9. Récurrences et sommes

Dans ce très court chapitre, on introduit deux outils : un outils de raisonnement (la récurrence) et un outils de calcul (la notation somme). Ces deux outils pourront apparaître régulièrement dans les cours et les exercices des autres chapitres.

1 Le raisonnement par récurrence

Soit n_0 un entier fixé et $Propriete(n)$ une propriété mathématique dépendant d'un nombre entier n et définie pour tout entier $n \geqslant n_0$. Rappelons qu'une propriété est une phrase (en français ou en notations mathématiques). On veut montrer que la propriété est vraie par le principe de récurrence.

Technique. Rédaction d'une démonstration par récurrence

1. Enoncé Pour tout entier $n \geqslant n_0$, on considère la propriété $Propriete(n)$ (on cite la propriété qu'on veut montrer)
2. Initialisation Démonstration de la propriété $Propriete(n_0)$. On vérifie à la main que la propriété marche quand on prend $n = n_0$ le plus petit entier possible pour cette propriété.
3. Hérédité Soit un entier $n \geqslant n_0$ tel que $Propriete(n)$ est vraie. On démontre alors la propriété $Propriete(n+1)$ en utilisant la propriété $Propriete(n)$.
4. Conclusion Par récurrence, pour tout entier $n \geqslant n_0$, on la $Propriete(n)$.

Remarque : C'est le principe des dominos. Si des dominos sont disposés côte à côte, la chute d'un domino entraîne de proche en proche la chute de tous les dominos situés après lui.

Exemple. Soient q un nombre réel et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite géométrique définie par $\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & 1 \\ u_{n+1} & = & q \times u_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{array}\right.$ Démontrons par récurrence que $u_n = q^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On veut montrer la propriété $u_n = q^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. C'est bien une phrase mathématique, qui peut se traduire en français par : le nombre numéro n de la suite est égal à q^n.

— Initialisation Le premier entier pour lequel la propriété doit être vraie est 0. On a $u_0 = 1$ et $q^0 = 1$ donc $u_0 = q^0$. La propriété est vraie pour $n = 0$.

— Hérédité Soit n (fixé) tel que $u_n = q^n$.
On veut montrer que $u_{n+1} = q^{n+1}$ (remplacement de n par $n+1$).
— On a, par définition de la suite, $u_{n+1} = q \times u_n$.
— Or, on sait que $u_n = q^n$, donc on remplace $u_{n+1} = q \times (q^n) = q^{n+1}$
— Donc la propriété $u_{n+1} = q^{n+1}$ est vraie.

En conclusion, par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = q^n$.

Exercice 1

Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $4^n + 5$ est un multiple de 3.

2 Sommes et produits

2.1 Notations

Définition 1. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé et $a_0, a_1, \dots, a_n$ des nombres (réels ou complexes). On note

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} a_k} = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n,$$

ce qui se lit somme pour k allant de 0 à n des a_k.

Si $m \in \mathbb{N}$ est inférieur à n, on note de même $\sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n$.

Remarque : Dans la notation $\sum$, l'indice de sommation k est un indice muet. On peut choisir une autre lettre pour indexer la somme : $\sum_{k=0}^{n} a_k$ et $\sum_{j=0}^{n} a_j$ sont la même somme.

Exemples. Pour $n = 3$ et $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_2 = 0$ et $a_3 = -2$, on a

$$\sum_{k=0}^{3} a_k = 1 + 2 + 0 - 2 = 1$$

On a

$$\sum_{k=0}^{5} k^2 = 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 55$$

Exercice 2

Calculer $\sum_{k=2}^{4} (k^2 + 1)$.

Formule $\forall m,n\in\mathbb{N}$ tels que $m\leqslant n$, $\forall x\in\mathbb{C}$, on a

$$\boxed{\sum_{k=m}^{n} x = x+x+\cdots+x=(n-m+1)x}$$

Définition 2.
Soit $n\in\mathbb{N}$ fixé et $a_0,a_1,\ldots,a_n$ des nombres (réels ou complexes). On note

$$\boxed{\prod_{k=0}^{n} a_k} = a_0\times a_1\times a_2\times\cdots\times a_n,$$

ce qui se lit produit pour k allant de 0 à n des a_k.

Si $m\in\mathbb{N}$ est inférieur à n, on note de même $\displaystyle\prod_{k=m}^{n} a_k = a_m\times a_{m+1}\times\cdots\times a_n$.

Exemple.

$$\prod_{k=3}^{5}(k^2+1)=(3^2+1)\times(4^2+1)\times(5^2+1)=10\times 17\times 26=4420$$

Exercice 3

Calculer

$$\prod_{j=2}^{6}(j-1)$$

Formule $\forall m,n\in\mathbb{N}$ tels que $m\leqslant n$, $\forall x\in\mathbb{C}$, on a

$$\boxed{\prod_{k=m}^{n} x = x\times x\times\cdots\times x = x^{n-m+1}}$$

2.2 Propriétés

Propriété.
Soient $a_1,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_n$ et λ des nombres réels. Pour les sommes, on a

$$\sum_{k=1}^{n}\lambda a_k=\lambda\sum_{k=1}^{n}a_k \quad\text{et}\quad \sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)+\left(\sum_{k=1}^{n}b_k\right).$$

Pour les produits, on a

$$\prod_{k=1}^{n}\lambda a_k=\lambda^n\prod_{k=1}^{n}a_k \quad\text{et}\quad \prod_{k=1}^{n}(a_k\times b_k)=\left(\prod_{k=1}^{n}a_k\right)\times\left(\prod_{k=1}^{n}b_k\right).$$

Exemple. Calculer $\displaystyle\sum_{k=8}^{11}\frac{2k-1}{7}$ en développant la somme au maximum.

2.3 Valeurs classiques

Propriété 4.
Soit n un entier naturel et a un nombre réel ou complexe.

$$\sum_{k=0}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2},\qquad \sum_{k=0}^{n}a^k=\begin{cases}\frac{1-a^{n+1}}{1-a} & \text{si } a\neq 1\\ n+1 & \text{si } a=1\end{cases}$$

Démonstration.

$$\begin{array}{rcccccccccccc}
\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k & = & 1 & + & 2 & + & \ldots & + & (n-1) & + & n\\
+\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k & = & n & + & (n-1) & + & \ldots & + & 2 & + & 1\\
\hline
2\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k & = & (n+1) & + & (n+1) & + & \ldots & + & (n+1) & + & (n+1)\\
 & = & n(n+1) & & & & & & & &
\end{array}$$

D'où la première égalité.

Pour la deuxième égalité, la formule avec $a=1$ est évidente. Pour $a \neq 1$, on a

$$\begin{array}{rcl} \sum_{k=0}^{n} a^k & = & 1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1} + a^n \\ -a\sum_{k=0}^{n} a^k & = & -a - a^2 - \dots - a^{n-1} - a^n - a^{n+1} \\ \hline (1-a)\sum_{k=0}^{n} a^k & = & 1-a^{n+1} \end{array}$$

Comme $a \neq 1$, on peut tout diviser par $1-a$ et on obtient la deuxième égalité.

3 La formule du binôme de Newton

3.1 La factorielle et les coefficients du binôme

Définition 5.

Soit n un entier naturel, on appelle factorielle n et on note $n!$ le nombre

$$\boxed{n!} = \prod_{k=1}^{n} k = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n.$$

Par convention, $0! = 1$.

Exemple. $5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$.

Définition 6.

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{Z}$. On appelle coefficient binomial n, p le nombre noté $\binom{n}{p}$ (ou C_n^p) défini par :

$$\boxed{\binom{n}{p}} = \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!} \quad \text{si } 0 \leqslant p \leqslant n$$

et $\binom{n}{p} = 0$ sinon.

Exemple.

$$\binom{7}{3} = \frac{7!}{3!(7-3)!} = \frac{7!}{3!4!} = \frac{1\times2\times3\times4\times5\times6\times7}{(1\times2\times3)\times(1\times2\times3\times4)} = \frac{5\times6\times7}{1\times2\times3} = 5\times7 = 35$$

Exercice 4

Donner les valeurs des coefficients binomiaux $\binom{6}{p}$ pour $p = 0, 1, \dots, 6$.

Propriété.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{Z}$, on a

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \quad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n, \quad \binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$$

$$\binom{n+1}{p} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p-1} \text{ (formule de Pascal)}$$

Ces propriétés permettent de calculer de proche en proche les valeurs des coefficients binomaux (pour des n, p pas trop grand) en utilisant le triangle de Pascal :

$n \backslash p$	0	1	2	3	4
0					
1					
2					
3					
4					

3.2 Le binôme de Newton

Théorème 8.

Pour tous nombres complexes x et y, et tout entier naturel n, on a

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \, y^{n-k}, \quad \text{formule du binôme de Newton}$$

Exemples.

1. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Développer $(x-y)^4$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Développer $(x+1)^n$.
3. En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5

Développer $(x+y)^6$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$.

Il existe aussi une version du binôme de Newton pour les matrices

Théorème 9.

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = BA$ (leur produit commute), alors

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}.$$

Mais attention à bien vérifier que le produit commute !!

Classe préparatoire ATS **mathématiques**

Fiche d'exercices IX : Réccurence et Somme

Exercice 1

($\star$) Soit la suite définie par récurrence par $u_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 3u_n + 2$$

On veut montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2 \times 3^n - 1$$

On propose les calculs ci-dessous. Rajouter la rédaction nécessaire pour le raisonnement soit présenté de manière correcte.

$$u_0 = 1, \quad 2 \times 3^0 - 1 = 2 - 1 = 1$$

$$u_{n+1} = 3u_n + 2 = 3(2 \times 3^n - 1) + 2 = 2 \times 3^{n+1} - 3 + 2 = 2 \times 3^{n+1} - 1$$

Exercice 2

($\star\star$) Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 6 - 2u_n$.
Montrer que, pour tout entier n, on a $u_n = (-2)^{n+1} + 2$.

Exercice 3

($\star\star$) Démontrer les égalités suivantes par récurrence.

$$a)\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad b)\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Exercice 4

($\star$) Expliciter et calculer à la main les sommes

$$\sum_{k=2}^{5} 2k; \quad \sum_{i=-1}^{3} i^2; \quad \sum_{j=4}^{5} (j+2)$$

Exercice 5

($\star\star$) Calculer les sommes suivantes :

$$S_1 = \sum_{k=8}^{21} \frac{2k-5}{6}; \quad S_2 = \sum_{k=0}^{23} \binom{23}{k} (-1)^k\, 2^{23-k}; \quad S_3 = \sum_{k=1}^{n} (2k-1)^3, \forall n \in \mathbb{N}$$

Exercice 6

($\star\star$) Expliciter et calculer en fonction de n les sommes

$$\sum_{j=1}^{n-2} 1; \quad \sum_{k=0}^{n} 2^k; \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{3^{k-1}}; \quad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k 2^k; \quad \sum_{k=0}^{n-2} (-1)^k 2^{2k}$$

Exercice 7

($\star\star$) Comparer les sommes dans les trois cas suivants :

$$a) \quad \sum_{k=3}^{7} \frac{k+2}{k-2}; \quad \sum_{j=1}^{4} \frac{j+4}{j}$$

$$b) \quad \sum_{k=2}^{5} (k-1)(2k+1); \quad \sum_{j=1}^{4} j(2j+3)$$

$$c) \quad \sum_{k=5}^{n} \frac{2^{k-1}}{3^{k+1}}; \quad \sum_{j=4}^{n-1} \frac{2^j}{3^{j+2}}$$

Exercice 8

($\star\star$)On note $x = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$. Exprimer les sommes suivantes en fonction de x :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k+3}{k}; \quad \sum_{i=3}^{n} \frac{2}{i}; \quad \sum_{j=2}^{n+3} \left(2 - \frac{1}{j}\right);$$

Exercice 9

($\star\star$) Calculer la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 10

($\star\star$) Simplifier l'expression $\frac{p}{n+1}\binom{n+1}{p}$ pour $1 \leqslant p \leqslant n$.

Exercice 11

($\star$) Développer $(2x-1)^7$.

Exercice 12

($\star\star$) Calculer le produit $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)$ et en déduire $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 13

($\star\star$) Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2, A^3 et en déduire A^k pour $k \in \mathbb{N}$. ($\star\star\star$) Démontrer cette formule par récurrence.
2. Calculer B^2, B^3 et en déduire B^k pour $k \in \mathbb{N}$. (On ne cherchera pas à démontrer cette formule).
3. Calculer $(A+B)^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.