$

3) Faire apparaître la dérivée d'une Arctangente

Technique. : On veut calculer l'intégrale $\int_a^b \frac{1}{At^2+B} dt$ avec A et B deux nombres réels strictement positifs. L'objectif est de faire apparaître $\frac{1}{y^2+1}$ qu'on sait primitiver.

1. On factorise B au dénominateur pour faire apparaître le $+1$.

$$\int_a^b \frac{1}{At^2 + B} dt = \int_a^b \frac{1}{B \left(\frac{A}{B} t^2 + 1 \right)} dt$$

2. On rentre tout dans le carré :

$$\int_a^b \frac{1}{At^2 + B} dt = \frac{1}{B} \int_a^b \frac{1}{\left(\sqrt{\frac{A}{B}} t \right)^2 + 1} dt$$

3. On fait le changement de variable $y = \sqrt{\frac{A}{B}} t$ (le terme dans le carré) dans l'intégrale, ce qui permet d'obtenir $\frac{1}{y^2+1}$ et on peut faire la primitive.

Exemple. On veut primitiver $\frac{1}{3t^2+2}$.

5.4 Quotients de polynômes trigonométriques

Supposons que l'on soit amené à calculer une primitive d'une fonction rationnelle en sin et cos, c'est-à-dire d'un quotient de polynômes trigonométriques de la forme

$$f(x) = \frac{P(\sin(x), \cos(x))}{Q(\sin(x), \cos(x))}$$

où $P(X, Y)$ et $Q(X, Y)$ désignent des polynômes à deux indéterminées.

On pense alors à effectuer un changement de variable du type $u = \cos(x)$, $u = \sin(x)$ ou $u = \tan(x)$. Si ça ne marche pas, on peut toujours essayer $u = \cos(2x)$ ou $u = \tan \frac{x}{2}$ (mais il faut alors connaître les formules des angles moitiés).

Exemple. On veut calculer $\int_0^{\pi/2} \frac{2 \cos(x) \sin(x)}{2 + \cos^2(x)} dx$.

Remarque : Si $u = \cos x$, $u = \sin x$ et $u = \tan x$ ne marchent pas, on peut essayer $u = \cos(2x)$ ou $u = \tan(\frac{x}{2})$ avec les formules de l'angle moitié.

Il faut faire attention lorsque l'on effectue un changement de variable avec la fonction tangente de ne pas intégrer sur un intervalle contenant un élément de la forme $\frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Exercice 1

(★) On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$.

- Calculer $f(0)$.
- Déterminer $f'(x)$ pour tout x réel.

Exercice 2

(★) Calculer une primitive des fonctions suivantes :

$$f : x \rightarrow 2e^{2x}, \quad g : x \rightarrow \cos(4x), \quad h : x \rightarrow \frac{2x}{(x^2-1)^2}, \quad k : x \rightarrow x \operatorname{ch}(x^2)$$

Exercice 3

(★★) Calculer une primitive des fonctions suivantes (préciser sur quel intervalle).

$$f_1 : t \mapsto (2t^2 + 3t + 1) \quad f_2 : t \mapsto (t+1)\sqrt{t} \quad f_3 : t \mapsto \frac{(1+t)^2}{\sqrt{t}} \quad f_4 : t \mapsto \frac{t^2 - t + 1}{t+1}$$

$$f_5 : t \mapsto \cos^4(t) \quad f_6 : t \mapsto \cos^3(t) \sin(t) \quad f_7 : t \mapsto \cos(3t) \sin(2t)$$

Exercice 4

(★★) Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^1 \frac{x^3 - 3x}{x^2 - x - 2} dx \quad I_2 = \int_0^{\pi/4} (1 + \tan(x))^2 dx \quad I_3 = \int_0^{\pi/2} \sin^3(x) dx$$

Exercice 5

(★★) Calculer la primitive qui s'annule en a des fonctions suivantes à l'aide d'intégrations par parties (préciser l'intervalle de travail).

$$g_1 : t \mapsto t^3 \ln(t) \quad (a = 1) \quad g_2 : t \mapsto \operatorname{Arcsin}(t) \quad (a = 0) \quad g_3 : t \mapsto t^2 \operatorname{Arctan}(t) \quad (a = 0)$$

$$g_4 : t \mapsto e^{2t} \cos(t) \quad (a = 0) \quad g_5 : t \mapsto \sin(\ln(t)) \quad (a = 1)$$

Exercice 6

(★★) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'intégrations par parties.

$$\int_0^1 t^3 e^{\alpha t} dt \quad \int_0^\pi t^2 \sin(\alpha t) dt.$$

Exercice 7

(★★) Calculer une primitive des fonctions suivantes à l'aide d'un changement de variable (préciser l'intervalle de travail).

$$h_1 : x \mapsto \frac{1}{x^2 + 16}, \quad h_2 : x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} \quad (y = x^2), \quad h_3 : x \mapsto \frac{\cos x}{\sqrt{9 - \sin^2 x}} \quad (y = \sin x),$$

$$h_4 : x \mapsto \frac{1}{\operatorname{ch}(x)} \quad (y = e^x), \quad h_5 : x \mapsto \frac{1}{1+x+x^2}$$

Exercice 8

(★★) Calculer les intégrales suivantes en effectuant le changement de variable proposé :

$$J_1 = \int_0^{(\ln 3)/2} \frac{e^x}{1 + e^{2x}} dx \quad (y = e^x) \quad J_2 = \int_0^1 \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2} dt \quad (t = \tan(u))$$

$$J_3 = \int_1^3 \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} \quad (y = \sqrt{x}), \quad J_4 = \int_2^3 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} \quad (u = \sqrt{x^2-1}).$$

Exercice 9

(★★★) Calculer les intégrales suivantes :

$$K_1 = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(x) dx}{(\cos(x)+2) \cdot (\cos(x)-2)}, \quad K_2 = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin(2x) dx}{1 + \cos^2(x)}, \quad K_3 = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{dx}{\cos^4(x)}.$$

Exercice 10

Les intégrales de Wallis (★★★)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(x) dx$.

- Calculer W_0 et W_1 .
- À l'aide d'une intégration par parties, donner une relation entre W_n et W_{n-2} pour tout $n \geq 2$. (remarquer que $\sin^n(x) = \sin(x) \cdot \sin^{n-1}(x)$).
- En déduire que

$$W_{2n} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad W_{2n+1} = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}.$$

Exercice 11

(★★★) Pour tout $p, q \in \mathbb{N}$, on pose : $I_{p,q} = \int_0^1 x^p(1-x)^q dx$.

1. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, et tout $q \in \mathbb{N}^*$, exprimer $I_{p,q}$ en fonction de $I_{p+1,q-1}$.
2. En déduire la valeur de $I_{p,q}$ en fonction de p et q .

Fiche de révision XIV : Intégrale

C'est quoi la primitive d'une fonction f ? fonction dérivable F vérifiant $F' = f$.

Si f est continue sur un intervalle, que peut-on dire sur ses primitives? Les primitives existent et diffèrent d'une constante.

C'est quoi $\int_a^b f(x)dx$? $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$ avec F une primitive de f sur $[a, b]$.

Donner F l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a . pour tout $x \in I$, $F(x) = \int_a^x f(t)dt$

si f est une fonction paire, alors $\int_{-a}^a f(t)dt = ?$ $2 \int_0^a f(t)dt$

si f est une fonction impaire, alors $\int_{-a}^a f(t)dt = ?$ $=0$

Si f est une fonction T -périodique, alors $\int_{a+T}^{b+T} f(t)dt = ?$ $\int_a^b f(t)dt$

Si f est une fonction T -périodique, alors $\int_a^{a+T} f(t)dt = ?$ $\int_0^T f(t)dt$

Donner les primitives des fonctions suivantes :

e^x
 a^x
 $\cos x$
 $\sin x$
 $\frac{1}{\cos^2(x)}$
 $1 + \tan^2 x$
 $\tan x$

e^x primitive e^x
 a^x primitive $\frac{a^x}{\ln a}$
 $\cos x$ primitive $\sin x$
 $\sin x$ primitive $-\cos x$
 $\frac{1}{\cos^2(x)}$ primitive $\tan x$
 $1 + \tan^2 x$ primitive $\tan x$
 $\tan x$ primitive $-\ln |\cos x|$

Donner les primitives des fonctions suivantes :

x^k avec $k \neq -1$
 $\frac{1}{x^k}$ avec $k \neq 1$
 $\frac{1}{x^2}$
 $\frac{1}{\sqrt{x}}$
 $\frac{1}{x}$
 $\frac{1}{1+x^2}$
 $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

x^k primitive $\frac{x^{k+1}}{k+1}$
 $\frac{1}{x^k}$ primitive $\frac{1}{1-k} x^{1-k}$
 $\frac{1}{x^2}$ primitive $-\frac{1}{x}$
 $\frac{1}{\sqrt{x}}$ primitive $2\sqrt{x}$
 $\frac{1}{x}$ primitive $\ln |x|$
 $\frac{1}{1+x^2}$ primitive $\text{Arctan } x$
 $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ primitive $\text{Arcsin } x$

Si u et g sont des fonctions, quelle est la primitive de $u' \times g(u)$? $G(u)$ avec G une primitive de g .

Si u est une fonction, donner les primitives des fonctions suivantes :

$u' \times u^k$ ($k \neq -1$)
 $\frac{u'}{u^k}$ ($k \neq 1$)
 $\frac{u'}{\sqrt{u}}$
 $\frac{u'}{1+u^2}$
 $\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
 $u' e^u$
 $u' \sin(u)$
 $u' \cos(u)$

$u' \times u^k$ ($k \neq -1$) primitive $\frac{u^{k+1}}{k+1}$
 $\frac{u'}{u^k}$ ($k \neq 1$) primitive $\frac{1}{(1-k)u^{k-1}}$
 $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ primitive $2\sqrt{u}$
 $\frac{u'}{1+u^2}$ primitive $\text{Arctan}(u)$
 $\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$ primitive $\text{Arcsin}(u)$
 $u' e^u$ primitive e^u
 $u' \sin(u)$ primitive $-\cos(u)$
 $u' \cos(u)$ primitive $\sin(u)$

Comment primitiver une fonction contenant des produits et des puissances de sinus/cosinus ?

On linéarise : On remplace les sin et cos par les formules d'Euler, on développe TOUT, puis on regroupe les $e^{i\theta}$ par paire pour retrouver des sinus et cosinus par formule l'Euler. L'expression finale peut se primitiver facilement.

Que doit-on faire en premier pour primitiver une fraction rationnelle ?

On la décompose en éléments simples.

Donner la primitive des éléments simples suivants : $\frac{1}{ax+b}$ ($k \neq 1$)
 $\frac{1}{(ax+b)^k}$ ($k \neq 1$)
 $\frac{1}{x^2+1}$

$\frac{1}{ax+b}$ primitive $\frac{1}{a} \ln |ax + b|$
 $\frac{1}{(ax+b)^k}$ ($k \neq 1$) primitive $\frac{1}{a(1-k)} \frac{1}{(ax+b)^{k-1}}$
 $\frac{1}{x^2+1}$ primitive $\arctan(x)$

Donner la formule d'intégration par partie.

$$\int_a^b u'(x)v(x) dx = \left[u(x)v(x) \right]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x) dx.$$

Comment calculer une primitive du ln ?

On calcule $\int_1^x \ln(t) dt$ par une intégration par partie, en considérant $\int_1^x 1 \times \ln(t) dt$. On primitive le 1 et on dérive le ln.

Comment intégrer des fonctions de la forme $f(x) = P(x)e^{ax}$ ou $f(x) = P(x)\sin(ax)$ ou $f(x) = P(x)\cos(ax)$, avec P un polynôme et a une constante ?

Intégrations par partie successives en dérivant le polynôme P jusqu'à ce qu'il disparaisse.

Donner la technique pour faire le changement de variable $t = \varphi(x)$ dans l'intégrale $\int_a^b f(x) dx$.

1. On transforme les bornes de l'intégrale : si $x = a$, alors $t = \varphi(a)$ et si $x = b$, alors $t = \varphi(b)$.
2. on calcule $dt = \varphi'(x) dx$ (en "dérivant" $t = \varphi(x)$).
3. L'intégrande : Dans $f(x) dx$, on cherche à faire apparaître le terme $\varphi'(x) dx$ et on le met de coté. Dans tout ce qui reste, on doit voir apparaître $\varphi(x)$.
4. on remplace tout d'un seul coup. $\varphi'(x) dx$ par dt , tous les $\varphi(x)$ par t et les bornes par les nouvelles bornes.

Donner la technique pour faire le changement de variable $x = \psi(t)$ dans l'intégrale $\int_a^b f(x) dx$.

1. On cherche α tel que $\psi(\alpha) = a$ et β tel que $\psi(\beta) = b$.
2. on calcule $dx = \psi'(t) dt$ (en "dérivant" $x = \psi(t)$);
3. On remplace tout d'un seul coup : dx par $\psi'(t) dt$, tous les autres x par $\psi(t)$ et les bornes.

Donner en bref la méthode pour trouver la primitive de $\frac{dx+e}{ax^2+bx+c}$

1. Si il y a du x au numérateur, on sépare l'élément simple en deux fractions. Une fraction est de la forme $\frac{u'}{u}$ (de primitive en $\ln |u|$) et une autre est de la forme $\frac{1}{ax^2+bx+c}$.
2. Au dénominateur : On utilise une identité remarquable pour faire apparaître un carré parfait et une constante. Puis on fait un changement de variable pour se ramener à une fraction du type $\frac{1}{At^2+B}$.
3. On fait un deuxième changement de variable pour se ramener à une fraction du type $\frac{1}{y^2+1}$.

Dans un calcul d'intégrale, comment transformer $\frac{dx+e}{ax^2+bx+c}$ en somme de deux fractions, une de la forme $C\frac{u'}{u}$ et une autre de la forme $\frac{K}{ax^2+bx+c}$ (avec C, K des constantes) ?

On transforme le numérateur $dx + e$ pour faire apparaître la dérivée du dénominateur (ax^2+bx+c) en factorisant de force par $\frac{d}{2a}$. Ensuite il faut découper le terme constant pour faire apparaître b . On sépare à cet endroit les deux fractions, avec d'un coté $2ax + b$ et de l'autre le reste des constantes.

Comment transformer une fraction $\frac{1}{ax^2+bx+c}$ en une fraction de la forme $\frac{1}{t^2+B}$ dans un calcul d'intégrale ?

On met le polynôme le $ax^2 + bx + c$ sous forme canonique, puis on pose comme changement de variable ce qui est à l'intérieur du carré.

Comment calculer l'intégrale $\int_a^b \frac{1}{At^2+B} dt$ avec A et B deux nombres réels strictement positifs ?

1. On factorise B au dénominateur pour faire apparaître le $+1$.

$$\int_a^b \frac{1}{At^2 + B} dt = \int_a^b \frac{1}{B \left(\frac{A}{B}t^2 + 1\right)} dt$$

2. On rentre tout dans le carré :

$$\int_a^b \frac{1}{At^2 + B} dt = \frac{1}{B} \int_a^b \frac{1}{\left(\sqrt{\frac{A}{B}}t\right)^2 + 1} dt$$

3. On fait le changement de variable $y = \sqrt{\frac{A}{B}}t$ (le terme dans le carré) dans l'intégrale, ce qui permet d'obtenir $\frac{1}{y^2+1}$ et on peut faire la primitive.

Quand on doit primitiver un quotient de polynômes trigonométrique, que faut-il essayer en premier ?

On tente un changement de variable $u = \cos(x)$, $u = \sin(x)$ ou $u = \tan(x)$.