

13. Vecteurs de \mathbb{R}^n

\mathbb{R}^n est l'ensemble des n -uplets d'éléments de \mathbb{R} , c'est à dire $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ avec x_1, x_2, \dots des réels. On appelle ces éléments des vecteurs. On peut les additionner et les multiplier par des constantes, donc on dit que \mathbb{R}^n est un espace vectoriel (on approfondira cette notion au second semestre). Pour les calculs, on note les vecteurs en colonne.

On note $\vec{0} = (0, 0, \dots, 0)$ le vecteur nul (de la taille adéquate).

1 Familles de vecteurs de \mathbb{R}^n

Définition 1.

Soit $\mathcal{F}(U_1, U_2, \dots, U_p)$ une famille finie de vecteurs de \mathbb{R}^n . On appelle *combinaison linéaire* des vecteurs de la famille \mathcal{F} tout vecteur X qui peut s'écrire

$$X = \sum_{k=1}^p \lambda_k U_k = \lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 + \dots + \lambda_p U_p$$

avec $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$

1.1 Familles libres

Définition 2.

Soit (U_1, U_2, \dots, U_p) une famille finie de vecteurs de \mathbb{R}^n . On dit que la famille (U_1, U_2, \dots, U_p) est **libre** si et seulement

$$\lambda_1 U_1 + \dots + \lambda_p U_p = \vec{0}$$

est uniquement possible avec $\lambda_1 = 0, \dots, \lambda_p = 0$. Dans ce cas, aucun vecteur de la famille n'est combinaison linéaire des autres (lorsque $p \geq 2$). Les vecteurs de la famille sont **linéairement indépendants**.

Dans le cas contraire (où $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ ne sont pas tous nuls) la famille (U_1, U_2, \dots, U_p) est **liée**. Un au moins des vecteurs de la famille est une combinaison linéaire des autres vecteurs de cette famille (lorsque $p \geq 2$).

Exemples.

1. Une famille à un vecteur (X) est libre si, et seulement si, X est non nul.

2. Une famille qui contient le vecteur nul $\vec{0}$ est liée. En effet $1 \cdot \vec{0} + 0 \cdot X_1 + \dots + 0 \cdot X_n = 0$ et les coefficients de cette combinaison linéaire ne sont pas tous nuls.
3. Une famille qui contient deux vecteurs colinéaires est liée.

Technique. On veut étudier si la famille de vecteurs (U_1, U_2, \dots, U_p) de \mathbb{R}^n est **libre** ou **liée**. Soit $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 + \dots + \lambda_p U_p = \vec{0}$$

On cherche ensuite les solutions $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$.

- Si la **seule solution possible** est que les λ_i sont nuls, $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_p = 0$, alors la famille est **libre**.
- Si on trouve une (ou plusieurs) solution avec $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ non tous nuls, alors la famille est **liée**.

Exemple. On étudie si la famille (u_1, u_2, u_3) avec $u_1 = (1, 1, 0)$, $u_2 = (1, 2, 1)$, $u_3 = (0, 1, 1)$ est libre

Exercice 1

La famille (v_1, v_2, v_3) avec $v_1 = (3, 2, 1)$, $v_2 = (1, 1, 2)$, $v_3 = (7, 4, 0)$ est-elle libre ou liée ?

1.2 Familles génératrices

Définition 3.

Une famille $\mathcal{U} = (U_1, U_2, \dots, U_p)$ de vecteurs de \mathbb{R}^n est génératrice de \mathbb{R}^n si tout vecteur de \mathbb{R}^n peut s'écrire au moins d'une façon comme combinaison linéaire des U_i . C'est à dire pour tout vecteur $X \in \mathbb{R}^n$, il existe des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ tels que

$$X = \lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 + \dots + \lambda_p U_p$$

Technique. On étudie si une famille (U_1, \dots, U_p) de vecteurs de \mathbb{R}^n est génératrice de \mathbb{R}^n . Soit $X \in \mathbb{R}^n$. On cherche $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 U_1 + \dots + \lambda_p U_p = X$.

- Si on peut trouver au moins une solution $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sans aucune condition sur X (pas d'équation auxiliaire), alors la famille (U_1, \dots, U_p) est génératrice de \mathbb{R}^n .
- Si il y a des conditions sur X pour trouver des solutions $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ (les équations auxiliaires), alors la famille (U_1, \dots, U_p) n'est PAS génératrice de \mathbb{R}^n .

Exemple. La famille $(v_1, v_2, v_3) = ((1, 2, 1), (3, 1, 2), (3, -4, 1))$ est-elle une famille génératrice de \mathbb{R}^3 ?

Exercice 2

La famille $(u_1, u_2, u_3, u_4) = ((1, 0, 1), (0, 1, 1), (-1, 0, 1), (0, 2, 1))$ est-elle génératrice de \mathbb{R}^3 ?

1.3 Bases de vecteurs

Définition 4.

Une famille de vecteurs (U_1, U_2, \dots, U_n) de \mathbb{R}^n est appelée base de \mathbb{R}^n si cette famille est libre et génératrice

Exemple. Dans \mathbb{R}^n , la famille de vecteurs (E_1, E_2, \dots, E_n) de \mathbb{R}^n , formée de $E_1 = (1, 0, 0, \dots)$, $E_2 = (0, 1, 0, \dots)$, \dots , $E_n = (0, 0, 0, \dots, 0, 1)$ est une base, appelée la base canonique de \mathbb{R}^n .

Corollaire 5.

1. Une famille génératrice de n vecteurs de \mathbb{R}^n est une base.
2. Une famille libre à n vecteurs dans \mathbb{R}^n est une base.

Remarque : Les familles de n vecteurs de \mathbb{R}^n ne sont pas toutes des bases, attention !

Théorème 6.

Si $\mathcal{B} = (U_1, U_2, \dots, U_n)$ est une base de \mathbb{R}^n , alors pour tout vecteur X de \mathbb{R}^n , il existe des coefficients $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ uniques tels que

$$X = \sum_{i=1}^n \lambda_i U_i = \lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 + \dots + \lambda_n U_n$$

X s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs de la famille \mathcal{B} . Le n -uplet $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ s'appelle les coordonnées de X dans la base \mathcal{B} .

Exemple. Dans \mathbb{R}^3 , le vecteur $X = (x, y, z)$ a pour coordonnées (x, y, z) dans la base canonique $(E_1(1, 0, 0), E_2(0, 1, 0), E_3(0, 0, 1))$.

Exemple. La famille $(u_1, u_2, u_3) = ((2, 1, 0), (0, 3, 1), (1, 1, 1))$ forme-t-elle une base de \mathbb{R}^3 ? Le cas échéant, donner les coordonnées du vecteur $(2, 4, 1) \in \mathbb{R}^3$ dans cette base.

1.4 Matrices de passage

Définition 7.

Soit $\mathcal{B} = (U_1, U_2, \dots, U_p)$ une famille de vecteurs de \mathbb{R}^n . La matrice de la famille \mathcal{B} est formée en mettant côte à côte, en colonne, les vecteurs de la famille \mathcal{B} .

Définition 8.

Soit $\mathcal{B} = (U_1, U_2, \dots, U_n)$ une base de \mathbb{R}^n et \mathcal{C} la base canonique. La matrice de la famille $\mathcal{B} = (U_1, U_2, \dots, U_n)$ est appelée **matrice de passage** de la base canonique à la base \mathcal{B} et on la note $P(\mathcal{C}, \mathcal{B})$. C'est une matrice carrée et inversible.

Remarque : La famille de vecteurs (E_1, E_2, \dots, E_n) de \mathbb{R}^n , formée de $E_1 = (1, 0, 0, \dots)$, $E_2 = (0, 1, 0, \dots)$, \dots , $E_n = (0, 0, 0, \dots, 0, 1)$ est une base, appelée la base canonique de \mathbb{R}^n . Sa matrice est l'identité.

Exemple.

Utilisation des matrices de passage. Soit \mathcal{C} la base canonique de \mathbb{R}^n et $\mathcal{B} = (U_1, \dots, U_n)$ une autre base de \mathbb{R}^n de matrice de passage $P(\mathcal{C}, \mathcal{B})$. On considère $X = (x_1, \dots, x_n)$ un vecteur de \mathbb{R}^n . (x_1, \dots, x_n) correspond aussi aux coordonnées de X dans la base canonique.

Les coordonnées de X dans la base \mathcal{B} sont (x'_1, \dots, x'_n) , ce qui signifie que $X = x'_1 U_1 + \dots + x'_n U_n$. On pose les coordonnées en colonne, en précisant par un indice \mathcal{B} ou \mathcal{C} dans quelle base on est :

$$X_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}; \quad X_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

Propriété 9.

Avec les notations précédentes :

$$X_{\mathcal{C}} = P(\mathcal{C}, \mathcal{B}) X_{\mathcal{B}}, \quad \text{et} \quad X_{\mathcal{B}} = (P(\mathcal{C}, \mathcal{B}))^{-1} X_{\mathcal{C}}$$

Remarque : La deuxième égalité signifie que, pour trouver les coordonnées d'un vecteur X dans une nouvelle base \mathcal{B} , il suffit de multiplier X par l'inverse de la matrice de passage de \mathcal{C} à \mathcal{B} .

Exemple.

On sait donc passer de la base canonique à \mathcal{B} (grâce à $P(\mathcal{C}, \mathcal{B})^{-1}$) et de \mathcal{B} à la base canonique (grâce à $P(\mathcal{C}, \mathcal{B})$). Comment passer d'une base quelconque à une autre base quelconque ?

Définition 10.

Soient deux bases de \mathbb{R}^n : \mathcal{B} de matrice de passage $P(\mathcal{C}, \mathcal{B})$ et \mathcal{B}' de matrice de passage $P(\mathcal{C}, \mathcal{B}')$. La **matrice de passage** de la base \mathcal{B} vers la base \mathcal{B}' est la matrice

$$P(\mathcal{B}, \mathcal{B}') = P(\mathcal{C}, \mathcal{B})^{-1}P(\mathcal{C}, \mathcal{B}')$$

Démonstration. On considère deux bases de \mathbb{R}^n : \mathcal{B} de matrice de passage $P(\mathcal{C}, \mathcal{B})$ et \mathcal{B}' de matrice de passage $P(\mathcal{C}, \mathcal{B}')$. Soit un vecteur X (on est donc implicitement en base canonique). Notons $X_{\mathcal{B}}$ le vecteurs des coordonnées de X dans la base \mathcal{B} et $X_{\mathcal{B}'}$ le vecteurs des coordonnées de X dans la base \mathcal{B}' . On veut des formules pour passer de $X_{\mathcal{B}}$ à $X_{\mathcal{B}'}$ et inversement. D'après ce qui précède, on a les relations suivantes :

$$(1)X = P(\mathcal{C}, \mathcal{B})X_{\mathcal{B}}, (2)X_{\mathcal{B}} = P(\mathcal{C}, \mathcal{B})^{-1}X, (3)X = P(\mathcal{C}, \mathcal{B}')X_{\mathcal{B}'}, (4)X_{\mathcal{B}'} = P(\mathcal{C}, \mathcal{B}')^{-1}X$$

On reporte (3) dans (2) et (1) dans (4) :

$$(2)X_{\mathcal{B}} = P(\mathcal{C}, \mathcal{B})^{-1}P(\mathcal{C}, \mathcal{B}')X_{\mathcal{B}'},$$

$$(4)X_{\mathcal{B}'} = P(\mathcal{C}, \mathcal{B}')^{-1}P(\mathcal{C}, \mathcal{B})X_{\mathcal{B}} = (P(\mathcal{C}, \mathcal{B})^{-1}P(\mathcal{C}, \mathcal{B}'))^{-1}X_{\mathcal{B}}$$

On a donc des formules directes pour aller de $X_{\mathcal{B}}$ à $X_{\mathcal{B}'}$ et inversement, en utilisant $P(\mathcal{C}, \mathcal{B})^{-1}P(\mathcal{C}, \mathcal{B}')$.

Propriété 11.

Soit un vecteur X de \mathbb{R}^n , avec $X_{\mathcal{B}}$ le vecteurs des coordonnées de X dans la base \mathcal{B} et $X_{\mathcal{B}'}$ le vecteurs des coordonnées de X dans la base \mathcal{B}' . On a alors

$$(2)X_{\mathcal{B}} = P(\mathcal{B}, \mathcal{B}')X_{\mathcal{B}'}, \quad \text{et} \quad X_{\mathcal{B}'} = (P(\mathcal{B}, \mathcal{B}'))^{-1}X_{\mathcal{B}}$$

Propriété 12.

1. Soient $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3$ trois bases de \mathbb{R}^n . On a

$$P(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) \times P(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3) = P(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_3)$$

2. Toute matrice de changement de base est inversible. De plus, si \mathcal{B} et \mathcal{B}' sont deux bases de \mathbb{R}^n , l'inverse de la matrice $P(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$ est la matrice $P(\mathcal{B}', \mathcal{B})$, autrement dit

$$P(\mathcal{B}, \mathcal{B}')^{-1} = P(\mathcal{B}', \mathcal{B}).$$

3. Les colonnes de la matrice $P(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$ de passage de la base \mathcal{B} vers la base \mathcal{B}' sont formées avec les coordonnées des vecteurs de \mathcal{B}' exprimés dans la base \mathcal{B} .

Remarque : En particulier, on remarque que la matrice de passage d'une base \mathcal{B} à une base \mathcal{B}' peut se calculer par $P(\mathcal{B}, \mathcal{B}') = P(\mathcal{B}, \mathcal{C})P(\mathcal{C}, \mathcal{B}')$.

Exemple.

Effet des changements de base sur les systèmes Soit $AX = B$ un système d'équation linéaires de n lignes et n inconnues (donc A est une matrice carrée). On considère une base \mathcal{B} , et $P = P(\mathcal{C}, \mathcal{B})$ la matrice de passage de la base canonique vers la base \mathcal{B} . On exprime X et B dans la base \mathcal{B} : $X = PX_{\mathcal{B}}$ et $B = PB_{\mathcal{B}}$, qu'on reporte dans le système

$$AX = B \Leftrightarrow APX_{\mathcal{B}} = PB_{\mathcal{B}} \Leftrightarrow \underbrace{P^{-1}AP}_{A'}X_{\mathcal{B}} = B_{\mathcal{B}} \Leftrightarrow A'X_{\mathcal{B}} = B_{\mathcal{B}}$$

On a transformé le système $AX = B$ en un système $A'X_{\mathcal{B}} = B_{\mathcal{B}}$, où $A' = P^{-1}AP$. On verra quand on parlera de diagonalisation l'intérêt de A' .

2 Sous-espace vectoriels dans \mathbb{R}^n

2.1 Définition

Définition 13.

Un sous-ensemble (une partie) F de \mathbb{R}^n est appelé un sous-espace vectoriel (s.e.v) si F vérifie les deux propriétés suivantes :

1. $\vec{0} \in F$: le **vecteur nul** appartient à F .
2. $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall X, Y \in F, \lambda X + Y \in F$. C'est-à-dire que F est stable par addition et par multiplication par un scalaire.

Exemples.

1. \mathbb{R}^n est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n . En fait, \mathbb{R}^n est un \mathbb{R} -espace vectoriel.
2. $\{\vec{0}\}$ (le sous ensemble de \mathbb{R}^n ne contenant que le vecteur nul) est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n .
3. Dans \mathbb{R}^2 , toute droite passant par l'origine est un sous-espace vectoriel. Dans \mathbb{R}^3 , tout plan passant par l'origine est un sous-espace vectoriel.

Propriété.

Un sous-espace vectoriel F de \mathbb{R}^n est stable par combinaisons linéaires. Autrement dit, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n, \forall (V_1, \dots, V_n) \in F^n, \lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 + \dots + \lambda_n V_n \in F.$$

2.2 sous-espace engendré par une famille de vecteurs

Définition 15.

Soit $\mathcal{F} = (X_1, X_2, \dots, X_m)$ une famille de m vecteurs de \mathbb{R}^n . On appelle $\text{Vect}(\mathcal{F})$ l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires des vecteurs de \mathcal{F} :

$$\text{Vect}(\mathcal{F}) = \{\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \dots + \lambda_m X_m, \text{ avec } \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}\}$$

$\text{Vect}(\mathcal{F})$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n . On l'appelle le sous-espace vectoriel engendré par la famille \mathcal{F} .

Remarque : $\text{Vect}(\mathcal{F})$ ne dépend pas de l'ordre des vecteurs de la famille \mathcal{F} .

Exemples.

1. Si $\mathcal{F} = \{X\}$ ne contient qu'un seul vecteur, alors $\text{Vect}(\mathcal{F}) = \{\lambda X, \lambda \in \mathbb{R}\}$ est l'ensemble des vecteurs colinéaires à X . C'est une droite vectorielle.
2. Dans \mathbb{R}^2 , $\text{Vect}(\{(2, 3), (-1, 2), (5, 4)\})$ est formé des vecteurs

$$X = a \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a - b + 5c \\ 3a + 2b + 4c \end{pmatrix}$$

3. Si \mathcal{F} est une base de \mathbb{R}^n , alors $\text{Vect}(\mathcal{F}) = \mathbb{R}^n$.
4. Dans \mathbb{R}^3 , donner les vecteurs de $F = \text{Vect}\{(0, 1, 9), (2, 3, 4)\}$.

Définition 16.

Soit F un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n et \mathcal{F} une famille de vecteurs. Si $F = \text{Vect } \mathcal{F}$, on dit que la famille \mathcal{F} engendre F , ou encore que les vecteurs de \mathcal{F} forment une famille génératrice de F .

Exemple.

1. Si \mathcal{B} est une base de \mathbb{R}^n , comme $\text{Vect}(\mathcal{B}) = \mathbb{R}^n$, alors \mathcal{B} engendre \mathbb{R}^n .
2. La droite vectorielle $\{\lambda X, \lambda \in \mathbb{R}\}$ est engendrée par le vecteur X .

2.3 Sous-espace vectoriel défini par des équations

Propriété 17.

Soit A une matrice de $\mathcal{M}(n, p)$ et (S) le système d'équations linéaires $AX = \vec{0}$ (où X est le vecteur de inconnus de taille p et $\vec{0}$ le vecteur nul de taille n). Alors l'ensemble des solutions de (S) forment un sous-espace vectoriel. Autrement dit, le sous-ensemble

$$\{X \in \mathbb{R}^p, \quad AX = \vec{0}\}$$

est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^p .

Exemple. $F = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} 2x + 4y = 0 \\ 3x - 5y = 0 \end{cases} \right\}$ est un sous espace vectoriel, avec $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$.

Démonstration. Notons S l'ensemble des solutions du système (S) . Le vecteur nul de taille p est une solution évidente du système, donc $\vec{0}$ est dans S . Soient X, Y deux vecteurs de S (donc des solutions du systèmes) et $\lambda \in \mathbb{R}$. On vérifie que $\lambda X + Y$ est dans S :

$$A(\lambda X + Y) = A(\lambda X) + AY = \lambda \underbrace{(AX)}_{=\vec{0}} + \underbrace{AY}_{=\vec{0}} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$$

$\lambda X + Y$ est bien une solution du système, donc $\lambda X + Y \in S$. Donc S est bien un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^p .

Définition.

Soit A une matrice ligne de taille $(1, p)$ et $AX = \vec{0}$ l'équation (en une seule ligne) associée. L'ensemble des solutions de l'équation $AX = \vec{0}$ forme un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^p , qu'on appelle hyperplan défini par l'équation $AX = \vec{0}$.

Remarque : L'équation $AX = 0$ n'est pas unique. L'hyperplan peut être définie par une autre équation.

Exemples.

1. Dans \mathbb{R}^2 , un hyperplan est l'ensemble des solutions d'une équation de la forme $ax + by = 0$. C'est donc une droite passant par O .
2. Dans \mathbb{R}^3 , un hyperplan est l'ensemble des solutions d'une équation de la forme $ax + by + cz = 0$. C'est donc un plan passant par O .

2.4 Famille génératrice et système d'équations

Un sous-espace vectoriel peut être défini à partir d'une famille génératrice ou d'un système d'équations, et il existe des méthodes pour aller de l'un à l'autre. Par contre, attention à l'**ordre** des inconnues dans le système ! Il ne doit jamais changer en cours de route !

Technique. Soit $AX = \vec{0}$ un système d'équations linéaires à p inconnues et $F = \{X \in \mathbb{R}^p, AX = \vec{0}\}$ le sous-espace vectoriel formé des solutions de $AX = \vec{0}$. On veut écrire F à l'aide d'une famille génératrice.

On commence à le résoudre avec la méthode du pivot partiel de Gauss. Comme le second membre ne contient que 0, il ne peut pas y avoir d'équation auxiliaire $0 = b$ avec $b \neq 0$, il y a toujours des solutions. Si il y a une unique solution (toutes les variables ont un pivot), cette solution est le vecteur nul, donc $F = \{\vec{0}\}$.

Sinon, il y a des variables auxiliaires (sans pivot) qu'on doit remplacer par des paramètres $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ pour résoudre. Notons que si il y a r pivots, il y aura $p - r$ paramètres à poser.

Ainsi, tout vecteur X de F (solution du système) s'écrit à l'aide des paramètres $\lambda_1, \lambda_2, \dots$. On décompose X en une somme de vecteurs : le premier ne contenant que le paramètre λ_1 , le second que le paramètre λ_2 , ... puis pour chaque vecteur, on met le paramètre en facteur devant (de la forme $\lambda_i V_i$ avec V_i ne contenant plus de paramètres).

On a alors écrit X comme une combinaison linéaire de vecteurs fixes multipliés par les paramètres λ_i . On reconnaît alors l'écriture d'un sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteur (V_1, V_2, \dots) , c'est à dire $F = \text{Vect}(V_1, V_2, \dots)$. Remarquons que F est engendré par $p - r$ vecteurs.

Exemple. Si les solutions S d'un système à trois inconnues sont de la forme suivante :

$$X = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 \\ \lambda_1 \\ 2\lambda_1 - \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_1 \\ 2\lambda_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ 0 \\ -\lambda_2 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

L'espace vectoriel des solutions est donc engendré par la famille de deux vecteurs $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$. c'est à dire $S = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.

Exercice 3

Soit F le sous-espace vectoriel des vecteurs de \mathbb{R}^2 vérifiant le système suivant

$$\begin{cases} 2x & +y & = & 0 \\ 26x & +13y & = & 0 \end{cases}$$

Donner une famille génératrice de F , c'est-à-dire écrire $F = \text{Vect} \dots$

Technique. Soit $F = \text{Vect}(V_1, V_2, \dots)$ un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^p engendré par une famille de vecteur. On cherche cette fois à l'écrire à l'aide d'un système d'équations.

Soit X un vecteur de F de coordonnées (x_1, x_2, \dots) , alors X se décompose comme combinaison linéaire $X = \lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 + \dots$ avec $\lambda_i \in \mathbb{R}$. On obtient alors une égalité de vecteurs :

$$\lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 + \dots = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

qu'on peut écrire sous forme de système (en enlevant les parenthèses des vecteurs). On obtient alors un système (S) où les λ_i sont les **inconnues** et les x_i les seconds membres. On commence à résoudre ce système avec la méthode du pivot de Gauss partiel

Mais attention, ce ne sont PAS les solutions qui nous intéressent, ce sont les **équations auxiliaires** ! Ce sont des équations contenant les coordonnées x_i de X . X est dans F si et seulement si les équations auxiliaires sont vérifiées. Donc F est définie par le système formé uniquement des équations auxiliaires.

Exemple. On considère le sous-espace vectoriel $F = \text{Vect}\{(1, 2, 0), (-1, 0, 1)\}$. Déterminer le système d'équation qui caractérise F .

3 Base d'un sous-espace vectoriel

Définition 19.

Soit F un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n . On appelle base de F toute famille de vecteurs $\mathcal{F} = (X_1, X_2, \dots, X_r)$ telle que

1. \mathcal{F} engendre F , c'est à dire $F = \text{Vect}(\mathcal{F})$.
2. \mathcal{F} est une famille libre, c'est à dire que les vecteurs (X_1, X_2, \dots, X_r) sont indépendants.

Exemple. Soit X un vecteur non nul et $F = \text{Vect}(X)$ droite vectorielle engendrée par X . Alors (X) est une base de F , puisqu'elle est génératrice et libre.

Propriété 20.

La famille $\mathcal{F} = (X_1, X_2, \dots, X_r)$ est une base du sous espace vectoriel F si et seulement si tout vecteur X de F peut s'écrire **d'une façon et d'une seule** comme combinaison linéaire des X_i :

$$X = \sum_{i=1}^n \lambda_i X_i.$$

C'est à dire que les réels λ_i existent et sont uniques pour chaque $X \in F$.

3.1 Existence de base et dimension

Si F est un espace vectoriel engendré par une famille \mathcal{F} , on peut trouver une base en choisissant certains vecteurs de \mathcal{F} de manière à avoir une deuxième famille \mathcal{F}' , qui engendre toujours F et qui est libre (donc une base). On peut même créer plusieurs bases (mais elles auront toujours le même nombre de vecteurs!).

D'une manière générale, on a le théorème suivant :

Théorème 21.

Tout sous-espace vectoriel F de \mathbb{R}^n possède une base \mathcal{B} .
De plus, toutes les bases d'un sous-espace vectoriel F ont le même nombre d'éléments. Ce nombre est appelé la **dimension** de F . On le note $\dim(F)$.

Exemples.

- le sous-espace vectoriel $\{\vec{0}\}$ formé du seul vecteur nul a , par convention, une base vide. Donc sa dimension est $\dim(\{\vec{0}\}) = 0$. C'est même le seul sous-espace vectoriel de dimension nulle.
- \mathbb{R}^n (vu comme un sous-espace vectoriel) a comme base la base canonique par exemple. Cette base contient n éléments, donc $\dim(\mathbb{R}^n) = n$.
- Soit X un vecteur non nul et $F = \text{Vect}(X)$. (X étant une base de F , on a $\dim(F) = 1$)

Propriété 22.

Soit F un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n . On a alors

$$0 \leq \dim(F) \leq n$$

De plus :

- Si $\dim(F) = 0$, alors $F = \{\vec{0}\}$.
- Si $\dim(F) = n$, alors $F = \mathbb{R}^n$.

Propriété 23.

Si F et E sont deux sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^n vérifiant $E \subset F$, alors on a $\dim(E) \leq \dim(F)$.
De plus, si $E \subset F$ et $\dim(E) = \dim(F)$, alors $E = F$.

La dimension d'un sous espace vectoriel impose des conditions sur le nombre d'éléments des familles libres, génératrices et des bases.

Propriété 24.

Soit F un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n de dimension $\dim(F)$:

- Toute famille libre de vecteurs de F contient au maximum $\dim(F)$ vecteurs. De plus, si une famille libre contient exactement $\dim(F)$ vecteurs, alors c'est une base.
- Toute famille génératrice de vecteurs de F contient au minimum $\dim(F)$ vecteurs. De plus, si une famille génératrice contient exactement $\dim(F)$ vecteurs, alors c'est une base.

Remarque : En nombre d'éléments, on a libre \leq base \leq génératrice.

Théorème.

Soit F un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n .

- Toute famille \mathcal{F} génératrice de F contient une base.
- De plus, si \mathcal{F} est génératrice de F et si \mathcal{G} est une famille libre de F , alors on peut compléter \mathcal{G} avec des vecteurs de \mathcal{F} pour former une base de F
- **(Théorème de la base incomplète)** Toute famille libre de F peut être complétée en une base.

3.2 Intersection de sous-espaces vectoriels

Propriété 26.

Si F et G sont deux s.e.v. de \mathbb{R}^n , alors leur intersection

$$F \cap G = \{v \in \mathbb{R}^n \mid v \in F \text{ et } v \in G\}$$

est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n .

Exemple. Dans \mathbb{R}^3 , les sous-ensembles $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y + z = 0\}$ et $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 2x - y + 3z = 0\}$ sont des sous-espaces vectoriels. Donc $F \cap G$, qui est le sous-ensemble $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y + z = 0 \text{ et } 2x - y + 3z = 0\}$ est aussi un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 .

Remarque : Attention, la réunion de deux sous-espaces vectoriels n'est pas nécessairement un sous-espace vectoriel !

3.3 Somme de deux sous-espaces vectoriels

Définition 27.

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^n . L'ensemble $F + G = \{u + v, u \in F, v \in G\}$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n qu'on appelle la somme des sous-espaces vectoriels F et G .

Autrement dit, $F + G$ est l'ensemble des vecteurs qui peuvent se décomposer en la somme d'un élément de F et d'un élément de G .

Définition 28.

On dit que deux sous-espaces vectoriels F et G de \mathbb{R}^n sont supplémentaires si tout vecteur de \mathbb{R}^n peut se décomposer de façon unique comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G .

Théorème 29.

Les sous-espaces vectoriels F et G sont supplémentaires si, et seulement si,

$$F + G = \mathbb{R}^n \quad \text{et} \quad F \cap G = \{0_n\}.$$

Dans ce cas, on note $\mathbb{R}^n = F \oplus G$.

Exemple. Dans \mathbb{R}^2 , on considère $F = \text{Vect}\{(-1, 1)\}$ et $G = \text{Vect}\{(2, 2)\}$. Montrer que ces espaces sont supplémentaires et écrire la décomposition d'un vecteur $X(x, y)$ sur $F \oplus G$.

Exercice 1

(*) Dans \mathbb{R}^2 , on considère la famille (X_1, X_2, X_3) avec $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Montrer que cette famille est liée.

Exercice 2

(**) Dans chacun des cas, déterminer si les vecteurs forment une famille libre, une famille génératrice ou une base de \mathbb{R}^n .

- $v_1 = (1, 2, 1)$, $v_2 = (1, -1, 1)$
- $v_1 = (1, 3, 1)$, $v_2 = (-1, 0, 1)$, $v_3 = (2, 3, 0)$, $v_4 = (0, 1, 1)$
- $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (1, 3, -1)$, $v_3 = (1, -1, 3)$
- $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (2, 1, 0)$, $v_3 = (1, 1, 1)$
- $v_1 = (2, 0, 1, 3)$, $v_2 = (1, 1, 0, -1)$, $v_3 = (0, -2, 1, 5)$, $v_4 = (1, -3, 2, 9)$

Exercice 3

(**)

- Montrer que la famille $\mathcal{B} = ((1, -1), (1, 0))$ de \mathbb{R}^2 est une base.
- Trouver les coordonnées du vecteur $(2, 3)$ dans cette base (sans utiliser les matrices)
- Donner la matrice de passage de la base canonique à la base \mathcal{B} .
- Calculer $P(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ et en déduire les coordonnées dans la base \mathcal{B} du vecteur $(4, -1)$.

Exercice 4

(**) Soit \mathcal{C} la base canonique de \mathbb{R}^3 et \mathcal{B}_1 et \mathcal{B}_2 les familles de \mathbb{R}^3 définies par :

$$\mathcal{B}_1 = ((1, 2, 1), (2, 3, 3), (3, 7, 1)) \quad \text{et} \quad \mathcal{B}_2 = ((3, 1, 4), (5, 3, 2), (1, -1, 7)).$$

- Vérifier que \mathcal{B}_1 et \mathcal{B}_2 sont deux bases de \mathbb{R}^3 .
- Donner la matrice de passage de la base canonique \mathcal{C} à la base \mathcal{B}_1 , puis la matrice de passage de la base \mathcal{B}_1 à la base canonique \mathcal{C} .
- Soit X vecteur de coordonnées canoniques $(1, -3, 2)$. Donner les coordonnées de X dans la base \mathcal{B}_1 .
- Déterminer la matrice de passage de la base \mathcal{B}_1 à la base \mathcal{B}_2 .
- Exprimer le premier vecteur de la base \mathcal{B}_2 comme combinaison linéaire des vecteurs de la base \mathcal{B}_1 .

Exercice 5

(★) Montrer que $F = \{(x, 0, 0) \in \mathbb{R}^3, x \in \mathbb{R}\}$ est un sous espace vectoriel de \mathbb{R}^3 .

Exercice 6

(★) Parmi les ensembles suivants, lesquels sont bien des sous-espace vectoriels de \mathbb{R}^2 définis par un système linéaire d'équations homogènes? Donner la matrice du système dans ce cas.

1. $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } y = x^2\}$
2. $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } x = y\}$

Parmi les ensembles suivants, lesquels sont bien des sous-espace vectoriels de \mathbb{R}^3 définis par un système linéaire d'équations homogènes? Donner la matrice du système dans ce cas.

1. $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } y = 3x + 1\}$
2. $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } y = 3x\}$
3. $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } 3x - y = 0 \text{ et } 2x - z = 0\}$

Question bonus : prouvez que les ensembles qui ne sont pas définis par un système d'équations linéaires ne sont pas des sous-espaces vectoriels.

Exercice 7

(★★) Dans \mathbb{R}^2 , soient $\vec{u} = (1, 3)$, $\vec{v} = (-5, 2)$ et $F = \text{Vect}(\{\vec{u}, \vec{v}\})$. Montrer que $X = (-7, 13) \in F$.

Exercice 8

(★★★) Soit X un vecteur non nul de \mathbb{R}^n et $D = \text{Vect}(\{X\})$ la droite vectorielle engendrée par X . Montrer que $\mathcal{F}' = \{2X\}$ est aussi une famille génératrice de D .

Exercice 9

(★) Soient $u = (1, 1, 1)$ et $v = (0, 0, 1)$ deux vecteurs de \mathbb{R}^3 . Donner une condition nécessaire et suffisante sur $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ pour que $(x, y, z) \in \text{Vect}(\{u, v\})$.

Exercice 10

(★★) Dans l'espace \mathbb{R}^4 , on considère les vecteurs :

$$v_1 = (1, 1, 1, 1), \quad v_2 = (1, 3, 2, 4), \quad v_3 = (2, 1, 4, 0), \quad v_4 = (3, 0, 2, 3), \quad v_5 = (2, 0, 0, 1).$$

Le but de l'exercice est de construire une base de \mathbb{R}^4 à l'aide de ces vecteurs.

1. Montrer que la famille $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ engendre \mathbb{R}^4 . Est-ce une famille libre ?
2. Extraire de la famille $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ une base de \mathbb{R}^4 .
3. Exprimer le vecteur restant comme combinaison linéaire des vecteurs de cette base.

Exercice 11

(★★) Dans \mathbb{R}^3 , on considère l'ensemble F des vecteurs (x, y, z) tel que

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}$$

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 , en donner une base et sa dimension.

Exercice 12

(★★) Dans \mathbb{R}^4 , on considère le sous-espace vectoriel F engendré par les vecteurs $u = (1, 1, 1, 1)$ et $v = (1, 2, 1, -3)$. Quelle est la dimension de F ? En donner une base. Donner également un système d'équations qui caractérise F .

Exercice 13

(★★) Soit une famille de vecteurs $\mathcal{F}(u, v, w, z)$ génératrice de \mathbb{R}^3 .

1. Cette famille peut-elle être une base de \mathbb{R}^3 ?
2. On suppose que z est une combinaison linéaire de (u, v, w) . Prouver que la famille $\mathcal{F}'(u, v, w)$ est génératrice de \mathbb{R}^3 . Que peut-on en conclure ?

Exercice 14

(★★) Donner la dimension du sous-espace vectoriel (de \mathbb{R}^3 (1.) ou \mathbb{R}^4 (2.)) engendré par les familles composées des vecteurs suivants.

1. $u_1 = (1, 1, 0), \quad u_2 = (0, 1, 1), \quad u_3 = (1, 0, 1)$
2. $u_1 = (1, 0, 1, 0), \quad u_2 = (1, 1, 0, 0), \quad u_3 = (-1, -1, 1, 0), \quad u_4 = (0, 0, 2, 0)$.

Exercice 15

(★★) Soit P le plan de \mathbb{R}^3 d'équation $x + y - z = 0$. Soit D la droite de \mathbb{R}^3 engendrée par $u = (2, 0, 1)$. Montrer que D et P sont supplémentaires dans \mathbb{R}^3 , et donner la décomposition de $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ sur $D \oplus P$.

Fiche de révision XIII : Vecteurs de \mathbb{R}^n

le vecteur x est une combinaison linéaire de la famille (u, v, w) signifie quoi ?	$x = au + bv + cw$ avec a, b, c des constantes.
---	---

La famille (u, v, w) est libre signifie quoi ?	Si $au + bv + cw = \vec{0}$ avec a, b, c des constantes, alors on a forcément $a = b = c = 0$.
--	---

La famille (u, v, w) est liée signifie quoi ?	Il existe des a, b, c non tous nuls tels que $au + bv + cw = \vec{0}$. Dans ce cas, un des vecteurs de la famille est une combinaison linéaire des autres.	Donner $\mathcal{C}(e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de \mathbb{R}^3 .	$e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ et $e_3 = (0, 0, 1)$.
Quelle est la méthode pour montrer qu'une famille (u, v, w) est libre ou liée ?	On pose des constantes a, b, c telles que $au + bv + cw = \vec{0}$. On cherche à résoudre les équations pour déterminer ces constantes. Si elles sont toutes nulles, la famille est libre, si il y a des solutions non nulles, alors la famille est liée.	On a $\mathcal{B}(u, v, w, x)$ une base de \mathbb{R}^4 et on note \mathcal{C} la base canonique de \mathbb{R}^4 . Comment noter et construire la matrice de passage de \mathcal{C} à \mathcal{B} . Cette matrice a quelle propriété ?	On met les coordonnées canoniques des vecteurs u, v, w, x en colonnes, côte à côte, et ça fait la matrice $P(\mathcal{C}, \mathcal{B})$. Elle est carrée et inversible.
Une famille (u, v, w) est génératrice de \mathbb{R}^n si ?	Pour tout vecteur X de \mathbb{R}^n , on peut trouver a, b, c constantes telles que $au + bv + cw = X$.	Soient X un vecteur, \mathcal{C} et \mathcal{B} deux bases. On note $X_{\mathcal{C}}$ les coordonnées de X dans \mathcal{C} et $X_{\mathcal{B}}$ les coordonnées de X dans \mathcal{B} . Donner les formules permettant de passer de $X_{\mathcal{C}}$ à $X_{\mathcal{B}}$ et inversement.	$X_{\mathcal{C}} = P(\mathcal{C}, \mathcal{B})X_{\mathcal{B}}$ $X_{\mathcal{B}} = (P(\mathcal{C}, \mathcal{B}))^{-1}X_{\mathcal{C}}$.
Donner la technique pour vérifier si une famille (u, v, w) est génératrice de \mathbb{R}^n .	On pose un vecteur X de \mathbb{R}^n , et on cherche a, b, c constantes telles que $au + bv + cw = X$. Si le système n'a pas d'équation auxiliaires (sauf $0 = 0$), alors la famille est génératrice de \mathbb{R}^n . Si il y a des equations auxilliaire, la famille n'est pas génératrice de \mathbb{R}^n .	Si \mathcal{B} et \mathcal{B}' sont deux bases, comment noter et calculer la matrice de passage de \mathcal{B} vers \mathcal{B}' (deux possibilités) ?	$P(\mathcal{B}, \mathcal{B}') = P(\mathcal{C}, \mathcal{B})^{-1}P(\mathcal{C}, \mathcal{B}')$ $= P(\mathcal{B}, \mathcal{C})P(\mathcal{C}, \mathcal{B}')$ On calcule les coordonnées des vecteurs de \mathcal{B}' dans la base \mathcal{B} et on dispose en colonnes pour faire une matrice qui est alors $P(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$.
Quelle est la définition d'une base de \mathbb{R}^n ?	Une famille de vecteurs libre et génératrice.	Si $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3$ sont trois bases de \mathbb{R}^n , alors $P(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) \times P(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3) = ?$	$P(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) \times P(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3) = P(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_3)$
Que peut-on dire d'une famille libre de n vecteurs dans \mathbb{R}^n ?	C'est une base de \mathbb{R}^n .	$P(\mathcal{B}, \mathcal{B}')^{-1} = ?$	$P(\mathcal{B}, \mathcal{B}')^{-1} = P(\mathcal{B}', \mathcal{B})$
Que peut-on dire d'une famille génératrice de n vecteurs dans \mathbb{R}^n ?	C'est une base de \mathbb{R}^n .	Un sous-ensemble F de \mathbb{R}^n est appelé un sous-espace vectoriel (s.e.v) si F vérifie ?	$\vec{0} \in F$ et $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall X, Y \in F, \lambda X + Y \in F$.
Si (u, v, w, x) est une base de \mathbb{R}^4 et les constantes (a, b, c, d) sont les coordonnées de y dans cette base, alors ... ?	$y = au + bv + cw + dx$	C'est quoi $\text{Vect}(u, v, w)$? Que contient-il ?	C'est l'espace vectoriel engendré par la famille (u, v, w) . Il contient tous les vecteurs $X = au + bv + cw$ avec a, b, c des constantes.

C'est quoi une famille génératrice d'un s.e.v F ?	C'est une famille de vecteur \mathcal{F} telle que $F = \text{Vect}(\mathcal{F})$.	La dimension d'un sous-espace vectoriel F de \mathbb{R}^n est comprise entre quels nombres? Que se passe-t-il si la dimension de F est la valeur minimale? Et maximale?	La dimension de F est entre 0 et n . Si c'est 0, alors $F = \{\vec{0}\}$. Si c'est n , alors $F = \mathbb{R}^n$.
Que peut-on dire de l'ensemble des solutions d'un système d'équations linéaires $AX = \vec{0}$ (avec A une matrice et X un vecteur de \mathbb{R}^n)?	ça forme un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n .	F et E sont deux sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^n vérifiant $E \subset F$ et $\dim(E) = \dim(F)$, alors ...?	$E = F$
Soit $F = \{X \in \mathbb{R}^p, AX = \vec{0}\}$, comment écrire F avec une famille génératrice?	On résout le système avec le pivot de Gauss partiel en écrivant les solutions avec des paramètres (sinon, c'est que $F = \{\vec{0}\}$). Puis on décompose les solutions en écrivant une colonne par paramètres. Des colonnes forment une famille de vecteur qui est génératrice de F .	Si F est de dimension p . Que peut-on dire d'une famille libre de p vecteurs? Et d'une famille génératrice de p vecteurs?	Ce sont des bases.
Soit $F = \text{Vect}(u, v, w)$. Comment écrire F avec des équations?	Soit $X(x, y, z, \dots)$ un vecteur de F , alors il existe a, b, c tels que $X = au + bv + cw$. ça forme un système et on commence le pivot de Gauss avec (a, b, c) comme inconnues. Quand on a fini le pivot partiel, on ne conserve que les équations auxiliaires qui sont les équations de F .	Si F et G sont deux s.e.v. de \mathbb{R}^n , que dire de $F \cap G$?	$F \cap G = \{v \in E \mid v \in F \text{ et } v \in G\}$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n .
Si F est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n , c'est quoi une base de F ?	C'est une famille \mathcal{F} qui est libre et génératrice de F ($F = \text{Vect } \mathcal{F}$).	F et G deux sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^n . C'est quoi $F + G$?	$F + G = \{u + v, u \in F, v \in G\}$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n qu'on appelle la somme des sous-espaces vectoriels F et G . C'est l'ensemble des vecteurs qui peuvent se décomposer en la somme d'un élément de F et d'un élément de G .
Quelle est la définition de la dimension d'un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n ?	C'est le nombre de vecteurs dans une base de F .	Donner la définition de deux sous-espaces vectoriels supplémentaires F et G de \mathbb{R}^n , et le théorème permettant de le vérifier.	deux sous-espaces vectoriels F et G sont supplémentaires si tout vecteur de \mathbb{R}^n peut se décomposer de façon unique comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G . F et G sont supplémentaires si, et seulement si, $F + G = \mathbb{R}^n$ et $F \cap G = \{0_n\}$.
$\dim\{\vec{0}\} = ?$ $\dim \mathbb{R}^n = ?$	$\dim\{\vec{0}\} = 0$ $\dim \mathbb{R}^n = n$		