10. Nouvelles fonctions usuelles

1 Injections, surjections, bijections

1.1 Définitions générales

On pose une fonction :

$$f: \begin{array}{rcl} D & \to & F \\ x & \mapsto & f(x) = \cdots \end{array}$$

avec f le nom de la fonction, D son ensemble de départ, F son ensemble d'arrivée, x sa variable et $f(x)$ la formule de calcul. Remarquez que x n'est pas forcément un réel, ça peut aussi être un vecteur, un complexe... ou même une fonction ! De même, le résultat peut être de n'importe quel type d'objet mathématique selon la manière dont la fonction est définie.
Si on change l'ensemble de départ ou d'arrivée, ce n'est plus la même fonction exactement, donc il faut lui donner un autre nom. Dans ce cours, on notera $\widetilde{f}$ la fonction avec un ensemble d'arrivée ou de départ modifié. En pratique.... oubliez ce $\widetilde{\ }$ pour évitez les confusions.

On va voir en général ce que signifie les mots suivants : injection, surjection et bijection. Puis on appliquera au cas des fonctions réelles. On ré-utilisera des notions dans d'autres chapitres (C.f espaces vectoriels).

Définition 1.

On dit que f est une injection (ou que f est injective) si et seulement si, pour tout élément $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in D$ admet au plus une solution.

On dit que f est une surjection (ou que f est surjective) si et seulement si pour tout élément $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in D$ admet au moins une solution.

On dit que f est une bijection (ou que f est bijective) de D <u>sur F</u> si et seulement si pour tout élément $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in D$ admet exactement une solution.

f est bijective si et seulement si f est à la fois injective et surjective.

Propriété.

On appelle ensemble image de f le sous-ensemble de $\mathbb{R}$, noté $f(D)$, constitué des images par f de tous les éléments de D :

$$f(D) = \{f(x) \mid x \in D\} = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in D,\ f(x) = y\}.$$

---

f est une surjection si et seulement si $f(D) = F$.

Définition.

Soit f une bijection de D sur F. L'application définie sur F à valeurs dans D qui à tout élément y de F associe l'unique antécédent de y par f (le seul $x \in D$ tel que $f(x) = y$) est une bijection qu'on appelle la bijection réciproque de f, et que l'on note f^{-1}.

Autrement dit, pour tout $y \in F$, le réel $f^{-1}(y)$ est l'unique élément de D tel que

$$f\big(f^{-1}(y)\big) = y$$

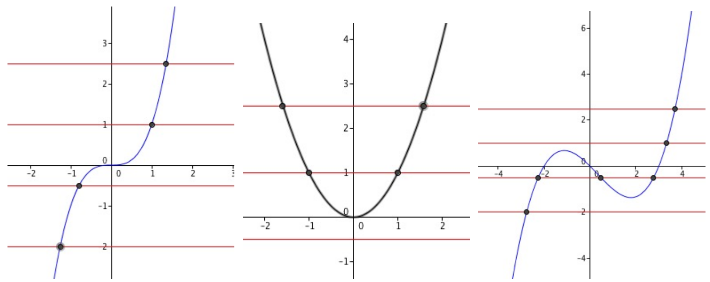
c'est-à-dire l'unique solution de l'équation $f(x) = y$.

1.2 Le cas des fonctions réelles

Propriété.

- f est une injection si toute droite horizontale $y = a$ (avec a inclut dans l'arrivée F) coupe le graphe de f en au plus un point.
- f est une surjection si pour tout pour tout $a \in F$, la droite horizontale d'équation $y = a$ coupe le graphe de f en au moins un point.

Exemples.



La première courbe est une injection, les deux autres n'en sont pas. La première courbe et la troisième courbe sont des surjections, la deuxième courbe n'est pas une surjection.

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x$ si $x \geqslant 0$ et $f(x) = x + 1$ si $x < 0$.

1. Tracer la courbe représentative de f.
2. Par lecture graphique : la fonction f est-elle injective ? surjective ?

Propriété 5.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction réelle définie sur I. Si f est strictement monotone sur I, alors f est une injection.

Exemples. Les fonctions $x \to x$ (sur $\mathbb{R}$), $x \to x^3$ (sur $\mathbb{R}$), $x \to e^x$ (sur $\mathbb{R}$), $x \to \ln x$ (sur $]0, +\infty[$), $x \to \sqrt{x}$ (sur $[0, +\infty[$) sont strictement monotones sur leur intervalle de définition respectif, donc ce sont des injections.

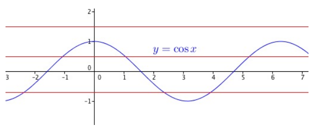
Attention à la fonction $x \to 1/x$ sur $\mathbb{R}^*$. $\mathbb{R}^*$ n'est pas un intervalle (il est en deux parties), donc on ne peut pas utiliser la proposition précédente pour montrer que cette fonction est injective ! On le fait en deux fois.

Propriété.

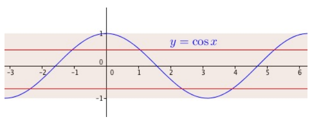
La fonction $\widetilde{f} : \begin{array}{ccc} D & \to & f(D) \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$ est une surjection.

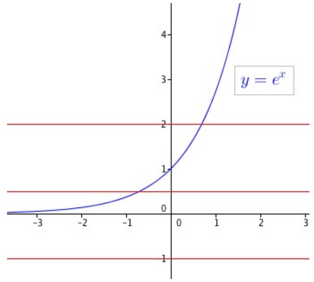
C'est-à-dire qu'il suffit d'adapter l'espace d'arrivée pour que n'importe quelle fonction devienne une surjection.

Exemples. Si on prend comme ensemble d'arrivée $F = \mathbb{R}$ pour $\cos x$ et pour e^x, ce ne sont pas des surjections. Mais si on prend $F = [-1, 1]$ pour $\cos x$ et $F = \mathbb{R}^{+*}$ pour e^x, alors ça devient des surjections.

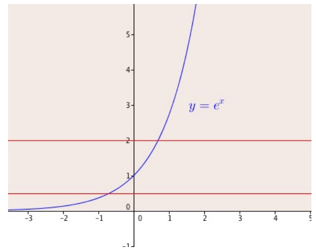


$\Rightarrow$





$\Rightarrow$



1.3 Bijections et bijections réciproques

Propriété.

f est une bijection si pour tout $a \in F$, la droite horizontale d'équation $y = a$ coupe le graphe de f exactement une seule fois.

Remarque : Le choix de l'ensemble d'arrivée est très important car c'est le bon choix de l'ensemble d'arrivée qui rend la fonction surjective !

Exemples. ln est une bijection de $]0, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$. La fonction $x \to x^3$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Attention, la fonction $x \to x^2$ n'est pas une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$..... Par contre, c'est une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$.

Propriété.

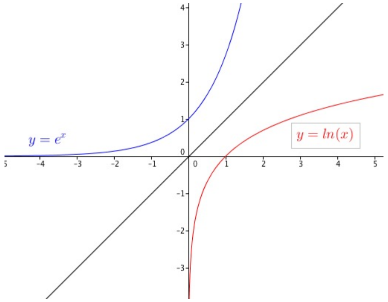
Si f est une bijection de D sur F, sa bijection réciproque f^{-1} est une fonction de F sur D. Pour tout $y \in F$, le réel $f^{-1}(y)$ est l'unique solution de l'équation $f(x) = y$.

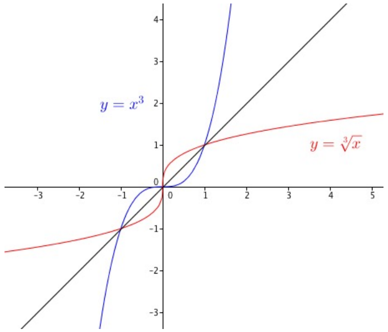
Les graphes de f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$ appelée première bissectrice du plan.

Remarque :

1. Si f est une bijection, f^{-1} désigne la bijection réciproque de f et pas la fonction $1/f$.
2. La bijection réciproque de f^{-1} est la fonction f, autrement dit $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$.

Exemples.





Exercice 2

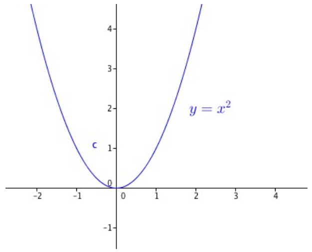
On note f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{2x+3}$. On admet (pour l'instant) que c'est une bijection de $[-3/2, +\infty[$ sur $\mathbb{R}^+$. Trouver l'expression de $f^{-1}(y)$ pour tout $y \in \mathbb{R}^+$.

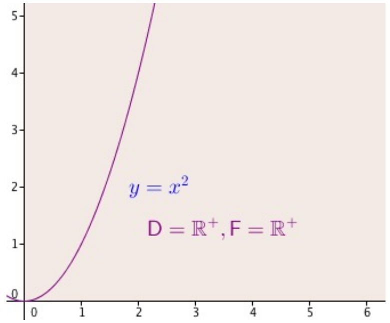
Propriété 9.

$$\forall x \in D,\ f^{-1}\big(f(x)\big) = x \qquad \text{et} \qquad \forall y \in F,\ f\big(f^{-1}(y)\big) = y.$$

Si une fonction $f : D \to F$ n'est pas une bijection, on a la possibilité parfois de garder un "bout" de la fonction seulement pour faire une bijection. On garde $\widetilde{D}$ une partie de l'ensemble de définition et $\widetilde{F}$ une partie de l'ensemble d'arrivée de manière à ce que $f : \widetilde{D} \to \widetilde{F}$ soit une bijection "extraite" de f. Dans ce cas, on dit que f réalise une bijection de $\widetilde{D}$ sur $\widetilde{F}$.

Exemples. La fonction carré sur $\mathbb{R}$ n'est pas une bijection car non injective. Mais si on considère la fonction $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ : x \to x^2$, c'est bien une bijection. De même, la fonction sinus n'est pas une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, mais si on restreinte l'ensemble de départ à $[0, \pi]$ et l'arrivée à $[-1, 1]$, on obtient une fonction bijective (voir plus loin).





Théorème 10.

(Théorème de la bijection) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction réelle définie sur I. Si f est continue et strictement monotone sur I, alors :

1. la fonction f réalise une bijection de I sur $f(I)$ (qui est un intervalle). Autrement dit, la fonction f en prenant comme ensemble d'arrivée $f(I)$ est une bijection,
2. la bijection réciproque est

$$\begin{array}{rccl} f^{-1}: & f(I) & \to & I \\ & y & \mapsto & f^{-1}(y) = x \text{ tel que } f(x) = y \end{array}$$

f^{-1} est strictement monotone sur $f(I)$ de même sens de variation de f, et continue sur $f(I)$.

Exemple. On considère $f(x) = x^2$ une portion de la fonction carrée, avec le domaine de définition $D = \mathbb{R}^+$. C'est une fonction continue et strictement croissante sur $D = \mathbb{R}^+$, donc elle réalise une bijection de $D = \mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$ (arrivée). Elle admet donc une bijection reciproque f^{-1} continue et strictement croissante :

$$\begin{array}{rccl} f^{-1}: & \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R}^+ \\ & y & \mapsto & f^{-1}(y) = x \text{ tel que } y = f(x) = x^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{y} \end{array}$$

C'est à dire $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$. La fonction racine carrée est la bijection réciproque d'une portion de la fonction carrée.

Théorème 11.

(Dérivabilité de la bijection réciproque) Soit x un point de I en lequel f est dérivable et $y = f(x)$ associé.

1. Si $f'(x) = 0$, alors f^{-1} n'est pas dérivable en y et le graphe de f^{-1} présente une tangente verticale au point d'abscisse $y = f(x)$.
2. Si $f'(x) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en y et

$$(f^{-1})'(y) = (f^{-1})'\big(f(x)\big) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

Exemples. La fonction racine carré est la bijection réciproque de $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ : x \to x^2$. Or f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et la dérivée ne s'annule qu'en $x = 0$, ce qui correspond à $y = f(0) = 0^2 = 0$. Donc la fonction racine carré est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et le graphe de la racine carré a une tangente verticale en 0.

Pour $y > 0$, cherchons à déterminer la dérivée de la racine carré f^{-1} en ce point. On note $x = f^{-1}(y) = \sqrt{y}$ associé à y. Donc :

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{2x} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

Exercice 3

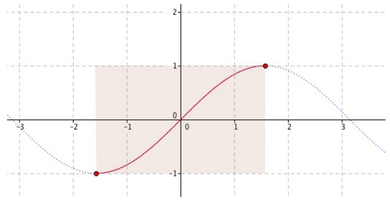
Soit $f :\ \begin{array}{ccc} [0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 + 1. \end{array}$

1. Après avoir étudié la dérivabilité de f, dresser son tableau de variations.
2. Montrer que f réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[1, +\infty[$.
3. On considère la bijection $\widetilde{f} :\ \begin{array}{ccc} [0, +\infty[& \to & [1, +\infty[\\ x & \mapsto & x^2 + 1 \end{array}$.
   (a) Quels sont les intervalles de départ et d'arrivée de $\widetilde{f}^{-1}$?
   (b) Quel est le sens de variation de $\widetilde{f}^{-1}$?
   (c) Déterminer sur quel ensemble $\widetilde{f}^{-1}$ est dérivable. Que se passe-t-il pour $\widetilde{f}^{-1}$ au point d'abscisse 1 ?
   (d) Déterminer l'expression de $\widetilde{f}^{-1}(y)$ pour tout $y \in [1, +\infty[$.
   (e) Calculer $(\widetilde{f}^{-1})'$ de deux façons.

2 Fonctions trigonométriques réciproques

2.1 Les fonctions arcsin et arccos

La fonction sinus est continue et strictement croissante sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. L'image par la fonction sinus de cet intervalle est $[-1; 1]$. Elle réalise donc une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1; 1]$, on note cette fonction $\widetilde{\sin}$. $\widetilde{\sin}$ admet donc une bijection réciproque.



Définition 12.

La fonction arcsin est la bijection réciproque de la fonction $\widetilde{\sin}$: $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1; 1]$:

$$\arcsin : \begin{array}{ccc} [-1; 1] & \to & \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ y & \to & \arcsin y \end{array}$$

Pour tout $y \in [-1, 1]$, $\arcsin y$ est l'unique angle x de l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ dont le sinus vaut y, c'est à dire $\sin x = y$.

Exemple. On cherche $\arcsin(1)$, donc l'unique angle de l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ dont le sinus vaut 1. Cet angle est $\frac{\pi}{2}$, donc $\arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$

Exercice 4

Calculer $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Théorème 13.

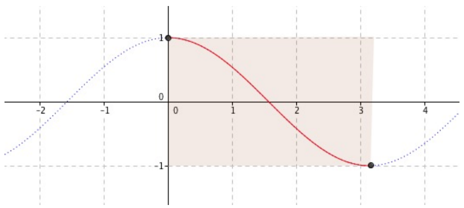
La fonction arcsin a les propriétés suivantes :

1. arcsin est continue et strictement croissante sur $[-1, 1]$
2. arcsin est impaire
3. Pour tout $x \in [-\pi/2, \pi/2]$, on a $\arcsin(\sin(x)) = x$ et pour tout $y \in [-1, 1]$, on a $\sin(\arcsin(y)) = y$.
4. La fonction arcsin est dérivable sur $]-1, 1[$. Pour tout $y \in]-1, 1[$, on a
$$\arcsin'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

Démonstration du point 4. La fonction $\widetilde{\sin}$ est dérivable sur $[-\pi/2, \pi/2]$ et sa dérivée est la fonction $\widetilde{\sin}\,' = \cos(x)$, donc la fonction $\widetilde{\sin}\,'$ ne s'annule que pour $x = -\frac{\pi}{2}$ et $x = \frac{\pi}{2}$.
Pour $x = \frac{\pi}{2}$, on a $y = \sin\frac{\pi}{2} = 1$; et pour $x = -\frac{\pi}{2}$, on a $y = \sin -\frac{\pi}{2} = -1$. Donc la fonction Arcsin n'est dérivable ni en 1, ni en -1 et son graphe présente une tangente verticale aux points d'abscisses 1 et -1.
Pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, on a $\widetilde{\sin}\,'(x) \neq 0$ et $y \in]-1, 1[$ donc Arcsin est dérivable sur $]-1, 1[$.

Soit $y \in]-1, 1[$. On a
$$\text{Arcsin}'(y) = \frac{1}{\widetilde{\sin}\,'(\text{Arcsin}(y))} = \frac{1}{\cos(\text{Arcsin}(y))}.$$
On a
$$\cos^2(\text{Arcsin}(y)) = 1 - \sin^2(\text{Arcsin}(y)) = 1 - y^2$$
Comme $\text{Arcsin}(y) \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, on a $\cos(\text{Arcsin}(y)) > 0$ donc
$$\cos(\text{Arcsin}(y)) = \sqrt{\cos^2(\text{Arcsin}(y))} = \sqrt{1-y^2}.$$
Finalement, $\text{Arcsin}'(y) = \dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}$.

La fonction cosinus est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $[0, \pi]$. L'image par la fonction cosinus de cet intervalle est $[-1; 1]$. Elle réalise donc une bijection de $[0, \pi]$ sur $[-1; 1]$. Elle admet donc une bijection réciproque.



Définition 14.

La fonction arccos est la bijection réciproque de la fonction $\widetilde{\cos}$: $[0, \pi] \to [-1; 1]$:
$$\begin{array}{rcl} \arccos : [-1; 1] & \to & [0, \pi] \\ y & \to & \arccos y \end{array}$$

Pour tout $y \in [-1, 1]$, $\arccos y$ est l'unique angle x de l'intervalle $[0, \pi]$ dont le cosinus vaut y, c'est-à-dire $\cos x = y$.

Exemple. On cherche $\arccos(1)$, l'unique angle de l'intervalle $[0, \pi]$ dont le cosinus vaut 1. Cet angle est 0, donc $\arccos(1) = 0$.

Exercice 5

Calculer $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Exercice 6

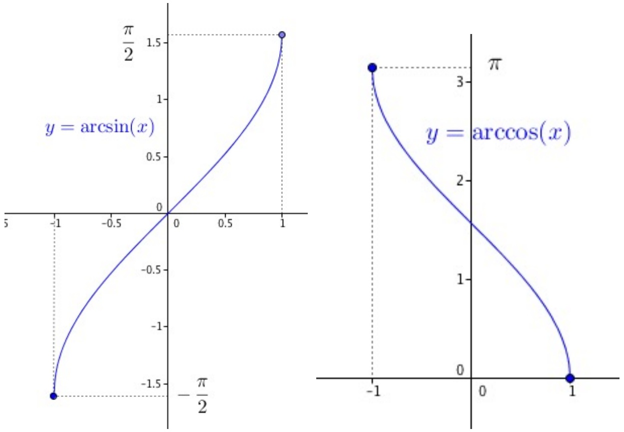
Commentaire $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 3\frac{\pi}{4}$

Théorème 15.

La fonction arccos a les propriétés suivantes :

1. arccos est continue et strictement décroissante sur $[-1, 1]$
2. Pour tout $x \in [0, \pi]$, on a $\arccos(\cos(x)) = x$ et pour tout $y \in [-1, 1]$, on a $\cos(\arccos(y)) = y$.
3. La fonction arccos est dérivable sur $]-1, 1[$. Pour tout $y \in]-1, 1[$, on a
$$\arccos'(y) = \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}}$$

On a les graphes suivants pour les fonction Arccos et Arcsin :



2.2 La fonction arctan.

La fonction tangent est continue et strictement croissante sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. L'image par la fonction tangente de cet intervalle est $\mathbb{R}$ tout entier. Elle réalise donc une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$. Elle admet donc une bijection réciproque.

Définition 16.

La fonction arctan est la bijection réciproque de la fonction $\widetilde{\tan}$: $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcl} \arctan : \mathbb{R} & \to & \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\\ y & \to & \arctan y \end{array}$$

Pour tout y réel, $\arctan y$ est l'unique angle x de l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ dont la tangente vaut y, c'est à dire $\tan x = y$.

Exemple. $\arctan(0)$ est l'unique angle de l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ dont la tangente vaut 0, donc c'est l'angle 0 et $\arctan(0) = 0$.

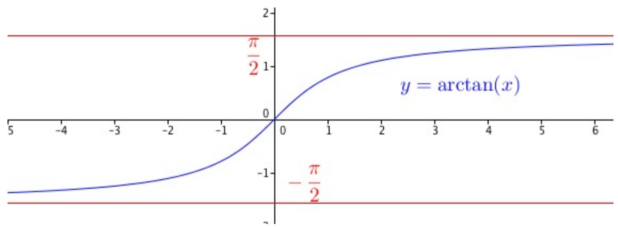
Théorème 17.

La fonction arctan a les propriétés suivantes :

1. arctan est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$
2. arctan est impaire.
3. La limite de la fonction arctan en $+\infty$ est $\frac{\pi}{2}$, la courbe admet la droite $y = \frac{\pi}{2}$ comme asymptote horizontale en $+\infty$.
4. Pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, on a $\arctan(\tan(x)) = x$.
5. Pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a $\tan(\arctan(y)) = y$.
6. La fonction arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a

$$\arctan'(y) = \frac{1}{1+y^2}$$

La fonction arctan a le graphe suivant :



Propriété 18.

$$\forall x > 0, \qquad \arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$$

$$\forall x < 0, \qquad \arctan x + \arctan \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$$

Démonstration.

3 Fonctions Hyperboliques

3.1 Les fonctions ch et sh

Définition 19.

On définit la fonction cosinus hyperbolique ch : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (notée aussi *cosh*) par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

On définit la fonction sinus hyperbolique sh : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (notée aussi *sinh*) par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Propriété 20.

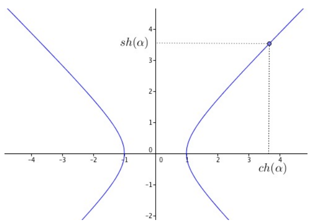
$$[\operatorname{ch}(x)]^2 - [\operatorname{sh}(x)]^2 = 1$$

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$[\operatorname{ch}(x)]^2 - [\operatorname{sh}(x)]^2 = (\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x)(\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x)$$

$$= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} - \frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = e^{-x} \times e^x = 1$$

Remarque : Les fonction *ch* et *sh* servent à paramétrer une branche de l'hyperbole d'équation $x^2 - y^2 = 1$, d'où le nom de cosinus et sinus hyperboliques (par analogie avec les cosinus et sinus trigonométriques, ou fonctions circulaires, qui servent à paramétrer le cercle de centre O et de rayon 1).



Théorème 21.

— La fonction ch est paire, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{ch}'(x) = \operatorname{sh}(x)$$

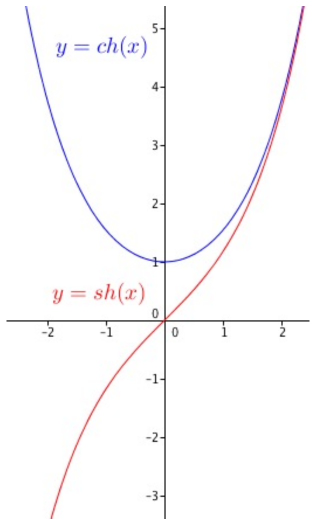
— La fonction sh est impaire, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{sh}'(x) = \operatorname{ch}(x)$$

Démonstration. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\operatorname{ch}(-x) = \frac{e^{-x} + e^{--x}}{2} = \frac{e^{-x} + e^{x}}{2} = \operatorname{ch}(x)$$

Donc le ch est bien paire. La fonction exponentielle étant dérivable et continue sur $\mathbb{R}$, ch aussi et $ch'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh}(x)$. Les propriétés du sinus hyperboliques se montrent de la même manière par calcul direct (essayez !).
Pour tout x réél, $\operatorname{ch}(x) - \operatorname{sh}(x) = e^{-x} > 0$, donc la courbe du cosinus hyperpolique est au-dessus de la courbe du sinus hyperbolique, et leur différence tend vers 0 en $+\infty$. On obtient la représentation graphique suivante :



Formules de trigonométrie hyperboliques. Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, on a :

$$\operatorname{ch}(a+b) = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b, \quad \operatorname{ch}(a-b) = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b - \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b$$

$$\operatorname{sh}(a+b) = \operatorname{sh} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} b \operatorname{ch} a, \quad \operatorname{sh}(a-b) = \operatorname{sh} a \operatorname{ch} b - \operatorname{sh} b \operatorname{ch} a.$$

3.2 La fonction th

Définition.

On définit la fonction tangente hyperbolique th : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (notée aussi *tanh*) par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{th}(x) = \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Remarque : Pour tout x réel, on a $\text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} > 0$, donc la tangente hyperbolique est bien définie sur $\mathbb{R}$.

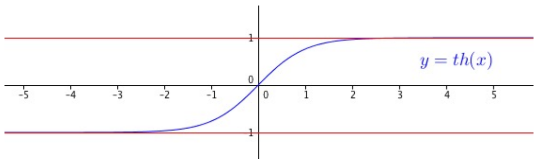
Théorème.

— La fonction th est impaire.
— La fonction th est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{th}'(x) = \frac{1}{(\text{ch}(x))^2} = 1 - (\text{th}(x))^2$$

— Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $-1 < \text{th}(x) < 1$.
— la fonction th est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, sa limite vaut 1 en $+\infty$.

La courbe représentative de la fonction tangente hyperbolique est :



Classe préparatoire ATS **mathématiques**
Fiche d'exercices 10 : Nouvelles fonctions usuelles

Exercice 1

($\star$) On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x$ si $x \geqslant 0$ et $g(x) = x - 1$ si $x < 0$. Tracer la courbe représentative de g. Par lecture graphique : la fonction g est-elle injective, surjective, et /ou bijective ?

Exercice 2

($\star\star$) On note f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{2x+3}$.

1. Montrer que l'ensemble de définition de f est un intervalle I que l'on précisera.
2. Sur quel intervalle peut-on à priori affirmer que f est dérivable ?
3. Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur I et dresser son tableau de variation. Tracer l'allure du graphe de f.
4. Quel est l'ensemble image J de f ?
5. En appliquant le théorème de la bijection, montrer que f réalise une bijection sur des ensembles à préciser.
6. Dresser le tableau de variations de la bijection réciproque f^{-1} de f.
7. Trouver l'expression de $f^{-1}(y)$ pour tout $y \in J$.
8. Quel est l'ensemble de dérivabilité de f^{-1} ? Calculer la dérivée $(f^{-1})'$ sur cet intervalle.
9. Tracer le graphe de f^{-1} à partir de celui de f.

Exercice 3

($\star\star$) Montrer que la fonction $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & x^3 + 2x - 1 \end{array}$ est une bijection. Calculer la dérivée de sa bijection réciproque f^{-1} au point $y = 2$.

Exercice 4

($\star\star$) On considère

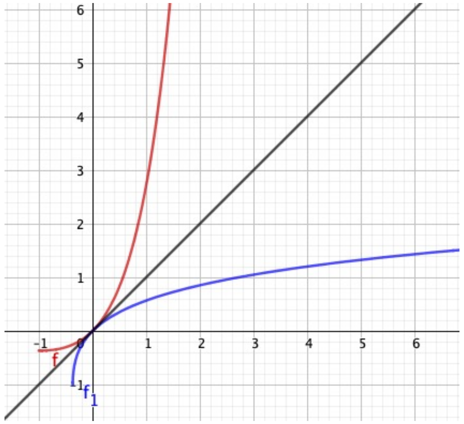
$$\begin{array}{rcl} f : [-1, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \to & \frac{1}{x+2} + 2 \end{array}$$

1. Etudier les variations de f et tracer sa courbe.
2. Justifier que f réalise une bijection de $[-1, +\infty[$ sur J (intervalle à préciser).
3. Sans calculer f^{-1}, donner son tableau de variation et tracer sa courbe.

Exercice 5

($\star\star\star$) On considère la fonction $\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \to & x\, e^x \end{array}$.

1. Dresser le tableau de variations de f.
2. La fonction f est-elle injective ? Surjective ?
3. Montrer que f réalise une bijection de $[-1;+\infty[$ sur un intervalle J que l'on explicitera.
4. On note $\begin{array}{rccl} \tilde{f}: & [-1;+\infty[& \to & J \\ & x & \to & x\, e^x \end{array}$ et g sa bijection réciproque.
   (a) Déterminer le domaine de définition de g, ainsi que ses variations et ses limites aux bornes du domaine de définition.
   (b) Calculer $g(0)$, $g(-1/e)$ et $g(e)$
   (c) Déterminer le domaine D' sur lequel la fonction g est à priori dérivable. Montrer que, pour $y \in D'$, $g'(y) = \dfrac{1}{y + e^{g(y)}}$. Calculer $g'(0)$ et $g'(e)$.



Exercice 6

($\star$) Calculer :

$$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right), \arccos\left(-\frac{1}{2}\right), \arctan\left(-\sqrt{3}\right),$$

$$\arctan(-1), \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Exercice 7

($\star$) Calculer :

$$\sin\left(\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)\right), \arcsin\left(\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right), \arcsin\left(\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right), \arccos\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right),$$

$$\arctan\left(\tan\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right),$$

Exercice 8

($\star\star$) Donner une expression plus simple de $\cos(\arctan x)$, $\sin(\arctan x)$, $\tan(\arccos x)$.

Exercice 9

($\star\star$) Trouver les domaines de définition et dériver les fonctions suivantes sur un domaine que l'on précisera :

$$f_1(x) = \arcsin(\sqrt{x}), \quad f_2(x) = \arcsin(x/3), \quad f_3(x) = x^2 \arctan(x^2),$$

$$f_4(x) = \arctan(\sin 2x), \quad f_5(x) = \ln(\arctan x^2), \quad f_6(x) = \arctan\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

Exercice 10

($\star\star\star$) Montrer que pour $a > 0$ et $b < 1/a$, on a

$$\arctan a + \arctan b = \arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right)$$

Exercice 11

($\star\star$) Montrer les relations suivantes sur des intervalles que l'on précisera

$$\arctan x + 2\arctan(\sqrt{1+x^2} - x) = \frac{\pi}{2} \qquad \text{et } 2\arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{x+1}}\right) + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$$

Exercice 12

($\star\star$) Donner le domaine de définition D de la fonction f défini par

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) + 2\arctan x$$

puis calculer sa dérivée sur une partie de D à préciser. Simplifier f.

Exercice 13

($\star\star\star$) Simplifier $\arctan(2) + \arctan(3) + \arctan(2+\sqrt{3})$.

Exercice 14

($\star\star$) Soit x un nombre réel. Calculer $\sin x$ sachant que $\tan(x) = 3\cos(x)$.