11. Les nombres complexes

1 Définitions algébrique et géométrique de $\mathbb{C}$

1.1 Définition de $\mathbb{C}$

Définition 1.

L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes est l'ensemble des nombres qui s'écrivent de manière unique sous la forme $z = a + ib$, où a et b sont des nombres réels et i un nombre tel que $i^2 = -1$.

L'écriture $z = a + ib$ d'un nombre complexe avec a et b réels est appelée la forme algébrique de z. Le réel a est la partie réelle de z et on note $a = \Re e(z)$. Le réel b est la partie imaginaire de z et on note $b = \mathrm{Im}(z)$.

Remarque : La partie imaginaire d'un nombre complexe est un nombre réel. Par exemple $\mathrm{Im}(3 + 5i) = 5$.
L'ensemble des nombres complexes de la forme $a + 0i$ est naturellement identifié à $\mathbb{R}$. Un nombre réel est donc aussi un nombre complexe. Les nombres complexes de la forme ib sont appelés imaginaires purs.

L'ensemble $(\mathbb{C}, +, \times)$ est un corps commutatif. C'est à dire que les calculs $(+, -, \times, \div)$ dans $\mathbb{C}$ s'effectuent exactement comme dans $\mathbb{R}$, en remplaçant chaque apparition de i^2 par -1, puis en organisant les termes réels et les termes contenant i.

Exercice 1

Calculer $(1 + i)^3$ et l'exprimer sous forme algébrique.

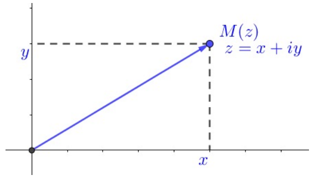
Mais attention, il est impossible d'établir un ordre sur $\mathbb{C}$ qui prolonge l'ordre sur $\mathbb{R}$ et qui obéisse aux mêmes règles. Il ne faut donc JAMAIS écrire une inégalité entre nombres complexes (sauf si ce sont des nombres réels).

Propriété 2.

Deux nombres complexes sont égaux si et seulement s'ils ont même partie réelle et même partie imaginaire.

1.2 Le plan complexe

On considère le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.



Définition 3.

On associe au nombre $z = x + iy$ le point M de coordonnées (x, y). On dit que :

- z est l'affixe du point M, M est l'image de z et l'on note $M(z)$.
- L'axe (Ox) est l'axe des réels, l'axe (Oy) est l'axe des imaginaires purs.
- Le nombre z est également l'affixe du vecteur $\overrightarrow{OM}$, et l'on note $\overrightarrow{OM}(z)$, le vecteur $\overrightarrow{OM}$ est **un vecteur image** de z.

On appelle plan complexe cette représentation du plan euclidien par les nombres complexes.

Exercice 2

Placer les nombres 1, i, -1, $-i$, $2 + 3i$, $1 - i$ et $-1 - 2i$ sur le plan complexe.

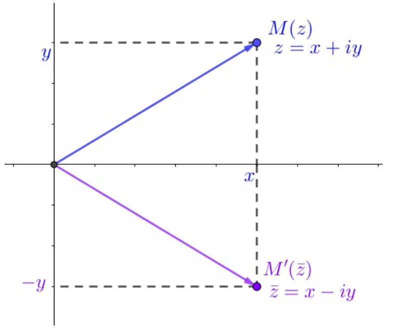
1.3 Conjugué d'un nombre complexe

Définition 4.

Le conjugué d'un nombre complexe $z = a + ib$ est le nombre complexe $\overline{z} = a - ib$.

Exemple. Le conjugué de 5 est $\overline{5} = 5$, le conjugué de $-3 + 9i$ est $\overline{-3 + 9i} = -3 - 9i$, le conjugué de $4i$ est $\overline{4i} = -4i$ et le conjugué de $7 - 8i$ est $\overline{7 - 8i} = 7 + 8i$.

Interprétation géométrique :
Dans le plan, l'image M' de $\overline{z}$ est le symétrique par rapport à l'axe réel de l'image M de z.



Propriété 5.

Pour tous nombres complexes z et z', on a :

1. $\overline{\overline{z}} = z$
2. Le conjugué est compatible avec les opérations de base : $\overline{-z} = -\overline{z}$, $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$, $\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$, $\overline{\frac{1}{z}} = \frac{1}{\overline{z}}$ et $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$
3. Le conjugué est compatible avec la puissance : pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\overline{z^n} = \overline{z}^n$

Propriété.

Pour tout nombre complexe z, on a : $\Re e(z) = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$ et $\mathrm{Im}(z) = \dfrac{z-\overline{z}}{2i}$.
z est un nombre réel si et seulement si $z = \overline{z}$.
z est un nombre imaginaire pur si et seulement si $z = -\overline{z}$.

Propriété 7.

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On a $z\overline{z} = a^2 + b^2$.

Technique. Le conjugué permet de mettre un nombre complexe avec du i au dénominateur sous forme algébrique. On multiplie en haut et en bas par le conjugué du dénominateur :

$$\frac{Z}{a+ib} = \frac{Z(a-ib)}{(a+ib)(a-ib)} = ... \text{ et on développe.}$$

Exercice 3

écrire le nombre complexe $z = \dfrac{1-i}{2+3i}$ sous forme algébrique.

2 Forme exponentielle et trigonométrique des nombres complexes

2.1 Module et argument d'un nombre complexe

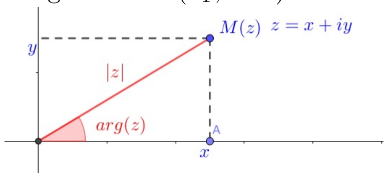
Définition 8.

Soit $z = a + ib$ (avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$) un complexe et M le point d'affixe z dans le plan.
Le module de z est

$$|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{a^2+b^2}.$$

Le module $|z|$ est la distance entre l'origine O et le point $M(z)$; c'est aussi la norme du vecteur $\overrightarrow{OM}$.

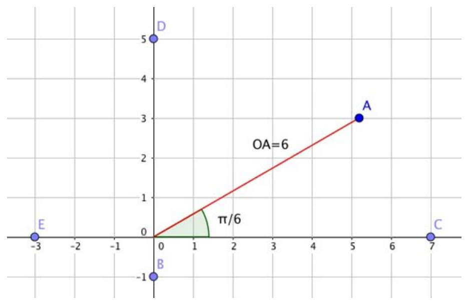
Si z est **non nul**, un **argument** de z est une mesure θ en radians de l'angle orienté $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{OM})$.



Remarque :

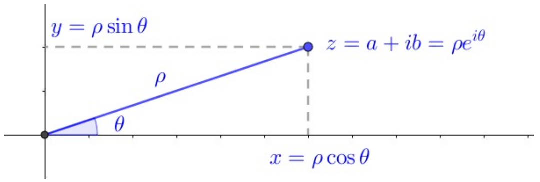
1. On note souvent le module ρ et l'argument θ, mais ce n'est pas une convention.
2. Si $z = a$ est un nombre réel, le module $|z|$ est la valeur absolue du nombre réel a.
3. On ne peut pas attribuer un argument au nombre 0 car il est impossible de définir l'angle $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{0})$.
4. L'argument d'un nombre complexe est défini à 2π près.

Exemple. Sans calcul, donner le module et l'argument des nombres complexes $a = 3\sqrt{3} + 3i$, $b = -i$, $c = 7$, $d = 5i$, $e = -3$ représentés graphiquement ci-dessous.



Calculer module et argument Soit $z = a + ib$ un nombre complexe non nul. On veut trouver son module ρ et son argument θ. On utilise les mêmes formules que pour les coordonnées polaires :

$$\begin{cases} \rho &= \sqrt{a^2+b^2} \\ \cos\theta &= \dfrac{a}{\rho} \\ \sin\theta &= \dfrac{b}{\rho} \end{cases}$$



2.2 Propriétés du module et de l'argument

Propriété 9.
Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$.

1. $|z| = 0$ si et seulement si $z = 0$
2. Le module est compatible avec les multiplications, divisions et puissances :

$$|zz'| = |z||z'|, \quad \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}, \quad \left|\frac{z'}{z}\right| = \frac{|z'|}{|z|}, \quad \forall n \geqslant 0, |z^n| = |z|^n$$

3. $|\overline{z}| = |z|$
4.

$$\arg(zz') = \theta + \theta' \ [2\pi], \quad \arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\theta \ [2\pi], \quad \arg(\overline{z}) = -\theta \ [2\pi],$$

$$\arg(-z) = \theta + \pi \ [2\pi], \quad \forall n \in \mathbb{N}, \arg(z^n) = n\theta \ [2\pi].$$

On a $\theta = \theta' \ [2\pi]$ si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}^+$ tel que $z' = \lambda z$.

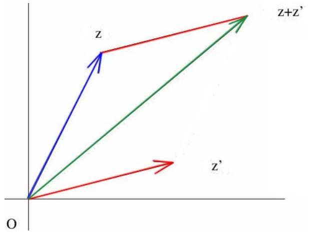
Attention : le module ne « conserve » pas les sommes !!!

Propriété.
(Inégalité triangulaire) Pour tous nombres complexes z et z', on a

$$|z + z'| \leqslant |z| + |z'|$$

avec égalité si et seulement si $z = 0$ ou si le quotient $\dfrac{z'}{z}$ est un nombre réel positif ou nul.

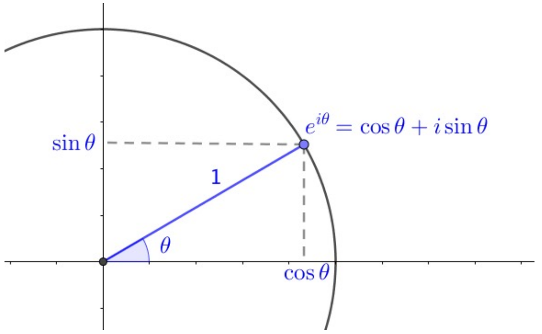
Géométriquement, cela signifie que la norme de la somme de deux vecteurs est inférieure à la somme des normes de ces deux vecteurs, avec égalité si et seulement si les vecteurs sont colinéaires et de même sens.



2.3 Formes exponentielle et trigonométrique

Nombres complexes de module 1 On considère le cercle unité (cercle de centre O et de rayon 1). Soit $M(z)$ sur ce cercle. Le module $|z| = 1$, les coordonnées de M sont $(\cos\theta, \sin\theta)$ avec θ un argument de z. On a donc

$$z = \cos\theta + i\sin\theta.$$



Définition 11.
Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on pose

$$\boxed{e^{i\theta}} = \cos\theta + i\sin\theta$$

Le nombre $e^{i\theta}$ est l'unique nombre complexe de module 1 et d'argument θ.

Exemples. $e^{i0} = \cos 0 + i\sin 0 = 1$ et $e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$.

Exercice 4

Donner la forme algébrique de $e^{i\pi}$ et $e^{i\frac{\pi}{4}}$.

On note $\mathbb{U}$ le cercle unité, c'est-à-dire l'ensemble des nombres complexes de module 1, qu'on peut paramétrer des façons suivantes :

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} = \mathbb{U} = \{e^{i\theta},\ \theta \in \mathbb{R}\} = \{e^{i\theta},\ \theta \in [0, 2\pi[\}.$$

Théorème 12.

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe non nul, de module ρ et d'argument θ. On peut alors écrire z sous deux autres formes :

$$z = \rho\,(\cos\theta + i\sin\theta)$$

C'est la forme trigonométrique du nombre complexe z.

$$z = \rho\, e^{i\theta}$$

C'est la forme exponentielle de z.

Remarque : Si on connait la forme exponentielle, on peut retrouver la forme algébrique :

$$z = \rho\, e^{i\theta} = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) = \underbrace{\rho\cos\theta}_{a} + i\underbrace{\rho\sin\theta}_{b}$$

Exercice 5

1. Déterminer le module et un argument du nombre complexe $z = 1 - i$, et écrire z sous forme exponentielle.
2. écrire z sous la forme algébrique sachant que $|z| = 2$ et $\arg(z) = \frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$.

2.4 Propriétés de $e^{i\theta}$

La notation $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ se comporte comme une exponentielle lors des calculs :

Propriété 13.

Pour tout $(\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{Z}$, on a

$$e^{i(\theta+\varphi)} = e^{i\theta} \times e^{i\varphi}, \quad \frac{e^{i\theta}}{e^{i\varphi}} = e^{i(\theta-\varphi)}, \quad e^{in\theta} = (e^{i\theta})^n, \quad \frac{1}{e^{i\theta}} = \overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$$

Exercice 6

Calculer $(1+i)^7$.

Mais il y a des propriétés spécifiques, liées au cercle unité :

Propriété 14.

- Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a $e^{i2k\pi} = 1$. Réciproquement, si $e^{i\theta} = 1$, alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta = 2k\pi$.
- Pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a $e^{i(\theta+2k\pi)} = e^{i\theta}$.
- Réciproquement, si $e^{i\theta} = e^{i\varphi}$, alors $\varphi = \theta + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

2.5 Formule l'Euler et linéarisation

Propriété 15.

(formules d'Euler) Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a

$$\boxed{\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}} \qquad \boxed{\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}}$$

Les formules d'Euler permettent de linéariser des polynômes trigonométriques.

Technique. Linéariser une expression trigonométrique, c'est transformer un produit de fonctions trigonométriques en une somme de fonctions trigonométriques. Pour cela, on effectue les étapes suivantes.

- On remplace chaque fonction sinus et cosinus par leur expression en nombres complexes à l'aide des formules d'Euler (ci-dessus).
- On développe tous les produits, en particulier à l'aide de la formule du binôme.
- On regroupe les termes par paires de la forme $e^{i\Theta} \pm e^{-i\Theta}$, $\Theta \in \mathbb{R}$.
- On réutilise les formules d'Euler pour revenir aux sinus et cosinus.

Exemple. Linéariser $\cos^3(x)$.
Application : La technique de linéarisation sert entre autre à calculer des primitives de fonctions trigonométriques.

Exemple. Trouver une primitive F de la fonction $f(x) = \cos^3(x)$.

Exercice 7

Linéariser $\sin^2 x$ et $\cos^4 x$.

Technique. De l'angle moitié Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.On considère $z = e^{i\alpha} + e^{i\beta}$. L'angle moitié entre α et β est $\frac{\alpha+\beta}{2}$. on factorise de force par $e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}$:

$$z = e^{i\frac{\alpha+\beta}{2} + i\frac{\alpha-\beta}{2}} + e^{i\frac{\alpha+\beta}{2} - i\frac{\alpha-\beta}{2}} = e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}\left(e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} + e^{-i\frac{\alpha-\beta}{2}}\right)$$

$$z = 2\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

Si le cosinus est positif, on a bien mis z sous forme exponentielle. Le module de z est $2\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$ et l'argument est $\frac{\alpha+\beta}{2}$. Si le cosinus est négatif, on fait rentrer le $-$ dans l'argument en rajoutant π à l'angle.

2.6 Formule de Moivre et application

Propriété.

(formule de De Moivre) Pour tout entier n et tout réel θ, on a

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$

C'est la traduction immédiate de la formule $(\mathrm{e}^{i\theta})^n = \mathrm{e}^{in\theta}$.
La formule de De Moivre permet de transformer des polynômes trigonométriques. Cette transformation permet de déterminer le sinus et le cosinus de certains angles.

Technique. A l'inverse de précédemment, nous voulons exprimer $\cos(nx)$ et $\sin(nx)$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$ pour tout entier n.

- On écrit la formule de Moivre $\cos(nx) + i\sin(nx) = (\cos x + i\sin x)^n$ et on développe le terme de droite par la formule du binôme.
- On identifie la partie réelle et la partie imaginaire du résultat, ce qui sera égal à $\cos(nx)$ et $\sin(nx)$ respectivement.
- On simplifie les résultats, en utilisant la relation $\cos^2 + \sin^2 = 1$.

Exemple. Exprimer $\cos(3x)$ et $\sin(3x)$ comme polynômes en $\cos x$ et $\sin x$.

2.7 L'exponentielle complexe

Pour x un réel, on connait e^x l'exponentielle réelle. Pour iy avec y un réel, on connait $e^{iy} = \cos y + i\sin y$, complexe sur le cercle unité. Et pour z complexe quelconque, peut-on faire e^z ?

Définition 17.

Soit $z = x+iy$ un nombre complexe écrit sous forme algébrique. On appelle exponentielle de z le nombre complexe

$$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x\,\mathrm{e}^{iy}$$

Exemple. On pose $z = 5 + i\frac{\pi}{4}$. Calculer e^z et l'exprimer sous forme algébrique.

Propriété 18.

Pour tous complexes z et z', on a

$$\mathrm{e}^z \neq 0, \quad \mathrm{e}^{z+z'} = \mathrm{e}^z\,\mathrm{e}^{z'}, \quad \mathrm{e}^{-z} = \frac{1}{e^z}$$

Si $z = x + iy$, alors $|\mathrm{e}^z| = e^x$, $\arg(\mathrm{e}^z) = y\ [2\pi]$, $\Re e(e^z) = e^x\cos y$ et $\mathrm{Im}(e^z) = e^x \sin y$

Tout nombre complexe non nul a est l'image par l'exponentielle complexe d'au moins un nombre complexe, c'est à dire que l'équation $e^z = a$ d'inconnue z a au moins une solution.

Démonstration. Forme exponentielle et algébrique de e^z Soit $z = x + iy$, alors $e^z = e^x e^{iy}$. Or e^x est un nombre réel strictement positif, et e^{iy} est bien sur le cercle unité. Donc cette écriture est la forme exponentielle du nombre e^z, avec e^x son module et y son argument.
On en déduit la forme algébrique $e^z = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y) = e^x\cos y + ie^x\sin y$.

Resolution d'équation Soit $a \in \mathbb{C}^*$. On veut résoudre $e^z = a$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$. On met a sous forme exponentielle $a = \heartsuit e^{i\spadesuit}$ (avec $\heartsuit$ le module et $\spadesuit$ l'argument de a) et on cherche $z = x + iy$ sous forme algébrique. On a donc

$$e^z = a \Leftrightarrow e^x e^{iy} = \heartsuit e^{i\spadesuit} \Leftrightarrow \begin{cases} e^x = \heartsuit & (\in \mathbb{R}^+) \\ y = \spadesuit + 2k\pi, & k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln(\heartsuit) \\ y = \spadesuit + 2k\pi, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Le solutions de l'équation $e^z = a$ sont donc $z = \ln(\heartsuit) + i(\spadesuit + 2k\pi)$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

3 équations du second degré à coefficients complexes

3.1 Racines carrées d'un nombre complexe

Définition 19.

Soit Δ un nombre complexe fixé. On appelle racine carrée de Δ tout nombre complexe δ tel que $\delta^2 = \Delta$.

Exemple.

Remarque : On ne peut pas noter $\sqrt{-1} = i$, la notation $\sqrt{\ }$ est strictement interdite dans $\mathbb{C}$. On est obligé de l'écrire en français : Une racine carré de -1 est i.

La racine carrée complexe est compatible avec la multiplication et la division : si a est une racine carrée de A et b une racine carrée de B, alors ab est une racine carrée de AB et $\frac{a}{b}$ est une racine carrée de $\frac{A}{B}$. Mais ça ne marche pas avec la soustraction ou l'addition !

Trouver les racines carrées d'un complexe Δ sous forme exponentielle On Δ met sous forme exponentielle $\Delta = \heartsuit e^{i\spadesuit}$ (avec $\heartsuit = |\Delta|$ le module, réel strictement positif, et $\spadesuit$ un argument de Δ). On cherche alors $\delta = \rho e^{i\theta}$ (avec ρ et θ inconnus) tel que $\delta^2 = \Delta$. On reporte les formes exponentielles dans l'équation et on obtient

$$(\rho e^{i\theta})^2 = \heartsuit e^{i\spadesuit} \Leftrightarrow \rho^2 e^{i2\theta} = \heartsuit e^{i\spadesuit}$$

On sépare module et argument :

$$\begin{cases} \rho^2 & = & \heartsuit \\ 2\theta & = & \spadesuit + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho & = & \sqrt{\heartsuit} \quad \text{car } \rho \text{ et } \heartsuit > 0 \\ \theta & = & \frac{\spadesuit}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

On prend $k = 0$ et on obtient $\delta_1 = \sqrt{\heartsuit} e^{i\frac{\spadesuit}{2}}$; puis $k = 1$ et on obtient $\delta_2 = \sqrt{\heartsuit} e^{i\left(\frac{\spadesuit}{2}+\pi\right)}$. Ce sont les deux racines carrées de Δ car les autres valeurs de $k \in \mathbb{Z}$ redonnent les mêmes solutions.

Exemple. On cherche les racines carrées de $3e^{i\frac{\pi}{5}}$. C'est à dire $\delta = \rho e^{i\theta}$ tel que $\delta^2 = 3e^{i\frac{\pi}{5}}$.

$$\rho^2 e^{i2\theta} = 3e^{i\frac{\pi}{5}} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho^2 & = & 3 \\ 2\theta & = & \frac{\pi}{5} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho & = & \sqrt{3} \\ \theta & = & \frac{\pi}{10} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Donc les racines carrées sont $\delta_1 = \sqrt{3} e^{i\frac{\pi}{10}}$ et $\delta_2 = \sqrt{3} e^{i\frac{11\pi}{10}}$.

Exercice 8

Mettre sous forme exponentielle $-18i$ puis calculer ses racines carrées complexes.

Propriété.

Tout nombre complexe non nul possède deux racines carrées distinctes dans $\mathbb{C}$ et ces deux racines carrées sont opposées l'une de l'autre. Graphiquement, les deux racines sont symétriques par rapport à l'origine.

Racines carrées d'un complexe sous forme algébrique Il n'est pas toujours possible de reconnaître un argument d'un nombre complexe, donc on peut pas faire la méthode exponentielle dans ce cas.
Soit Δ un nombre complexe non nul fixé sous forme algébrique : $\Delta = \clubsuit + i\spadesuit$. On cherche $\delta = a + ib$ un nombre complexe sous forme algébrique (a et b inconnus) tel que $\delta^2 = \Delta$. Cette équation implique la même équation avec les modules :

$$\delta^2 = \Delta \iff \begin{cases} \delta^2 = \Delta \\ |\delta|^2 = |\Delta| \end{cases}$$

On reporte les formes algébriques dans les deux équations et on calcule

$$\begin{cases} (a+ib)^2 = \clubsuit + i\spadesuit \\ \left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2 = |\clubsuit + i\spadesuit| \end{cases} \iff \begin{cases} a^2 - b^2 + 2ab\ i = \clubsuit + i\spadesuit \\ a^2 + b^2 = \sqrt{\clubsuit^2 + \spadesuit^2} = \heartsuit \end{cases}$$

Dans la première équation, on sépare la partie réelle et la partie imaginaire (sans le i !) :

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = \clubsuit & (1) \\ 2ab = \spadesuit & (2) \\ a^2 + b^2 = \heartsuit & (3) \end{cases}$$

On additionne les équations (1) et (3) et on peut obtenir a^2, donc on a deux valeurs opposées pour a. Pour chacune de ces valeurs, on détermine b avec l'équation (2). On trouve alors les deux racines carrées de Δ sous forme algébrique.

Exemple. Déterminer les racines carrées de $\Delta = -3 - 4i$.
On cherche $\delta = a + ib$ tel que $\delta^2 = -3 - 4i$ Or $|\delta|^2 = |-3-4i| = \sqrt{9+16} = 5$. Donc

$$\begin{cases} (a+ib)^2 = -3 - 4i \\ \left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2 = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} a^2 - b^2 + 2ab\ i = -3 - 4i \\ a^2 + b^2 = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} a^2 - b^2 = -3 \\ 2ab = -4 \\ a^2 + b^2 = 5 \end{cases}$$

On additionne la ligne 1 et la ligne 3 et on obtient $2a^2 = 2$ donc $a = 1$ ou $a = -1$. On reporte ces résultats dans la ligne 2 :
- Pour $a = 1$, on a $b = -2$ donc $\delta = 1 - 2i$.
- Pour $a = -1$, on a $b = 2$ donc $\delta = -1 + 2i$.

Exercice 9

Calculer sous forme algébrique les racines carrées de $-5 - 12i$.

3.2 Racines d'un trinôme du second degré

Théorème 21.

Considérons une équation du second degré $az^2 + bz + c = 0$ d'inconnue complexe z, les coefficients a, b, c étant des nombres complexes et a étant non nul. On note $\Delta = b^2 - 4ac\varnothing$ le discriminant de cette équation.
- Si Δ est nul, alors cette équation admet pour unique solution (dite solution double) $z_0 = \dfrac{-b}{2a}$.
- Si Δ n'est pas nul, cette équation admet exactement deux solutions, qui sont :

$$z_1 = \frac{-b+\delta}{2a} \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{-b-\delta}{2a},$$

où δ est une racine carrée de Δ.

Remarque : Si l'équation est à coefficient réel, avec un discriminant négatif, on obtiendra deux solutions complexes conjuguées.

4 Racines n-ièmes d'un nombre complexe

4.1 Racines n-ièmes de l'unité

Définition 22.

Soit n un entier strictement positif. Les racines n-ièmes de l'unité sont les solutions complexes de l'équation $z^n = 1$. L'ensemble de ces solutions est noté $\mathbb{U}_n$.

Technique. Le problème revient à chercher les nombres complexes $z = \rho\, \mathrm{e}^{i\theta}$ qui vérifient

$$(\rho\, \mathrm{e}^{i\theta})^n = 1, \Leftrightarrow \rho^n\, \mathrm{e}^{in\theta} = 1e^{i0}.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \rho^n = 1 \\ \exists k \in \mathbb{Z},\ n\theta = 2k\pi \end{array} \right. \qquad \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \rho = 1 \\ \exists k \in \mathbb{Z},\ \theta = \dfrac{2k\pi}{n}. \end{array} \right.$$

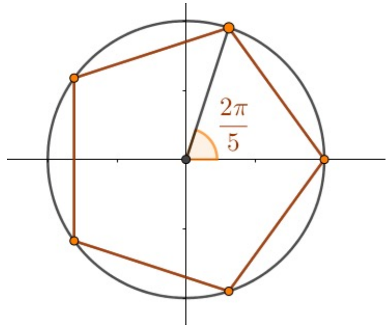
Les racines n-ièmes de l'unité sont donc les complexes $z = 1 \times e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

On choisit $k = 0$, $k = 1, \ldots, k = n-1$ et on obtient ainsi n valeurs différents (modulo 2π). En effet, à partir de $k = n$, on retrouve les solutions déjà déterminées. Les racines n-ièmes de l'unité sont donc

$$\omega_0 = 1, \qquad \omega_1 = \exp\frac{2i\pi}{n}, \ \ldots \qquad \omega_k = \exp\frac{2ik\pi}{n}, \ \ldots \qquad \omega_{n-1} = \exp\frac{2i(n-1)\pi}{n}.$$

Finalement, pour $n \geqslant 1$ un nombre entier. l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité est $\mathbb{U}_n = \{\mathrm{e}^{2ik\pi/n};\ k \in \mathbb{Z}\} = \{\mathrm{e}^{2ik\pi/n};\ 0 \leqslant k \leqslant n-1\}$. Il existe exactement n racines n-ièmes de l'unité distinctes.

Interprétation géométrique Les racines n-ièmes de l'unité sont de module 1. L'ensemble $\mathbb{U}_n$ est donc un sous-ensemble de $\mathbb{U}$ (le cercle unité). Les images des nombres complexes de l'ensemble $\mathbb{U}_n$ dessinent dans le plan complexe un polygone régulier à n côtés, inscrit dans le cercle unité et dont l'un des sommets est le point d'affixe 1.



Images des racines cinquièmes de l'unité.

Exercice 10

écrire les racines cubiques et quatrièmes de l'unité et les représenter dans le plan complexe.

4.2 Racines n-ièmes d'un nombre complexe quelconque

Définition 23.

Soit n un entier strictement positif et a un nombre complexe. Les racines n-ièmes de a sont les solutions complexes de l'équation $z^n = a$.

Technique. Si on sait mettre a sous forme exponentielle $a = \heartsuit e^{i\spadesuit}$, alors on cherche $z = \rho e^{i\theta}$ sous forme exponentielle aussi.

$$z^n = a \Leftrightarrow (\rho e^{i\theta})^n = \heartsuit e^{i\spadesuit} \Leftrightarrow \rho^n e^{in\theta} = \heartsuit e^{i\spadesuit} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} \rho^n & = & \heartsuit \quad (\text{ réels positifs}) \\ n\theta & = & \spadesuit + 2k\pi \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} \rho & = & \sqrt[n]{\heartsuit} \\ \theta & = & \dfrac{\spadesuit}{n} + \dfrac{2k\pi}{n} \end{array} \right. \Leftrightarrow z = \sqrt[n]{\heartsuit} e^{i\left(\frac{\spadesuit}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Les valeurs de $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ donnent alors les n racines n-ièmes de a.

Géométriquement Les images des racines n-ièmes d'un nombre complexe a dessinent dans le plan complexe un polygone régulier à n côtés, inscrit dans le cercle de centre O et de rayon $\sqrt[n]{\heartsuit}$ et dont l'un des sommets fait un angle $\frac{\spadesuit}{n}$ avec l'axe des abscisses.

Remarquons qu'on peut décomposer les racines n-ièmes de a :

$$z = \underbrace{\sqrt[n]{\heartsuit} e^{i\left(\frac{\spadesuit}{n}\right)}}_{\text{une racine particulière}} \times \underbrace{e^{i\frac{2k\pi}{n}}}_{\text{racines n-ième de l'unité}}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

On en déduit la méthode suivante, qui est utile si on ne peut pas mettre a explicitement sous forme exponentielle.

Technique. On cherche les racines n-ièmes de a, ce sont les solutions complexes de l'équation $z^n = a$

— On trouve une solution particulière de cette équation z_p (c'est à dire un nombre complexe z_p tel que $z_p^n = a$).

— On calcule les racines n-ièmes de l'unité : $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{n-1}$.

— Les racines n-ièmes de a sont alors $z_0 = z_p \times \omega_0$, $z_1 = z_p \times \omega_1, \ldots$ $z_{n-1} = z_p \times \omega_{n-1}$

Exemple. Déterminer les racines cubiques de $-(1+2i)^3$.

5 TD 11 complexe

Exercice 1

($\star$) écrire le nombre complexe $z = \dfrac{-2+6i}{-3-i}$ sous forme algébrique.

Exercice 2

($\star\star$) écrire sous forme algébrique les nombres complexes :

$$z_1 = (1+2i)(3-i),\ z_2 = \frac{2-i}{3i},\ z_3 = \frac{3-2i}{5-3i},\ z_4 = 4\,\mathrm{e}^{\frac{-2i\pi}{3}},\ z_5 = \frac{1-\mathrm{e}^{ix}}{1+\mathrm{e}^{ix}}\ (x \in]-\pi, \pi[).$$

Exercice 3

($\star\star$) Déterminer les nombres complexes z tels que $Z = \dfrac{2z-4}{z-i}$ soit réel.

Exercice 4

($\star$) Calculer le module des complexes suivants $z = 2+5i$, $z' = -1+3i$ et $z+z'$

Exercice 5

($\star\star$)

1. Donner la forme algébrique des complexes $z_1 = 3e^{-i\frac{\pi}{2}}$ et $z_2 = e^{i3\pi}$.
2. Donner la forme trigonométrique et la forme exponentielle des complexes $z_3 = \sqrt{3}+3i$ et $z_4 = (\sqrt{3}+3i)^5 e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

Exercice 6

($\star\star$)

1. Mettre sous forme exponentielle les nombres complexes :
$$z_1 = -17,\ z_2 = 1+i\sqrt{3},\ z_3 = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^2,\ z_4 = (\sqrt{3}+i)^{2008},\ \text{et}\ z_5 = (-1+i)^3\,\mathrm{e}^{\frac{3i\pi}{4}}.$$
2. Déterminer les nombres entiers $n \geqslant 0$ tels que $\omega_n = (\sqrt{3}+i)^n$ soit un nombre réel.

Exercice 7

($\star\star\star$) Calculer le module et l'argument de $z_1 = \dfrac{1+\cos\alpha+i\sin\alpha}{1-\cos\alpha-i\sin\alpha}$ pour $\alpha \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$ et $z_2 = \dfrac{\mathrm{e}^{i\alpha}+\mathrm{e}^{i\beta}}{1+\mathrm{e}^{i(\alpha+\beta)}}$ pour $\alpha+\beta \not\equiv \pi \pmod{2\pi}$.

Exercice 8

($\star\star$) Déterminer les nombres complexes z tels que

a) $z\big(2\overline{z}+1\big)=1$, b) $|z^2|=|z|$, c) $\dfrac{z+4i}{5z-3}\in\mathbb{R}$.

Exercice 9

($\star\star$) Soit z et z' deux nombres complexes distincts de module 1. Montrer que $Z=\dfrac{z^2-1}{z}$ est un imaginaire pur et $Z'=\dfrac{zz'-1}{z'-z}$ est un nombre réel.

Exercice 10

($\star\star$) Linéariser $\sin(x)\cos^3(x)$ et $\cos^2(x)\sin^2(x)$

Exercice 11

($\star$) Soit le complexe $z=-2+i\frac{7\pi}{3}$. Ecrire le complexe $z'=e^z$ sous forme exponentielle, trigonométrique et algébrique.

Exercice 12

($\star\star\star$)

1. Ecrire $\cos(5x)$ sous forme d'un polynôme en $\cos x$.
2. Montrer que $\cos(2\pi/5)$ est racine d'un polynôme de degré 5.
3. On veut résoudre l'équation $P(X)=0$. Grâce au changement de variable $X=\frac{1}{z+1}$, l'équation devient $z^5-10z^3+25z=0$. En factorisant cette expression, trouver les solutions z de cette équation, en déduire les valeurs possibles pour X. Déterminer la valeur de $\cos(2\pi/5)$.

Exercice 13

($\star\star$) Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $\mathrm{e}^z=1$,
b) $\mathrm{e}^z=-1$,
c) $\mathrm{e}^z=1-\sqrt{3}i$
d) $\mathrm{e}^z+\mathrm{e}^{-z}=2$,
e) $\mathrm{e}^z-2\,\mathrm{e}^{-z}+2=0$.

Exercice 14

($\star\star$)

1. Mettre sous forme exponentielle puis calculer les racines carrées de
$$1-i\ ,\ -\sqrt{3}+i\quad\text{et}\quad(1+i)^5.$$
2. Calculer sous forme algébrique les racines carrées de $3-4i$
3. Déterminer sous forme algébrique les racines quatrièmes de $-119+120i$. Indice : les racines carrées de $-5-12i$ sont $\delta=2-3i$ ou $\delta=-2+3i$.

Exercice 15

($\star\star$) Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $(1+i)z^2+iz+(1-i)=0$,
b) $(1+i)z^2+(1-i)z+2(1+i)=0$,
c) $z^2-(3-2i)z+(5-i)=0$,
d) $z^2-(5-14i)z-(24+10i)=0$,
e) $z^4+(5i-4)z^2-1-7i=0$,
f) $1+iz-z^2-iz^3=0$.

Exercice 16

($\star\star$) Résoudre dans $\mathbb{C}$: $\begin{cases} ab=-24-10i,\\ a+b=5-14i,\end{cases}$

Exercice 17

($\star$) Déterminer l'ensemble $\mathbb{U}_6$ des racines sixièmes de l'unité.

Exercice 18

($\star\star$) Déterminer les racines cubiques de $1+i$.

Exercice 19

($\star\star$) Résoudre sur $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $z^3+1=0$,
b) $z^4-i=0$,
c) $z^8+1=0$,
d) $z^3+(3-i)^3=0$,
e) $z^n=(z+1)^n$,
f) $\left(\dfrac{z+i}{z-i}\right)^3+\left(\dfrac{z+i}{z-i}\right)^2+\dfrac{z+i}{z-i}+1=0$,
g) $\left(\dfrac{1+iz}{1-iz}\right)^{2n}=1$.

Exercice 20

Devoir-maison Résoudre sur $\mathbb{C}$ l'équation suivante :

$$z^2+(-1-5i)z-8+4i=0$$