12. Polynômes et fractions rationnelles

1 Ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$

1.1 Définitions et opérations

La plupart des résultats que l'on donnera dans ce chapitre ne changent pas selon qu'on travaille dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$. Pour alléger les énoncés des résultats, on notera $\mathbb{K}$ pour $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, lorsqu'il n'y a pas besoin de faire une distinction.

Définition 1.

Un **polynôme à coefficients dans** $\mathbb{K}$ est une fonction P de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$ de la forme

$$P: \ x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

où n est un entier naturel et les nombres $a_0, \ldots, a_n$sont des constantes appartenant à $\mathbb{K}$, appelées **coefficients** de P.

On appelle **monôme** tout polynôme de la forme $x \mapsto a_n x^n$.

Notation. Pour tout entier naturel k, on note X^k le polynôme $X^k : x \mapsto x^k$. Ainsi, le polynôme $P : x \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ peut s'écrire $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. On notera ce polynôme P ou $P(X)$ indifféremment. En particulier, X est une notation pour la fonction $x \mapsto x$. X n'est donc pas une variable ! !

Exemples.

1. Le polynôme nul est noté 0.
2. Le polynôme $P : x \mapsto 3x^2 + 2x - 1$ est noté $3X^2 + 2X - 1$.

Définition 2.

L'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathbb{K}[X]$. On peut additionner, soustraire et multiplier des polynômes. On peut aussi les multiplier par une constante. On peut dériver et primitiver les polynômes.

Exemple. L'ensemble $\mathbb{R}[X]$ contient par exemple les polynômes 0, 4, $\pi X^{12} - 6X$. Ces trois mêmes polynômes sont aussi des éléments de $\mathbb{C}[X]$. Le polynôme $iX^3 + 3$ appartient à $\mathbb{C}[X]$ mais pas à $\mathbb{R}[X]$.

Propriété 3.

Si un polynôme P vérifie : $\forall x \in \mathbb{K},\ P(x) = 0$, alors tous les coefficients de P sont nuls.

En particulier, si P et Q sont deux polynômes vérifiant : $\forall x \in \mathbb{K},\ P(x) = Q(x)$ (c'est-à-dire $P = Q$), alors P et Q ont les mêmes coefficients.

Démonstration. (cas d'un polynôme de $\mathbb{R}[X]$)

▷ Soit $P : x \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ un polynôme à coefficients dans $\mathbb{R}$ vérifiant $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = 0$.

Raisonnons par l'absurde et supposons qu'un au moins des coefficients de P est non nul. Alors l'ensemble d'indices $\big\{k \in \{0, \ldots, n\} \mid a_k \neq 0\big\}$ n'est pas vide. Notons M son plus grand élément. On peut donc écrire : $\forall x \in \mathbb{K},\ P(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{M} a_k x^k$ et $a_M \neq 0$.

Si $M = 0$, alors on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = a_0$ et $a_0 \neq 0$. C'est absurde.

Si $M > 0$, alors on a $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} P(x) = \lim_{x \to +\infty} a_M x^M = +\infty$ ou $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} P(x) = \lim_{x \to +\infty} a_M x^M = -\infty$ suivant le signe de a_M et la parité de M. Ces deux cas sont impossibles puisque la fonction P est nulle.

En conclusion, tous les coefficients de P sont nuls.

▷ Soit $P : x \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ et $Q : x \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{m} b_k x^k$. Sans perdre de généralité, on peut supposer que $n \leqslant m$. Si $n < m$, on pose $a_{n+1} = \cdots = a_m = 0$ de sorte que l'on a : $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{m} a_k x^k$.

Supposons que $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = Q(x)$. On a alors : $\forall x \in \mathbb{R},\ (P - Q)(x) = 0$ et $(P - Q)(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{m} (a_k - b_k) x^k$. D'après le résultat précédent, $a_k = b_k$ pour tout $k \in \{0, \ldots, m\}$. Donc P et Q ont les mêmes coefficients.

1.2 Degré d'un polynôme

Définition 4.

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme **non nul** à coefficients dans $\mathbb{K}$. Le **degré de** P est le plus grand indice k tel que a_k soit non nul. On le note $\deg(P)$. Le degré du polynôme nul est $-\infty$ par convention.

Si $d = \deg(P)$, alors le coefficient a_d est appelé le **coefficient dominant** de P. On dit qu'un polynôme non nul est **unitaire** lorsque son coefficient dominant est égal à 1.

Pour tout entier naturel n, on note $\mathbb{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré **inférieur ou égal** à n.

Exemples.

1. Le polynôme $-4X^5 + 3X + 1$ est de degré 5. Son coefficient dominant est -4.
2. Les polynômes de degré 0 sont les polynômes constants non nuls.
3. Les trinômes du second degré sont les polynômes de la forme $aX^2 + bX + c$, où a est non nul.
4. Le polynôme $X^3 + 2X + 5$ est unitaire.
5. On a $\mathbb{R}_2[X] = \left\{a_0 + a_1X + a_2X^2, (a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3\right\}$. L'ensemble $\mathbb{R}_2[X]$ est formé des trinômes du second degré, des polynômes de degré 1 et des polynômes constants (polynôme nul compris).

Propriété.

Soit P et Q deux polynômes. Soit λ une constante appartenant à $\mathbb{K}$.

1. On a $\deg(P + Q) \leqslant \max(\deg(P), \deg(Q))$. Plus précisément :
   (a) Si $\deg(P) < \deg(Q)$, alors $\deg(P + Q) = \deg(Q)$.
   (b) Si P et Q ont même degré d et si la somme de leurs coefficients dominants est non nulle, alors $P + Q$ est aussi de degré d.
2. Si $\lambda \neq 0$, alors $\deg(\lambda P) = \deg(P)$.
3. On a $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$.

Remarque :

1. Si P et Q sont deux polynômes de degré n, le degré du polynôme $P + Q$ peut être strictement inférieur à n. Par exemple, les polynômes $P = 3X^5 + 2$ et $Q = -3X^5 + 4X$ sont de degré 5 mais leur somme $P + Q = 4X + 2$ est de degré 1.
2. La relation sur le degré d'un produit de deux polynômes justifie la définition $\deg(0) = -\infty$. En effet, il faut que pour tout polynôme P, on ait $\deg(0.P) = \deg(0) = \deg(0) + \deg(P)$.

Propriété 6.

Soit P un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$.

1. On a $\deg(P') = \begin{cases} \deg(P) - 1 & \text{si } P \text{ n'est pas constant,} \\ -\infty & \text{si } P \text{ est constant.} \end{cases}$
2. Plus généralement, si P est non nul et de degré n, alors pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, le polynôme $P^{(k)}$ est de degré $n - k$. Dans ce cas, pour tout $k \geqslant n + 1$, le polynôme $P^{(k)}$ est le polynôme nul.

Exemple. Si l'on dérive plus de trois fois un polynôme de degré 3 ($P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d$), on obtient le polynôme nul ($P^{(4)}(X) = P^{(5)}(X) = \cdots = 0$).

1.3 Arithmétique des polynômes

Théorème 7.

(division euclidienne) Pour tous polynômes A et B, <u>le polynôme B étant non nul</u>, il existe un unique couple (Q,R) de polynômes tel que

$$A = QB + R \qquad \text{et} \qquad \deg(R) < \deg(B).$$

Q est le quotient et R le reste de la division euclidienne de A par B.

Remarque : « Effectuer la division euclidienne de A par B », c'est trouver les polynômes Q et R.

Exemple. Effectuons la division de $X^4 + X^3 - X^2 + X - 2$ par $X^2 - X + 1$.

Exercice 1

Faire la division euclidienne de $A = 6X^4 - 8X^3 + 3X^2 - 2X + 5$ par $B = 2X^2 - 2X + 3$.

Définition 8.

On dit qu'un polynôme B divise un polynôme A, et l'on note $B|A$, si et seulement si il existe un polynôme Q tel que $A = Q.B$; on dit alors que A est divisible par B, que A est un multiple de B et que B est un diviseur de A.

Exemple. Le polynôme $X^2 - 1$ est un multiple de $X + 1$ car on peut écrire $X^2 - 1 = (X - 1)(X + 1)$.

Propriété 9.
B divise A si et seulement si le reste de la division euclidienne de A par B est nul.

2 Racines d'un polynôme

2.1 Définitions et caractérisations

Définition 10.
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. On dit que le nombre α est une racine de P si et seulement si on a : $P(\alpha) = 0$.

Remarque : Le polynôme nul admet tout nombre pour racine.

Propriété 11.
Le nombre $\alpha \in \mathbb{K}$ est une racine du polynôme P si et seulement si $(X - \alpha)$ divise P.

Démonstration. $\Leftarrow$ Si $(X - \alpha)$ divise P, alors il existe un polynôme Q tel que $P = (X - \alpha)Q$. On pose $x = \alpha$ et on obtient $P(\alpha) = (\alpha - \alpha)Q(\alpha) = 0$. Donc α est une racine de P.

$\Rightarrow$ Si α est une racine de P, on fait la division euclidienne de P par $(X - \alpha)$. Il existe donc Q, R des polynômes tels que $P = (X - \alpha)Q + R$, avec $deg(R) < \deg(X - \alpha) = 1$. Donc R est un polynôme constant, c'est à dire $R = c$ qu'on reporte dans la relation : $P = (X - \alpha)Q + c$. On pose $x = \alpha$ et on obtient $P(\alpha) = c$. Or α est une racine de P donc $P(\alpha) = 0 = c$, donc $R = 0$. Donc $(X - \alpha)$ divise P.

Exemple. 5 est une racine du polynôme $P = X^3 - 5X^2$ car $P = (X - 5)X^2$.

Définition 12.
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme non nul. Soit $\alpha \in \mathbb{K}$. On suppose que α est une racine de P. **L'ordre de multiplicité** de la racine α de P est l'exposant m maximal tel que $(X - \alpha)^m$ divise P.

Autrement dit, le nombre α est une racine de multiplicité m de P si et seulement si le polynôme $(X - \alpha)^m$ divise P et le polynôme $(X - \alpha)^{m+1}$ ne divise pas P.

Les racines de multiplicités 1, 2 et 3 sont respectivement appelées racine simple, double et triple.

Exemple. 5 est une racine simple du polynôme $P = X^3 - 5X^2$ car $P = (X - 5)X^2$. On a $(X - 5)$ qui divise P, mais si on divise P par $(X - 5)^2 = X^2 - 10X + 25$, on obtient $P = (X^2 - 10X + 25)(X - 5) + (25X - 125)$. Donc ce n'est pas divisible et 5 n'est pas racine double.

Propriété 13.
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme non nul. Soit $\alpha \in \mathbb{K}$ une racine de P. Soit $m \geqslant 1$ un nombre entier.

1. Le nombre α est une racine de multiplicité m de P si et seulement si il existe un polynôme Q vérifiant
$$P(X) = (X - \alpha)^m Q(X) \quad \text{et} \quad Q(\alpha) \neq 0.$$
2. Le nombre α est une racine de multiplicité m de P si et seulement si on a :
$$P(\alpha) = P'(\alpha) = \cdots = P^{(m-1)}(\alpha) = 0 \quad \text{et} \quad P^{(m)}(\alpha) \neq 0.$$

Exemple. On reprend $P = X^3 - 5X^2$. On a $P(0) = 0$ donc 0 est racine de P. On dérive : $P' = 3X^2 - 10X$ et on a $P'(0) = 0$. On dérive encore $P" = 6X - 10$ et $P"(0) = -10 \neq 0$. Donc 0 est une racine double de P.

Propriété.
Soit P un polynôme à coefficients réels. Si α est une racine complexe de P de multiplicité m, alors son conjugué $\overline{\alpha}$ est aussi une racine de P de même ordre de multiplicité m.

2.2 Factorisation d'un polynôme

Propriété 15.
1. Soit P un polynôme de degré inférieur ou égal à n.
   (a) Si P est non nul, alors la somme des ordres de multiplicité de toutes les racines de P est inférieure ou égale à n.
   (b) Si P est non nul, alors le polynôme P possède au plus n racines distinctes.
   (c) Si le polynôme P possède au moins $n + 1$ racines, alors P est le polynôme nul.
2. Un polynôme qui admet une infinité de racines est le polynôme nul.
3. Soit P et Q deux polynômes de degrés inférieurs ou égaux à n. Si P et Q coïncident en au moins $(n + 1)$ points (ou un nombre infini de points), alors P et Q sont égaux.

Remarque : Coïncider en au moins $(n+1)$ points signifie qu'il y a au moins $(n+1)$ nombres $x_1, x_2, \ldots$ distincts tels que $P(x_1) = Q(x_1)$, $P(x_2) = Q(x_2)$, ... Graphiquement, les courbes de P et Q se croisent aux moins $n+1$ fois.

Propriété 16.

Soit P un polynôme non nul de $\mathbb{K}[X]$ de degré n et de coefficient dominant a_n. Soit $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ les racines distinctes de P de multiplicités respectives $m_1, m_2, \ldots, m_r$. Si on a

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_r = n$$

alors P se factorise ainsi :

$$P(X) = a_n(X - \alpha_1)^{m_1} \times \cdots \times (X - \alpha_r)^{m_r}.$$

Un tel polynôme, factorisable sous forme d'un produit de polynômes de degré 1 à coefficients dans $\mathbb{K}$, est dit **scindé sur** $\mathbb{K}$.

Exemples. $P = X^3 - 5X^2$ a pour racine 5 (multiplicité 1) et 0 (multiplicité 2). La somme des multiplicités est $1 + 2 = 3 = \deg(P)$. Le polynôme P se factorise sous cette forme $P = 1(X-5)X^2$. Il est scindé.
Par contre $X^2 + 1$ n'est pas scindé sur $\mathbb{R}[X]$ car il n'a pas de racines réelles.

3 étude de $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$

3.1 Polynômes irréductibles

Les polynômes irréductibles sont aux polynômes ce que les nombres premiers sont aux nombres entiers : on ne peut pas les diviser.

Définition.

Un polynôme P de $\mathbb{K}[X]$ est dit irréductible sur $\mathbb{K}$ si et seulement si il vérifie les deux conditions :

1. $\deg(P) \geqslant 1$.
2. les seuls polynômes de $\mathbb{K}[X]$ qui divisent P sont les polynômes constants non nuls et les polynômes de la forme λP, avec $\lambda \in \mathbb{K}^*$.

Remarque :

1. Tout polynôme de degré 1 est irréductible.
2. Si un polynôme de degré supérieur ou égal à 2 possède une racine α dans $\mathbb{K}$, alors il n'est pas irréductible sur $\mathbb{K}$ puisqu'il est divisible par $(X - \alpha)$.
3. Si P est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$, il peut être irréductible sur $\mathbb{R}$ mais réductible sur $\mathbb{C}$.

   Exemple : Le polynôme $X^2 + 1$ est irréductible sur $\mathbb{R}$ mais il ne l'est pas sur $\mathbb{C}$ puisqu'on peut le factoriser sous la forme $X^2 + 1 = (X - i)(X + i)$.
4. Un polynôme qui n'admet pas de racine dans $\mathbb{R}$ n'est pas nécessairement irréductible sur $\mathbb{R}$.

   Par exemple, le polynôme $X^4 + 2X^2 + 1$ n'admet pas de racine dans $\mathbb{R}$ (puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $x^4 + 2x^2 + 1 \geqslant 1$), mais il est réductible dans $\mathbb{R}[X]$ car $X^4 + 2X^2 + 1 = (X^2 + 1)^2$.

3.2 Factorisation dans $\mathbb{C}[X]$

Théorème.

de D'Alembert-Gauß Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ possède au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

Propriété.

1. Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont exactement les polynômes de degré 1 ($aX + b$ avec $a \in \mathbb{C}^\star, b \in \mathbb{C}$).
2. Tout polynôme P non constant de $\mathbb{C}[X]$ se décompose en un produit de polynômes de degré 1, autrement dit, tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ est scindé sur $\mathbb{C}$.
3. Tout polynôme complexe de degré $n \geqslant 1$ possède exactement n racines complexes comptées avec leur multiplicité.

Propriété 20.

(Décomposition d'un polynôme sur $\mathbb{C}[X]$) Soit P un polynôme de degré n de $\mathbb{C}[X]$ et de coefficient dominant a_n. Le polynôme P se factorise de manière unique (à l'ordre près des facteurs) de la façon suivante :

$$P = a_n(X - \alpha_1)^{m_1} \times \cdots \times (X - \alpha_r)^{m_r} = a_n \prod_{i=1}^{r} (X - \alpha_i)^{m_i}$$

où $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ sont les racines de P (réelles et complexes), de multiplicités respectives $m_1, \ldots, m_r$ et a_n est le coefficient dominant de P. En particulier, on a : $\displaystyle\sum_{k=0}^{r} m_k = n$.

Exercice 2

Soit le polynôme $P = X^2 + 4$. Déterminer les racines complexes de P et en déduire sa factorisation en produit de facteurs irréductibles.

3.3 Factorisation dans $\mathbb{R}[X]$

Soit P un polynôme à coefficients réels. Les racines de P sont soit réelles, soit complexes non réelles et conjuguées deux à deux avec le même ordre de multiplicité.
Notons $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ les racines **réelles** de P de multiplicités respectives $r_1, \dots, r_p$ et $\delta_1, \overline{\delta_1}, \dots, \delta_q, \overline{\delta_q}$ les racines **complexes** de P de multiplicités respectives $s_1, \dots, s_q$.

Sur $\mathbb{C}[X]$, le polynôme P se factorise de manière unique sous la forme :

$$\begin{aligned} P(X) &:= a_n \prod_{j=1}^{p} \left(X - \alpha_j\right)^{r_j} \prod_{\ell=1}^{q} \left((X - \delta_\ell)(X - \overline{\delta_\ell})\right)^{s_\ell} \\ &= a_n \prod_{j=1}^{p} \underbrace{\left(X - \alpha_j\right)^{r_j}}_{\in \mathbb{R}[X]} \prod_{\ell=1}^{q} \underbrace{\left(X^2 - 2\,\Re(\delta_\ell)X + |\delta_\ell|^2\right)^{s_\ell}}_{\in \mathbb{R}[X]}. \end{aligned}$$

Pour tout $\ell \in \{1, \dots, q\}$, le polynôme $X^2 - 2\,\Re(\delta_\ell)X + |\delta_\ell|^2$ admet deux racines complexes non réelles conjuguées donc son discriminant est négatif. On vient de démontrer le résultat suivant :

Propriété 21.

(Décomposition d'un polynôme sur $\mathbb{R}[X]$)
Soit P un polynôme à coefficients réels de degré n. Le polynôme P se factorise de manière unique (à l'ordre près des facteurs) de la façon suivante :

$$P = a_n \prod_{j=1}^{p} \left(X - \alpha_j\right)^{r_j} \prod_{\ell=1}^{q} \Big(\underbrace{X^2 + \beta_\ell X + \gamma_\ell}_{\substack{\text{discriminant} \\ \text{strictement négatif}}}\Big)^{s_\ell}$$

où $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ sont les racines **réelles** de P de multiplicités respectives $r_1, \dots, r_p$, a_n est le coefficient dominant de P et $X^2 + \beta_\ell X + \gamma_\ell$ sont des polynômes réels à discriminant négatif.

Exercice 3

Soit P un polynôme réel de degré 7, de coefficient dominant 2, dont on connait les racines suivantes : $2i$ racine double et i, $-i$, -3 racines simples.

1. En déduire la ou les racines complexes manquantes.
2. Donner la factorisation de P dans $\mathbb{C}[X]$ puis en déduire celle dans $\mathbb{R}[X]$.

Propriété.

Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes de degré 1 ($aX + b$ avec $a \in \mathbb{R}^\star, b \in \mathbb{R}$) et les polynômes de degré 2 dont le discriminant est strictement négatif ($aX^2 + bX + c$ avec $a \in \mathbb{R}^\star, b, \in \mathbb{R}$ et $\Delta < 0$).

3.4 Recherche de racines entières pour un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ à coefficients entiers

Technique. Pour un polynôme P **à coefficients entiers**, on regarde le coefficient constant et on teste si les diviseurs de ce coefficient sont des racines. Si oui, on a trouvé les racines entières, sinon il n'y a pas de racines entières.

3.5 Exemple de décomposition en produit de polynômes irréductibles

Décomposer dans $\mathbb{R}[X]$ puis dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme $P = X^4 - 2X^3 + 2X^2 - 2X + 1$.

Exemple. Trouvez une racine entière de $P = 2X^3 + 7X^2 + 6X + 9$ puis décomposez-le en facteurs irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.

3.6 Relations coefficients-racines pour un polynôme scindé

Soit $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme de degré n et scindé sur $\mathbb{K}$. Notons $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ses racines distinctes ou non. On a alors :

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \frac{-a_{n-1}}{a_n} \quad \text{et} \quad \prod_{i=1}^{n} \alpha_i = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}.$$

4 L'ensemble $\mathbb{K}(X)$ des fractions rationnelles

4.1 Généralités

Définition 23.

On appelle fraction rationnelle (ou fonction rationnelle) à coefficients dans $\mathbb{K}$ toute fonction F de la forme $F : x \mapsto \frac{A(x)}{B(x)}$ définie sur $\mathbb{K} \setminus \{x \in \mathbb{K} \mid B(x) = 0\}$, où A et B sont deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$, B n'étant pas le polynôme nul. Pour une telle fraction rationnelle, on écrira plus simplement $F = \frac{A}{B}$ ou encore $F(X) = \frac{A(X)}{B(X)}$. L'ensemble des fractions rationnelles à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathbb{K}(X)$.

Exemple. $F(X) = \dfrac{X^2+3X+1}{2X-6}$ est une fraction rationnelle, c'est un élément de $\mathbb{R}(X)$.

Définition 24.
Soit $F = \frac{A}{B}$ une fraction rationnelle. On dit que F est irréductible si A et B n'ont pas d'autres diviseurs communs que les polynômes constants non nuls.

Exemple. La fraction $F(X) = \dfrac{X^2+X}{X^2}$ n'est pas irréductible. Par contre, la fraction $G(X) = \dfrac{X+1}{X}$ est irréductible.

Désormais, on ne considère plus que des fractions rationnelles irréductibles.

Définition 25.
Soit $F = \frac{A}{B}$ une fraction rationnelle irréductible.

— Les racines du polynôme A sont appelées les racines ou les zéros de F.

— Les racines du polynôme B sont appelées les pôles de la fraction rationnelle F. Si a est un pôle de F, on appelle ordre de multiplicité de a en tant que pôle de F l'ordre de multiplicité de a en tant que racine de B.

— Si F n'est pas nulle, on appelle degré de F et on note $\deg(F)$ le nombre entier relatif $\deg(A) - \deg(B)$.

Exemple. On considère la fraction rationnelle $F(X) = \dfrac{X^2+X-2}{(X+1)^2(X-3)}$ de $\mathbb{R}(X)$.

4.2 Décomposition d'une fraction rationnelle en éléments simples (La théorie)

4.2.1 Etape 1 : Partie entière et partie polaire/fractionnaire

Technique. Soit $F = \dfrac{A}{B}$ une fraction rationnelle. On fait la division euclidienne de A par B : il existe deux polynômes Q et R tels que

$$A(X) = Q(X)B(X) + R(X), \qquad \deg(R) < \deg(B)$$

On divise de chaque coté de l'égalité par B et on a :

$$F(X) = \frac{A(X)}{B(X)} = \frac{B(X)Q(X)+R(X)}{B(X)} = Q(X) + \frac{R(X)}{B(X)}$$

Le polynôme Q est appelé la **partie entière** de F et $\dfrac{R}{B}$ sa **partie polaire ou fractionnaire**.

Exemple. Déterminer les parties entières et polaires de

$$F(X) = \frac{4X^4-3X^2+2X-1}{X^2-1}$$

4.2.2 Etape 2 : Décomposition du dénominateur en facteurs irréductibles

Soit $F(X) = Q(X) + \dfrac{R(X)}{B(X)}$ (après division euclidienne).

— Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on sait que B est scindé sur $\mathbb{C}$ et qu'il s'écrit $B(X) = C(X-a)^m(X-b)^n\dots$ où $a, b, \dots$ sont les racines de B de multiplicités respectives $m, n\dots$, et C est le coefficient dominant de B . On a ainsi

$$F(X) = Q(X) + \frac{R(X)}{C(X-a)^m(X-b)^n\dots}.$$

— Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on sait que B se décompose sur $\mathbb{R}$ sous la forme

$$B(X) = C(X-a)^m\dots(X-b)^n\dots(X^2+b_1X+c_1)^p(X^2+b_pX+c_p)^q\dots$$

où $a, b, \dots$ sont les racines réelles de B de multiplicités respectives $m, n\dots,$, C est le coefficient dominant de B et où le discriminant des trinômes $(X^2+b_iX+c_i)$ est strictement négatif, $p, q, \dots$ étant des entiers strictement positifs. On a ainsi

$$F(X) = Q(X) + \frac{R(X)}{C(X-a)^m\dots(X-b)^n\dots(X^2+b_1X+c_1)^p(X^2+b_pX+c_p)^q\dots}.$$

Exemple. On avait décomposé $F(X) = \dfrac{4X^4-3X^2+2X-1}{X^2-1}$ sous la forme $F(X) = (4X^2+1) + \dfrac{2X}{X^2-1}$. En factorisant le dénominateur, on a

$$F(X) = (4X^2+1) + \frac{2X}{(X-1)(X+1)}$$

4.2.3 Etape 3 : Décomposition de la partie fractionnaire en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$

Définition.
On appelle élément simple de $\mathbb{C}(X)$ toute fraction rationnelle de la forme $\dfrac{\lambda}{(aX+b)^\alpha}$ où $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $\alpha \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{C}^\star, b \in \mathbb{C}$.

Exemples.

Théorème 27.

Soit $F = \frac{A}{B}$ une fraction rationnelle irréductible de $\mathbb{C}(X)$. On note $a, b, \ldots$ les pôles de F de multiplicités respectives $m, n, \ldots$. On note $Q(X)$ la partie entière de $F(X)$. La fraction rationnelle F s'écrit de manière unique sous la forme

$$F(X) = Q(X) + \frac{\alpha_1}{X-a} + \frac{\alpha_2}{(X-a)^2} + \cdots + \frac{\alpha_m}{(X-a)^m}$$

$$+\frac{\beta_1}{X-b} + \frac{\beta_2}{(X-b)^2} + \cdots + \frac{\beta_p}{(X-b)^n} + \ldots$$

où $\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \ldots, \beta_p$ sont des complexes, les nombres α_m et β_p étant non nuls.

Cette écriture s'appelle la décomposition en éléments simples de F dans $\mathbb{C}(X)$. La partie $\frac{\alpha_1}{X-a} + \frac{\alpha_2}{(X-a)^2} + \cdots + \frac{\alpha_m}{(X-a)^m}$ s'appelle la partie polaire de F relative au pôle a.

Remarque : Les techniques pour trouver les coefficients à mettre sur les éléments simples seront vues à la fin de cette section.

Exemples.

1. On a $F(X) = (4X^2+1) + \dfrac{2X}{(X-1)(X+1)}$. La décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}(X)$ est

$$F(X) = (4X^2+1) + \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X+1}, \qquad a, b \in \mathbb{C}$$

2. Ecrire la forme de la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}(X)$ de $F(X) = 1 + \frac{X^3+X-1}{(X-1)(X^3-1)}$.

4.2.4 Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$

Définition 28.

On appelle élément simple de $\mathbb{R}(X)$ toute fraction rationnelle de l'une des formes suivantes :

— $\dfrac{\alpha}{(aX+b)^m}$ où $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $m \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}^\star, b \in \mathbb{R}$

— $\dfrac{\lambda X + \mu}{(aX^2+bX+c)^p}$ où le discriminant du dénominateur $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, et $(\lambda, \mu, c, d) \in \mathbb{R}^4, a \in \mathbb{R}^\star$, $p \in \mathbb{N}^*$, $(\lambda, \mu) \neq (0,0)$.

Exemples.

Soit $F(X) = \frac{A(X)}{B(X)} = Q(X) + \frac{R(X)}{B(X)}$ une fraction rationnelle irréductible de $\mathbb{R}(X)$, avec Q la partie entière de F. On note $a, b, \ldots$ les pôles de F de multiplicités respectives $m, n, \ldots$. On suppose que le dénominateur B se décompose sous la forme

$$B(X) = C(X-a)^m(X-b)^n \ldots (X^2+cX+d)^p(X^2+eX+f)^q \ldots$$

où C est le coefficient dominant de Q, où $a, b, \ldots$ sont les racines réelles de Q, où les réels $c, d, e, f, \ldots$ sont tels $c^2 - 4d < 0$, $e^2 - 4f < 0$, ... et où $p, q, \ldots$ sont des entiers strictement positifs.

Théorème 29.

La fraction rationnelle F s'écrit de manière unique sous la forme

$$F(X) = Q(X) + \frac{\alpha_1}{X-a} + \cdots + \frac{\alpha_m}{(X-a)^m} + \frac{\beta_1}{X-b} + \cdots + \frac{\beta_n}{(X-b)^n} + \ldots$$
$$+ \frac{\lambda_1 X + \mu_1}{X^2+cX+d} + \cdots + \frac{\lambda_p X + \mu_p}{(X^2+cX+d)^p}$$
$$+ \frac{\gamma_1 X + \delta_1}{X^2+eX+f} + \cdots + \frac{\gamma_q X + \delta_q}{(X^2+eX+f)^q} + \ldots$$

où $\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \ldots, \beta_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_p, \mu_1, \ldots, \mu_p, \gamma_1, \ldots, \gamma_q, \delta_1, \ldots, \delta_q$ sont des complexes tels que $\alpha_m \neq 0$, $\beta_n \neq 0$, $(\lambda_p, \mu_p) \neq (0,0)$ et $(\gamma_q, \delta_q) \neq (0,0)$.

Cette écriture s'appelle la décomposition en éléments simples de F dans $\mathbb{R}(X)$.

La partie $\dfrac{\alpha_1}{X-a} + \cdots + \dfrac{\alpha_m}{(X-a)^m}$ s'appelle la partie polaire de F relative au pôle a.

Pour chaque facteur de la décomposition de B, on ajoute un terme à la décomposition de $\frac{R}{B}$, selon la règle présentée dans le tableau ci-dessous. On a alors $\frac{R}{B}$ sous la forme d'une **SOMME** d'éléments simples, chaque élément simple contenant des coefficients inconnus.

facteur de B	Elements simples
$(aX+b)$	$\dfrac{\lambda}{aX+b}$
$(aX+b)^2$	$\dfrac{\lambda_1}{aX+b} + \dfrac{\lambda_2}{(aX+b)^2}$
$(aX+b)^3$	$\dfrac{\lambda_1}{aX+b} + \dfrac{\lambda_2}{(aX+b)^2} + \dfrac{\lambda_3}{(aX+b)^3}$
$\ldots$	$\ldots$

Pour les décomposition dans $\mathbb{R}(X)$, on a en plus (avec $\underline{\Delta = b^2 - 4ac < 0}$) :

facteur de B	Elements simples
$\left(aX^2 + bX + c\right)$	$\dfrac{\lambda X + \mu}{aX^2 + bX + c}$
$\left(aX^2 + bX + c\right)^2$	$\dfrac{\lambda_1 X + \mu_1}{aX^2 + bX + c} + \dfrac{\lambda_2 X + \mu_2}{\left(aX^2 + bX + c\right)^2}$
$\left(aX^2 + bX + c\right)^3$	$\dfrac{\lambda_1 X + \mu_1}{aX^2 + bX + c} + \dfrac{\lambda_2 X + \mu_2}{\left(aX^2 + bX + c\right)^2} + \dfrac{\lambda_3 X + \mu_3}{\left(aX^2 + bX + c\right)^3}$
$\dots$	$\dots$

Exemple. Donner la forme de la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}(X)$ de $F(X) = \dfrac{2X}{(X-1)^2(X-2)(X^2+1)}$.

4.3 Exemple de décomposition fraction rationnelle sur $\mathbb{R}(X)$ et Etape 4

Voici la méthode pour décomposer n'importe quelle fraction rationnelle $F = \dfrac{A}{B}$ en éléments simples sur $\mathbb{R}(X)$, appliquée sur l'exemple

$$F(X) = \frac{X^4 + 3X^3 + 4X^2 + X}{(X^2 + X + 1)(X^2 + 2X + 1)}$$

Etape 4 : Recherche des coefficients inconnus de la décomposition
On a obtenu la forme générale de la décomposition, il ne reste plus qu'à trouver la valeur des constantes intervenant dans celle-ci. Il existe pour cela plusieurs techniques :

Méthode prioritaire : Les termes de plus haut degré. Pour un pôle α (racine du dénominateur), on repère la fraction $\dfrac{\lambda}{(X-\alpha)^{n_i}}$ qui est de plus haut degré n. On multiplie de chaque coté de l'égalité par $(X-\alpha)^n$. Puis on pose $x = \alpha$, et on obtient alors la constante du terme de plus haut degré.
Et on recommence pour tous les pôles.
Méthode de secours. Quand on a fait tous les termes faciles, on cherche à établir autant d'équations que de coefficients restant à déterminer en prenant des valeurs de x qu'on n'a pas encore déterminé (et de préférences simples).

Exercice 4

On a $F(X) = \dfrac{2X+1}{(X-1)^2}$ et on sait que sa décomposition en élément simple est de la forme

$$F(X) = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{(X-1)^2}$$

Déterminer a et b.

Fiche d'exercices XII : polynômes et fractions rationnelles

Exercice 1

($\star$) Effectuer la division euclidienne de $A = X^5 - X^4 + X^2 - 4X + 2$ par $B = X^2 - 2$. Le polynôme B divise-t-il le polynôme A ?

Exercice 2

($\star\star$) Effectuer la division euclidienne de $X^3 + 7X^2 - 2$ par $X^2 + X + 1$. En déduire les éventuelles asymptotes au graphe de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^3 + 7x^2 - 2}{x^2 + x + 1}$.

Exercice 3

($\star\star$) Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. À quelle(s) condition(s) le polynôme $X^4 + aX^2 + bX + c$ est-il divisible par $X^2 + X + 1$?

Exercice 4

($\star\star$) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Trouver le reste de la division euclidienne de

1. X^n par $(X - 1)$ puis par $(X - 1)(X - 2)$.
2. $X^{2n} + X^2 - 1$ par $X^2 - 1$.
3. $X^n + nX^{n-1} + X^2 + 1$ par $(X - 1)^2$.

Exercice 5

($\star\star\star$) Soit P un polynôme à coefficients réels dont les restes dans la division euclidienne par $(X - 1)$, par $(X - 2)$ et par $(X - 3)$ sont respectivement 3, 7 et 13. Soit R le reste de la division euclidienne de P par $(X - 1)(X - 2)(X - 3)$.

1. Déterminer les valeurs de R en 1, 2 et 3.
2. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et $Q = a(X - 1)(X - 2) + b(X - 1)(X - 3) + c(X - 2)(X - 3)$. Que valent $Q(1)$, $Q(2)$ et $Q(3)$? Déterminer a, b et c tels que $Q(1) = R(1)$, $Q(2) = R(2)$ et $Q(3) = R(3)$. En déduire le polynôme R.

Exercice 6

($\star$) Soit $P = X^3 - 3X + 2$.

— Calculer $P(1)$, $P'(1)$ et $P"(1)$. Que peut-on en déduire sur le nombre 1 ? Et sur un polynôme diviseur de P ?

— Calculer $P(-2)$. Que peut-on en déduire sur la factorisation de P ?

Exercice 7

($\star\star$) Soit P un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ et a un nombre complexe. Donner une condition nécessaire et suffisante sur P et a pour que a soit une racine triple du polynôme :

$$Q(X) = (X - a)(P'(X) + P'(a)) - 2(P(X) - P(a)).$$

Exercice 8

($\star\star$) Soit P un polynôme de $\mathbb{R}_3[X]$ tel que $P(0)^2 + P(1)^2 + P(4)^2 + P(7)^2 = 0$. Montrer que P est le polynôme nul.

Exercice 9

($\star\star$) On considère le polynôme $D = X^5 - 7X^4 + 19X^3 - 25X^2 + 16X - 4$. Chercher les racines entières de D et déterminer leurs multiplicités puis factoriser D en un produit de facteurs irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 10

($\star\star$) Vérifier que $1 + i$ est une racine de $P(X) = X^3 - (4 + i)X^2 + (6 + 2i)X - (4 + 2i)$ et en déduire la factorisation de P dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 11

($\star\star$) Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$ les polynômes :

$$P_1(X) = 2X^4 - 4X^3 + 2X^2 - 8X + 8, \qquad P_2(X) = -3X^4 + 3,$$
$$P_3(X) = X^5 + 1, \qquad P_4(X) = X^4 + X^2 + 1.$$

Exercice 12

($\star$) Parmi les fractions rationnelles suivantes :

$$\frac{2X - 2}{X - 1}, \quad \frac{2X - 1}{(X - 1)^3}, \quad \frac{2}{(X^2 + 1)^2}, \quad \frac{2X + 1}{X^2 - 4X + 3},$$

quelles sont celles qui sont des éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$?

Exercice 13

($\star\star$) Déterminer la partie entière et la partie fractionnaire des fractions rationnelles suivantes dans $\mathbb{R}(X)$:

$$\frac{X^2 - 3X + 1}{(X - 1)(2X + 1)(3X - 5)}, \quad \frac{3X^2 + 2X + 2}{X^2 - 1}, \quad \frac{X^3 + 1}{X(X + 1)}.$$

Exercice 14

($\star$) Décomposer formellement (i.e. sans calculer les coefficients) en éléments simples les fractions rationnelles suivantes dans $\mathbb{R}(X)$:

$$\frac{2X - 1}{(X - 1)(2X + 1)}, \quad \frac{3}{(X + 1)^2 (X - 2)}, \quad \frac{8}{(3X - 4)^3}, \quad \frac{X - 1}{X^2 + 2X + 1},$$

$$\frac{2X + 8}{2X^2 + 1}, \quad \frac{2}{(X + 6)(X^2 - 4X + 17)}, \quad \frac{6X^2 + 1}{(2X - 7)^2 (X^2 - 1)(X^2 + X + 7)^2}.$$

Exercice 15

($\star\star$) Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ les fractions rationnelles :

$$f_1(X) = \frac{2X^2 - 15X + 33}{X^2 - 4X - 5} \qquad f_2(X) = \frac{37 - 11X}{(X+1)(X-2)(X-3)}$$
$$f_3(X) = \frac{-19X^2 + 50X - 25}{3X^3 - 5X^2} \qquad f_4(X) = \frac{18X^3 + 12X^2 + 35X + 5}{9X^2 + 6X + 17}$$
$$f_5(X) = \frac{X^3 - 4X^2 + 11X - 13}{X^2 - 2X + 1} \qquad f_6(X) = \frac{1}{(X^2+1)^3}$$
$$f_7(X) = \frac{1}{(X^2-1)^2} \qquad f_8(X) = \frac{X^4 + X^3 + 3X^2 + 1}{(X^2+1)^2 X}$$

Exercice 16

Devoir maison ($\star\star$)

1. Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $Q = X^3 + 4X^2 + 4X + 3$.
2. Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ la fraction rationnelle suivante :

$$F(X) = \frac{3X^4 + 13X^3 + 16X^2 + 13X - 4}{X^3 + 4X^2 + 4X + 3}$$

Fiche de révision XII : Polynôme

C'est quoi un polynôme ?	C'est une fonction qui s'écrit sous la forme $$aX^n + bX^{n-1} + \cdots + hX + g$$ avec $a, b, ...h, g$ des constantes et X^k une notation pour la fonction $x \to x^k$.
Quel est le degré d'un polynôme et son terme dominant ?	Le degré est la plus grande puissance de X et le coefficient dominant est le coefficient de cette puissance de X.
C'est quoi $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{R}_n[X]$?	$\mathbb{R}[X]$ est l'ensemble des polynômes. $\mathbb{R}_n[X]$ est l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égale à n.
Si P un polynome vérifie $P = 0$ (polynôme nul), que peut-on dire sur P ?	Tous les coefficients de P sont nuls.
Au fait, c'est quoi le polynôme nul et son degré ?	C'est la fonction constante égale à 0, il est de degré $-\infty$.
Si P et Q sont des polynômes, que vaut $deg(PQ)$?	$deg(P) + deg(Q)$.
On fait la division euclidienne de A par B, on obtient comme quotient Q et comme reste R. Quelle est la relation qui lie ces polynômes et quelle propriété a R ?	$A = BQ + R$ et $deg(R) < deg(B)$.
Qu'est-ce que ça veut dire que A divise B ?	$B = AQ$ avec Q un polynôme.
Dire que α est une racine de P signifie quoi et quelle propriété peut-on en déduire ?	$P(\alpha) = 0$ et $(X - \alpha)$ divise P.
C'est quoi l'ordre de multiplicité d'une racine α de P ? Quel lien avec les dérivées de P ?	C'est la puissance k maximale telle que $(X-\alpha)^k$ divise P. α est une racine de P, P', P"... jusqu'à la dérivée $k-1$-ième, et $P^{(k)}$ d'admet pas α comme racine.
Un polynôme de degré n a combien de racines ?	n en comptant avec les ordres de multiplicité
Si un polynôme de degré inférieur ou égal à n a $n+1$ racines (ou plus), que peut-on dire ?	c'est le polynôme nul.

Si deux polynôme de degré inférieur ou égal à n coïncident sur $n+1$ valeurs (ou plus), que peut-on dire ?	Ils sont égaux.
Dans $\mathbb{C}[X]$, un polynôme de degré n a combien de racines ? Peut-on le factoriser ?	Exactement n racines en comptant avec les ordres de multiplicité. On peut toujours le factoriser entièrement.
Sur $\mathbb{C}[X]$, à quoi peut ressembler une factorisation d'un polynôme P ?	$P = a(X-\alpha)^n(X-\beta)^m \cdots (X-\gamma)^p$
Sur $\mathbb{R}[X]$, à quoi peut ressembler une factorisation d'un polynôme P	$P = a(X-\alpha)^n(X-\beta)^m \cdots (X-\gamma)^p(X^2+cX+d)^q \cdots (X^2+eX+f)^r$ avec des discriminants négatifs pour les trinômes du second degré.
Si P est un polynôme à coefficients entiers, quelles racines entières peut-on tester ?	Les diviseurs du coefficient constant de P.
C'est quoi, $\mathbb{R}(X)$?	C'est l'ensemble des fractions rationnelles $\frac{A}{B}$ avec A et B des polynômes.
Une fraction rationnelle $\frac{A}{B}$ est irréductible si	A et B n'ont pas de diviseurs communs (sauf les polynômes constants non nuls)
C'est quoi les racines et les pôles d'une fraction rationnelle $\frac{A}{B}$?	Les racines sont les racines de A, et les pôles les racines de B.
Quel est le degré d'une fraction rationnelle $\frac{A}{B}$?	$deg(A) - deg(B)$
Donner en bref les étapes de la décomposition en élément simples de la fraction rationnelle $\frac{A}{B}$.	1. On fait la division de A par B : $A = BQ + R$ ce qui permet d'écrire $\frac{A}{B} = Q + \frac{R}{B}$. 2. on cherche les pôles (les racines de B) et sa factorisation. 3. on écrit $\frac{R}{B}$ comme la somme d'éléments simples du types $\frac{a}{(X-\alpha)^k}$ et $\frac{cX+d}{(X^2+\beta X+\gamma)^m}$ avec α les racines de B et $(X^2+\beta X+\gamma)$ les trinômes à discriminant négatif de la factorisation de B. 4. En prenant des valeurs pour X, on calcule les coefficients des numérateurs d'éléménts simples.
Si le dénominateur d'une fraction rationnelle contient $(X-\alpha)$ dans sa factorisation, quels éléments simples apparaissent ? Et si c'est $(X-\alpha)^3$?	$\frac{a}{(X-\alpha)}$ $\frac{a}{(X-\alpha)} + \frac{b}{(X-\alpha)^2} + \frac{c}{(X-\alpha)^3}$
Si une fraction rationnelle a $\frac{a}{(X-\alpha)} + \frac{b}{(X-\alpha)^2} + \frac{c}{(X-\alpha)^3}$ comme partie polaire relatif au pôle α, quel est le coefficient le plus simple à calculer et comment ?	C'est le terme de plus haut degré, le coefficient c. On multiplie l'expression par $(X-\alpha)^3$ et on prend $X = \alpha$.
Si le dénominateur d'une fraction rationnelle contient $(aX^2+bX+b)^2$ avec discriminant négatif dans sa factorisation, quels éléments simples apparaissent ?	$\frac{cX+d}{(aX^2+bX+b)} + \frac{eX+f}{(aX^2+bX+b)^2}$