8. Géométrie et équations cartésiennes

Ce chapitre aborde les objets fondamentaux utilisés en géométrie : droites et cercles dans le plan, plans, droites et sphères dans l'espace. Les objectifs du chapitre sont de connaitre et savoir calculer les équations qui caractérisent les objets, savoir les utiliser et déterminer les intersections entre différents objets. On commencera par travailler dans le plan uniquement, puis on s'intéressera à l'espace.

1 Équations d'un ensemble de points

Soit $\mathcal{A}$ un ensemble de points du plan $\mathcal{P}$ (par exemple, $\mathcal{A}$ peut être un point, une droite, la réunion de 3 droites, un cercle, une ellipse, le plan en entier, ou même l'ensemble vide...) ou un ensemble de point de l'espace $\mathcal{E}$ (un plan, une droite, une sphère, un cône,....). On se place dans un repère, et on cherche à deviner si un point est sur $\mathcal{A}$ juste par observation de ces coordonnées. On va voir deux types d'observation sur les coordonnées : les équations cartésiennes et les équations paramètriques (ou paramètrées).

1.1 Équations cartésiennes de $\mathcal{A}$

Définition.

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan. Soit F une fonction de deux variables à valeurs réelles. On dit que l'équation $F(x, y) = 0$ est une équation cartésienne de l'ensemble $\mathcal{A}$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ si, et seulement si, pour tout point M du plan de coordonnées (x, y), on a l'équivalence :

$$M(x, y) \in \mathcal{A} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \Big(F(x, y) \text{ est défini et } F(x, y) = 0\Big).$$

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère de l'espace. Soit F une fonction de trois variables à valeurs réelles. On dit que l'équation $F(x, y, z) = 0$ est une équation cartésienne de l'ensemble $\mathcal{A}$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ si, et seulement si, pour tout point M de l'espace de coordonnées (x, y, z), on a l'équivalence :

$$M(x, y, z) \in \mathcal{A} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \Big(F(x, y, z) \text{ est défini et } F(x, y, z) = 0\Big).$$

Exemple. Lorsqu'on dit que la droite $\mathcal{D}$ a pour équation $y = -2x+1$, cela signifie que pour tout point M du plan de coordonnées (x, y), on peut écrire : $M(x, y) \in D \iff 2x + y - 1 = 0$ (équation cartésienne). Le point $A(2, -3)$ vérifie $2 \times 2 - 3 - 1 = 0$ donc c'est un point de la droite. Par contre, le point $B(1, 5)$ donne $2 \times 1 + 5 - 1 = 6 \neq 0$, donc il n'est pas sur la droite.

Exercice 1

Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble du plan défini par l'équation cartésienne

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} - 6 = 0$$

Les points $A(1, 2)$ et $B(2, -4)$ appartiennent-ils à $\mathcal{A}$?

Technique. Pour établir l'équation cartésienne d'un ensemble $\mathcal{A}$:

— On pose un point $M(x, y)$ (dans le plan) ou $M(x, y, z)$ (dans l'espace) .

— On place M dans l'ensemble $\mathcal{A}$: $M \in \mathcal{A}$

— on cherche à exploiter les propriétés géométriques de M pour établir une équation.

Remarque :

1. Notons que si $F(x, y) = 0$ est une équation cartésienne d'une partie $\mathcal{A}$ alors $12F(x, y) = 0$, $F(x, y)^2 = 0$ ou encore $\mathrm{e}^{F(x,y)} = 1$ sont aussi des équations cartésiennes de $\mathcal{A}$. Il n'y a donc pas du tout unicité de l'équation cartésienne de $\mathcal{A}$. De même pour les équations cartésiennes dans l'espace.

2. Une fonction réelle définie par $y = f(x)$ est l'équation cartésienne de sa courbe représentative.

1.2 Équations paramétriques de $\mathcal{A}$

Définition.

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan.

$$M(x, y) \in \mathcal{A} \Leftrightarrow \begin{cases} x &= f(\lambda_1, \lambda_2, ...) \\ y &= g(\lambda_1, \lambda_2, ...) \end{cases}$$

avec $\lambda_1, \lambda_2, ...$ des réels qu'on appelle paramètres et f, g des fonctions de plusieurs variables, chaque paramètre ayant son propre ensemble de valeur. Ce système est appelé une représentation parametrique (ou équation paramétrée) de l'ensemble $\mathcal{A}$.

Définition.

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère de l'espace.

$$M(x, y, z) \in \mathcal{A} \Leftrightarrow \begin{cases} x &= f(\lambda_1, \lambda_2, ...) \\ y &= g(\lambda_1, \lambda_2, ...) \\ z &= h(\lambda_1, \lambda_2, ...) \end{cases}$$

avec $\lambda_1, \lambda_2, ...$ des réels qu'on appelle **paramètres** et f, g, h des fonctions de plusieurs variables, chaque paramètre ayant son propre ensemble de valeur. Ce système est appelé **une représentation parametrique** ou équation paramétrée de l'ensemble $\mathcal{A}$.

Exemple. (Avec un paramètre) Un ensemble défini par $\begin{cases} x &= f(t) \\ y &= g(t) \end{cases}$, avec t réel, est une courbe paramétrée dans le plan. On verra comment étudier et tracer ce type de courbe ultérieurement.

Exercice 2

Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble du plan défini par le système paramétrique $\begin{cases} x &= \cos(t) \\ y &= \sin(t) \end{cases}$ avec $t \in [0, 2\pi]$. Les points $C\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et $D\left(\sqrt{3}, 1\right)$ appartiennent-ils à $\mathcal{F}$?

2 Equations dans le plan

Soit $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère du plan et $\mathcal{B} = (\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ la base qui lui est associée. On notera (x, y) les coordonnées d'un point dans ce repère, et on cherche les méthodes pour établir des équations cartésiennes de figures simples dans le plan droites et cercles.

2.1 Droites du plan

On pose $\mathcal{D}$ une droite passant par un point $A(x_A, y_A)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}(\alpha, \beta)$.

Technique. Soit $M(x, y)$ un point du plan. On commence pas une caractérisation géométrique : $M \in \mathcal{D} \Longleftrightarrow \overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.
Il y a deux manières d'utiliser la colinéarité :

1. $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires $\Longleftrightarrow$ il existe un paramètre $t \in \mathbb{R}$, tel que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$. On traduit cette égalité en coordonnées et on a

$$\begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = x_A + t\alpha \\ y = y_A + t\beta \end{cases}$$

On obtient une représentation paramétrique de $\mathcal{D}$.

A l'inverse, si la solution d'un système s'écrit de cette manière, alors la solution est une droite passant par le point de coordonnées $A(x_A, y_A)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}(\alpha, \beta)$.

2. $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires $\Longleftrightarrow \det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = 0$. En calculant le déterminant avec les coordonnées, on obtient une équation de la forme

ax+by+c=0

avec a, b, c des réels. C'est l'équation cartésienne de la droite.

A l'inverse, une équation de cette forme représente toujours une droite dans le plan.

— Le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées (a, b) est un vecteur orthogonal à la droite (on dit aussi normal à la droite).
— Pour obtenir un point de la droite, on fixe une des deux coordonnées et on déduit l'autre par l'équation.
— Pour trouver un vecteur directeur $\vec{u}$, il faut trouver un vecteur orthogonal à $\vec{n}$. Par exemple, $\vec{u}(-b, a)$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$, car $\vec{u} \cdot \vec{n} = -b.a + a.b = 0$ et $\vec{u} \perp \vec{n}$.

Remarque : Lorsque la droite $\mathcal{D}$ n'est pas dirigée par $\vec{\jmath}$, on peut mettre l'équation sous la forme $y = mx + p$, avec m le coefficient directeur et p l'ordonnée à l'origine de la droite.

Exercice 3

Soit $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère orthonormal. Déterminer une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}$ passant par les points $A(2, 3)$ et $B(-4, 7)$. Donner un vecteur normal à $\mathcal{D}$.

Exercice 4

Soit $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère du plan. On considère la droite $\mathcal{D}$ d'équation $2x - 5y + 8 = 0$. Déterminer une représentation paramétrique de $\mathcal{D}$.

Exercice 5

Soit $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère orthonormal. Déterminer une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}$ passant par $A(2, 3)$ et de vecteur normal $\vec{n}(1, 2)$.

2.2 Parallélisme et perpendicularité

Définition 4.

Soit $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont dites :

— parallèles si, et seulement si, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

— perpendiculaires ou orthogonales si, et seulement si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

Technique. Soient $\mathcal{R}$ un repère cartésien de plan et $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites d'équations cartésiennes respectives

$$\mathcal{D} : ax + by + c = 0 \qquad \text{et} \qquad \mathcal{D}' : a'x + b'y + c' = 0.$$

Pour étudier les positions respectives de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$, il suffit d'étudier les vecteurs directeurs $\vec{u}(-b, a)$ et $\vec{u}'(-b', a')$:

— Si $\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{u}') = 0$, alors les droites sont parallèles.

— Si $\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{u}') \neq 0$, elles sont sécantes. De plus, si le repère $\mathcal{R}$ est orthonormal et $\vec{u} \cdot \vec{u}' = 0$, alors les droites sont perpendiculaire.

Propriété.

Soit $\mathcal{D}$ une droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$. Les droites parallèles à $\mathcal{D}$ sont les droites dont une équation cartésienne est de la forme

$$ax + by + \gamma = 0, \qquad \text{avec } \gamma \in \mathbb{R}.$$

2.3 Distance d'un point à une droite

Définition 6.

Soient $\mathcal{D}$ une droite du plan et M_0 un point quelconque. La distance de M_0 à $\mathcal{D}$ est la distance M_0H où H est le projeté orthogonal de M_0 sur la droite $\mathcal{D}$. On note cette distance $\mathrm{d}(M_0, \mathcal{D})$.

Propriété 7.

Soient $\mathcal{D}$ une droite du plan et M_0 un point quelconque. Pour tout point P de $\mathcal{D}$, on a $M_0P \geqslant \mathrm{d}(M_0, \mathcal{D})$ avec égalité si, et seulement si, P est le projeté orthogonal de M_0 sur $\mathcal{D}$.

Autrement dit, la distance de M_0 à $\mathcal{D}$ est la plus petite distance du point M_0 aux points de la droite $\mathcal{D}$.

Propriété 8.

Soient $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère orthonormal, $M_0(x_0, y_0)$ un point du plan et $\mathcal{D}$ une droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$. La distance de M_0 à $\mathcal{D}$ est donnée par :

$$\mathrm{d}(M_0, \mathcal{D}) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Démonstration.

Exercice 6

Calculer la distance du point $A(-2, 1)$ à la droite $\mathcal{D}$ d'équation $3x - 4y + 4 = 0$.

2.4 Intersection de deux droites et systèmes linéaires à deux inconnues

Soit $\mathcal{D} : ax + by + c = 0$ et $\mathcal{D}' : a'x + b'y + c' = 0$ deux droites du plan. Soit $M(x, y)$ un point du plan. On a

$$M(x, y) \in \mathcal{D} \cap \mathcal{D}' \Longleftrightarrow \begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

Trois cas peuvent se présenter (c.f. systèmes) :

— Le système admet une seule solution (x_A, y_A). C'est à dire les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont sécantes en $A(x_A, y_A)$.

— Le système admet n'a pas de solution. C'est à dire les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles (aucun point commun).

— Le système admet une infinité de solutions. C'est à dire les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont confondues (ce qui se traduit par le fait que les deux équations sont proportionnelles).

2.5 Cercles

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Attention, il est indispensable que le repère soit orthonormal car on utilise les formules de calculs des distances à partir des coordonnées !

Technique. Etablir l'équation d'un cercle. On considère $\mathcal{C}$ un cercle, de centre $A(c, d)$ et de rayon r. Soit $M(x, y)$ un point du plan,.
Le cercle $\mathcal{C}$ est formé de tous les points qui sont à distance r du centre A (caractérisation géométrique) :

$$M \in \mathcal{C} \qquad \Leftrightarrow \qquad AM = r$$

Les coordonnées de $\overrightarrow{AM}$ sont $(x-c, y-d)$ donc $AM = \sqrt{(x-c)^2+(y-d)^2} = r$. On élève au carré, on développe et on met tout à gauche de l'équation (pour avoir au bout $=0$). on met les termes dans l'ordre suivant : x^2, y^2, x, y, ce qui donne une expression de ce style :

$$\boxed{x^2+y^2+\clubsuit x+\spadesuit y+\heartsuit=0}$$

C'est l'équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}$.

Exercice 7

Donner l'équation cartésienne du cercle de centre $\Omega(2,-1)$ et de rayon 4.

A l'inverse, une équation cartésienne de la forme $x^2+y^2-cx-dy+e=0$, représente un cercle ou l'ensemble vide.
Pour déterminer l'ensemble, on a besoin de La forme canonique d'un trinôme. On veut transformer une expression x^2+ax en identité remarquable de la forme $(x+\spadesuit)^2$. On pose $\spadesuit = \frac{a}{2}$, et on développe l'identité remarquable

$$\left(x+\frac{a}{2}\right)^2 = x^2+ax+\frac{a^2}{4} \quad \Leftrightarrow \quad \left(x+\frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} = x^2+ax$$

C'est la mise sous la forme canonique.

Exemples.

Technique. Trouver un cercle à partir d'une équation. Soit $\mathcal{C}$ un ensemble de points du plan d'équation $x^2+y^2-cx-dy+e=0$ qu'on cherche à identifier. On pense que c'est un cercle, et on voudrait son centre et son rayon. Soit $M(x,y)$ un point du plan.

$$M \in \mathcal{C} \Leftrightarrow x^2+y^2-cx-dy+e=0 \Leftrightarrow \underbrace{x^2-cx}+\underbrace{y^2-dy}+e=0$$

On fait deux fois la technique de la forme canonique (pour x et pour y) puis on regroupe toutes les constantes à droite. On obtient une expression du genre :

$$(x+\spadesuit)^2+(y+\heartsuit)^2 = C$$

On distingue deux cas :
— si $C<0$. C'est impossible que la somme de carrés soit négative donc $\mathcal{C}$ est l'ensemble vide $\emptyset$.
— si $C \geqslant 0$, on met une racine carré sur le total.

$$\sqrt{(x+\spadesuit)^2+(y+\heartsuit)^2} = \sqrt{C}$$

On reconnait la formule $AB = \sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2}$, avec le point $M(x,y)$ et un nouveau point qu'on doit définir :$\Omega(-\spadesuit, -\heartsuit)$. L'équation précédente devient alors

$$\Omega M = \sqrt{C}$$

Ce qui signifie que tous les points M vérifiant l'équation de $\mathcal{C}$ sont à distance fixe $\sqrt{C}$ du point Ω. Donc $\mathcal{C}$ est un cercle de centre Ω et de rayon $\sqrt{C}$.

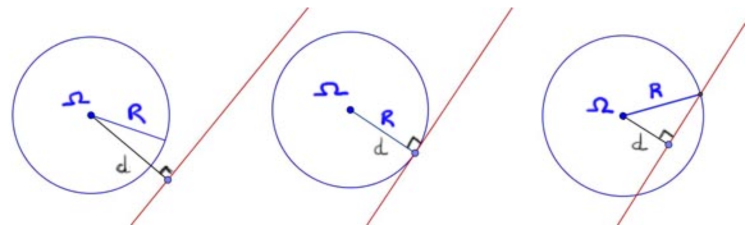
Exercice 8

Soit $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère orthonormal du plan. Reconnaître la partie du plan représentée par l'équation $x^2+y^2-6x+2y+4=k$ pour $k=3$ puis pour $k=-7$.

2.6 Intersection d'une droite et d'un cercle

Propriété 9.

L'intersection d'une droite $\mathcal{D}$ et d'un cercle $\mathcal{C}$ de centre Ω et de rayon R est
— l'ensemble vide si $\mathrm{d}(\Omega, \mathcal{D}) > R$.
— un point unique T si $\mathrm{d}(\Omega, \mathcal{D}) = R$, on dit alors que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{C}$ sont tangents en T,
— deux points distincts si $\mathrm{d}(\Omega, \mathcal{D}) < R$,



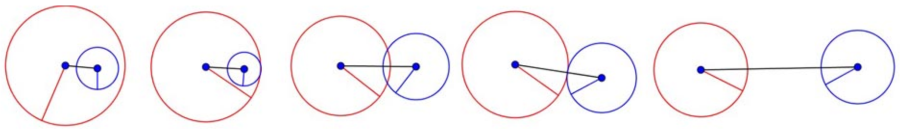
Remarque : Un système d'équation correspond à l'intersection des figures représentée par ces équations. Donc, si l'intersection est non vide, on détermine le ou les points d'intersection en résolvant le système contenant l'équation du cercle et celle de la droite.

2.7 Intersection de deux cercles

Propriété 10.

Les dessins suivants présentent les différentes positions relatives de deux cercles.
On peut préciser que deux cercles de rayons R et r et de centres Ω et ω ont une intersection non vide si, et seulement si,

$$|R-r| \leqslant \Omega\omega \leqslant R+r.$$



Technique. Soit $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ un repère orthonormal du plan. Soit $\mathcal{C} : x^2+y^2-cx-dy+e=0$ et $\mathcal{C}' : x^2+y^2-Cx-Dy+E=0$. On cherche leur intersection.

Soit $M(x,y)$ un point du plan. On a

$$M(x,y)\in\mathcal{C}\cap\mathcal{C}' \iff \begin{cases} x^2+y^2-cx-dy+e=0 & (L_1)\\ x^2+y^2-Cx-Dy+E=0 & (L_2)\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x^2+y^2-cx-dy+e=0 & \\ (c-C)x+(d-D)y+E-e=0. & (L_2\leftarrow \boxed{L_2-L_1})\end{cases}$$

On doit distinguer deux cas :
- Si $(c,d)=(C,D)$, alors L_2 devient $E-e=0$. Les deux cercles sont concentriques (même centre). Ils sont confondus s'ils ont le même rayon (dans ce cas $E=e$) et ont une intersection vide dans le cas contraire.
- Si $(c,d)\neq(C,D)$, les deux cercles ne sont pas concentriques. La deuxième équation est celle d'une droite $\mathcal{D}$. Cette droite est appelée l'axe radical des deux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$. Les points d'intersection de $\mathcal{C}$ sont les points d'intersection de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{C}$, que l'on sait déterminer.

Exercice 9

On rapporte le plan au repère orthonormal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Déterminer les éventuels points d'intersection de $\mathcal{C} : x^2+y^2-6y+4=0$ et $\mathcal{C}' : x^2+y^2+x-3y=0$.

2.8 Une caractérisation du cercle de diamètre $[AB]$

Propriété 11.

Soient A et B deux points distincts du plan.

L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$ est le cercle de diamètre $[AB]$.

Démonstration. Soit I le milieu du segment $[AB]$ et M un point du plan. On a

$$0=\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)\cdot\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)=MI^2+\overrightarrow{MI}\cdot\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}\right)+\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IB}$$

On a $\overrightarrow{IA}=-\overrightarrow{IB}$, donc le deuxième terme est nul. On calcule le troisième avec les normes et les angles :

$$\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IB}=\|\overrightarrow{IA}\|.\|\overrightarrow{IB}\|\cos(\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IB})=\left(\frac{1}{2}AB\right)\left(\frac{1}{2}AB\right)\times(-1)$$

On obtient alors :

$$0=MI^2-\left(\frac{1}{2}AB\right)^2 \iff MI=\frac{AB}{2}$$

Donc le point M est sur le cercle de centre I et de rayon $\frac{AB}{2}$, c'est à dire le cercle de diamètre $[AB]$.

Exercice 10

On rapporte le plan au repère orthonormal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Soit $A(1,2)$ et $B(-3,4)$.

Déterminer une équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[AB]$ de la forme $x^2+y^2-Cx-Dy+E=0$ sans calculer ni son centre, ni son rayon.

3 Equations dans l'espace

On se place dans un repère $\mathcal{R}(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ de l'espace.

3.1 Equations de plan

Caractérisation géométrique d'un plan $\mathcal{P}$:

1. Par trois points non alignés.
2. Par un point $A(x_A,y_A,z_A)$ et deux vecteurs directeurs $\vec{u}(\alpha,\beta,\gamma)$ et $\vec{v}(\alpha',\beta',\gamma')$. On dit aussi que $(\vec{u},\vec{v})$ est une base de la direction de $\mathcal{P}$.
3. Par un point $A(x_A,y_A,z_A)$ et un vecteur $\vec{n}$ normal au plan $\mathcal{P}$ (orthogonal au plan). Voir plus loin

Technique. Soit $M(x,y,z)$ un point.

$$M\in\mathcal{P} \qquad \iff \qquad \exists s,t\in\mathbb{R},\ \overrightarrow{AM}=t\vec{u}+s\vec{v}.$$

En passant aux coordonnées, on a

$$\begin{pmatrix}x-x_A\\ y-y_A\\ z-z_A\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}\alpha'\\ \beta'\\ \gamma'\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}x=x_A+\alpha t+\alpha' s\\ y=y_A+\beta t+\beta' s\\ z=z_A+\gamma t+\gamma' s\end{cases}\qquad ((t,s)\in\mathbb{R}^2).$$

C'est un paramètrage du plan $\mathcal{P}$.

A l'inverse, un tel paramétrage représente le plan contenant le point $A(x_A,y_A,z_A)$ et dirigé par les vecteurs $\vec{u}(\alpha,\beta,\gamma)$ et $\vec{v}(\alpha',\beta',\gamma')$ lorsque les triplets (α,β,γ) et (α',β',γ') ne sont pas proportionnels.

Exercice 11

Déterminer une représentation paramétrique du plan passant par le point $A(1,0,1)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u}(1,2,1)$ et $\vec{v}(0,1,-1)$).

Technique. Equation cartésienne d'un plan Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace. $M \in \mathcal{P}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v}$ sont coplanaires, c'est à dire si et seulement si

$$\det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v}) = 0$$

Puis on calcule le déterminant avec les coordonnées et on obtient une équation de la forme

$$ax+by+cz+d=0$$

C'est une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$.

A l'inverse, une équation $ax + by + cz + d = 0$ est celle d'un plan $\mathcal{P}$.

Exercice 12

L'espace $\mathcal{E}$ est rapporté à un repère orthonormal $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ passant par $A(1, -1, 2)$ et dirigé par les vecteurs $\overrightarrow{u}(2, 0, 1)$ et $\overrightarrow{v}(2, 1, 0)$.

Technique. On peut passer directement d'une équation cartésienne à une équation paramétrique et inversement :

1. Si on a une équation cartésienne, on la considère comme un système qu'on résout avec la méthode du pivot de Gauss. On obtient les solutions (donc le plan) exprimées sous forme paramétriques.
2. Si on a une représentation paramétrique, on peut en déduire un point du plan et deux vecteurs directeurs, et appliquer la technique avec le déterminant pour trouver l'équation cartésienne.

Définition 12.

On dit qu'un vecteur $\overrightarrow{n}$ est orthogonal (ou normal) à un plan $\mathcal{P}$ si, et seulement si, $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à tous les vecteurs de $\mathcal{P}$.

Dans un repère orthonormal,le plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$ admet $\overrightarrow{n}(a, b, c)$ pour vecteur normal.

Remarque : Si on connait $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs directeurs du plan non colinéaires, alors on peut prendre comme vecteur normal $\vec{n} = \vec{u} \wedge \vec{v}$.

Technique. On cherche une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ passant par le point A (connu) et de vecteur normal $\overrightarrow{n}$. Soit M un point :

$$M(x, y, z) \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$$

Puis on calcule le produit scalaire avec les coordonnées pour trouver l'équation cartésienne du plan.

Exercice 13

On munit l'espace d'un repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. On considère le plan $\mathcal{P}$ passant par les points $A(1, 0, -2)$, $B(0, 2, 1)$ et $C(-1, -1, 0)$. Calculer un vecteur normal au plan et en déduire une équation cartésienne de $\mathcal{P}$.

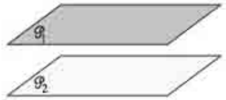
3.2 Propriétés des plans

Propriété 13.

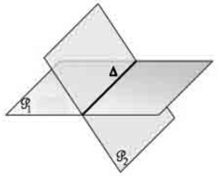
Soit un repère orthonormal direct $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, $\mathcal{P}$ un plan de l'espace d'équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$ et A un point de coordonnées (x_A, y_A, z_A). La distance de A à $\mathcal{P}$ est

$$\mathrm{d}(A, \mathcal{P}) = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Positions relatives de deux plans de l'espace



Plans parallèles (stricts ou confondus). Dans ce cas, les vecteurs normaux des deux plans sont colinéaires.



Plans sécants selon une droite. Les vecteurs normaux ne sont pas colinéaires.

3.3 Droites de l'espace

Rappel Dans l'espace aussi, une droite est la donnée d'un point $A(x_A, y_A, z_A)$ et d'un vecteur non nul $\overrightarrow{u}(\alpha, \beta, \gamma)$ ou, ce qui revient au même, de deux points distincts.

Technique. Equation paramétrique de droite On utilise la colinéarité :

$$M \in \mathcal{D} \quad \Longleftrightarrow \quad \exists t \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{u}.$$

En passant aux coordonnées, on a :

$$\begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_A + \alpha t \\ y = y_A + \beta t \\ z = z_A + \gamma t \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

C'est une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$.

Réciproquement, une telle représentation paramétrique représente la droite contenant le point $A(x_A, y_A, z_A)$ et dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}(\alpha, \beta, \gamma)$.

Exercice 14

Donner une représentation paramétrique de la droite passant par $A(0, -3, 2)$ et de vecteur directeur $\vec{v}$ de coordonnées $(1, 3, -2)$.

Système d'équations cartésiennes d'une droite. On a vu que deux plans sécants se coupait selon une droite. C'est la méthode pour trouver la représentation cartésienne d'une droite.

Soit $\mathcal{D}$ une droite de l'espace. On construit deux plans contenant la droite :

— On construit $\mathcal{P}_1$ un plan contenant un point de la droite et le vecteur directeur de la droite (ou deux points de la droite). Pour faire l'équation du plan, on rajoute un deuxième vecteur non colinéaire à celui de la droite. On obtient une équation $ax + by + cz + d = 0$.

— On construit $\mathcal{P}_2$ un autre plan, de la même manière. On obtient une équation $a'x + b'y + c'z + d' = 0$. Attention à ne pas obtenir deux fois le même plan !

Comme $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ contiennent tout les deux la droites $\mathcal{D}$, leur intersection est exactement $\mathcal{D}$. Donc l'équation de $\mathcal{D}$ est le système contenant les deux équations des plans :

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

Réciproquement, un tel système représente la droite définie comme l'intersection des deux plans d'équations cartésiennes $ax + by + cz + d = 0$ et $a'x + b'y + c'z + d' = 0$.

Remarque :

1. Une équation du type $ax + by + cz + d = 0$ représente un plan et jamais une droite. Une droite est toujours définie par un système de deux équations équations cartésiennes.

2. Le premier plan $ax + by + cz + d = 0$ a pour vecteur normal $\vec{n}(a, b, c)$, le deuxième plan $a'x + b'y + c'z + d' = 0$ a pour vecteur normal $\vec{n}'(a', b', c')$. On pose $\vec{u} = \vec{n} \wedge \vec{n}'$, c'est un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$.

Exercice 15

Soit $\mathcal{D}$ la droite définie par le système

$$\begin{cases} x + 2y - 3z + 1 = 0 \\ 2x - y + z + 2 = 0 \end{cases}.$$

Donner une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$.

3.4 Propriétés des droites dans l'espace

Propriété 14.

Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par le point A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$. Pour tout point M de l'espace, la distance de M à $\mathcal{D}$ est

$$\mathrm{d}(M, \mathcal{D}) = \frac{\|\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{u}\|}{\|\overrightarrow{u}\|}.$$

Positions relatives de deux droites de l'espace Soit $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites de l'espace, on a alors les cas suivants :

— $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles sans point commun ;

— $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles avec un point commun et alors elles sont confondues ;

— $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ont un unique point commun : elles sont alors sécantes.

— $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ n'ont pas de point commun et ne sont pas parallèles. Elles sont alors non coplanaires ;

Remarque : Si les droites sont parallèles, sécantes ou confondues, elles sont coplanaires.

Définition 15.

Deux droites sont dites orthogonales si leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux.

Deux droites sont dites perpendiculaires si elles sont orthogonales et sécantes.

3.5 Equation de sphères

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.

Définition 16.

Soit Ω un point de l'espace et $R \geqslant 0$. La sphère de centre Ω et de rayon R est l'ensemble des points de l'espace tels que $\Omega M = R$.

Technique. On veut établir l'équation de la sphère de centre $\Omega(x_\Omega, y_\Omega, z_\Omega)$ et de rayon R. Soit $M(x, y, z)$ un point quelconque de l'espace. M appartient à la sphère $\mathcal{S}$ si, et seulement si

$$\Omega M = R \Leftrightarrow \sqrt{(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 + (z - z_\Omega)^2} = R$$

On met au carré et on développe tout. On obtient une équation de la forme

$$x^2 + y^2 + z^2 - ax - by - cz + d = 0$$

C"est l'équation de la sphère.

Exercice 16

Déterminer l'équation de la sphère de centre $\Omega(0, 2, -2)$ et de rayon $\sqrt{6}$.

Inversement, à partir d'une équation $x^2+y^2+z^2-ax-by-cz+d=0$, il faut factoriser avec les formes canoniques (une pour x, une pour y, une pour z) pour savoir si c'est une sphère (même méthode que le cercle dans le plan).

Classe préparatoire ATS **mathématiques**

Fiche d'exercices 8 : Géometrie

Exercice 1

($\star$) Déterminer une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}$ passant par les points $A(1, 2)$ et $B(-1, 3)$. En déduire un vecteur normal à $\mathcal{D}$. Le point $C(3, 1)$ appartient-il à cette droite ?

Exercice 2

($\star$) Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ passant par le point $A(1, 1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(-2, 3)$. En déduire une équation cartésienne de Δ. Quelle est la distance du point $C(3, 1)$ à la droite Δ ?

Exercice 3

($\star$) Dans le plan rapporté à un r.o.n.d. $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on considère le point $A(1, 1)$ et le point $B(-3, 2)$. Déterminer une équation des droites (AB) et (OA).

Exercice 4

($\star\star$) Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O; \overrightarrow{\imath}; \overrightarrow{\jmath})$, on considère les points $A(-1, 1)$, $B(3, -1)$, $C(1, 4)$. Déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal de C sur la droite (AB).

Exercice 5

($\star\star$) Dans le plan muni d'un repère cartésien, déterminer l'intersection des droites $\mathcal{D}$ d'équation $2x + 5y - 10 = 0$ et $\mathcal{D}'$ passant par $A(-1, 2)$ et dirigée par $\overrightarrow{u}(3, 2)$.

Exercice 6

($\star\star$) On considère un triangle ABC, le milieu E du segment $[BC]$ et le milieu F de $[AE]$. Les droites (BF) et (AC) se coupent en G.

1. Calculer les coordonnées, dans le repère $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$, des points E, F et G.
2. En déduire le nombre réel t tel que $\overrightarrow{AG} = t\overrightarrow{AC}$.

Exercice 7

($\star\star$) Les bissectrices de deux droites représentent l'ensemble des points équidistants de ces deux droites. Soit D et D' d'équations respectives $3x - 4y + 4 = 0$ et $12x + 5y - 5 = 0$.
Déterminer une équation cartésienne de chacune de leurs bissectrices.Quelle remarque pouvez-vous faire sur ces bissectrices ?

Exercice 8

($\star\star$) Soit ABC un triangle. Déterminer, dans le repère $\mathcal{R} = \left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ des équations cartésiennes des médianes du triangle et retrouver que ces trois médianes sont concourantes.

Exercice 9

($\star$) Soit $(O; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ un repère orthonormal du plan. Déterminer une équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}$ de centre $\Omega(1, -5)$ et de rayon $\sqrt{5}$.

Exercice 10

($\star\star$) Dans le repère orthonormal $(O; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$, donner une équation cartésienne du cercle passant par O, $A(3, 0)$ et $B(1, 1)$.

Exercice 11

($\star\star\star$) Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on note $\mathcal{C}$ le cercle d'équation $x^2 - 2x + y^2 = 0$. Soit A le point de coordonnées $(4, 0)$. Déterminer les équations des tangentes à $\mathcal{C}$ passant par A.

Exercice 12

($\star\star$) On rapporte le plan au repère orthonormal $(O; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$. Déterminer les éventuels points d'intersection de $\mathcal{D} : x + 3y - 4 = 0$ et $\mathcal{C}_k : x^2 + y^2 - 6y + k = 0$ pour $k = 4$, $k = 13/2$ et $k = 14$.

Exercice 13

($\star\star\star$) Soit un point A et une droite $\mathcal{D}$ passant par A. à tout point M du plan, on associe son projeté orthogonal H sur la droite $\mathcal{D}$. Choisir un repère orthonormal du plan pour déterminer analytiquement l'ensemble des points M tels que $MA^2 = 2MH$.

Exercice 14

($\star\star\star$) Le plan est rapporté à un repère $R = (O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Soit E l'ensemble des points de coordonnées (x, y) dans le repère R tels que

$$x^2 - xy - 2y^2 + 4x - 2y + 4 = 0.$$

1. Déterminer les coordonnées des points communs à E et aux axes du repère. On note A l'intersection de E avec l'axe des abscisses, B et C les intersections de E avec l'axe des ordonnées.
2. On pose le repère $R' = (A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$. Etablir les équations de changements de repère.
3. Déterminer l'équation cartésienne de E dans le repère R' et en déduire l'ensemble (E).

Exercice 15

($\star\star$) L'espace est rapporté au repère $\mathcal{R} = (O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. On note $\mathcal{B}$ la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.

1. Donner une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}_1$ dont une représentation paramétrique est
$$\begin{cases} x &= 1 + t + s \\ y &= 1 - t + s \\ z &= 0 + 2t - s \end{cases}$$
2. Donner une représentation paramétrique du plan $\mathcal{P}_2$ d'équation cartésienne $x + y - z + 1 = 0$.

Exercice 16

($\star$) Soit $\mathcal{D}$ la droite admettant pour système d'équations cartésiennes $\begin{cases} x - y - z = 1 \\ 2x + z = 2 \end{cases}$. Déterminer une représentation paramétrique de cette droite. Donner un point appartenant à cette droite et un vecteur directeur.

Exercice 17

($\star\star$) L'espace $\mathcal{E}$ est rapporté à un repère orthonormal $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.

1. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}'$ passant par les trois points $A(-1, 1, 1)$, $B(1, -1, 1)$ et $C(1, 1, -1)$.
2. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}''$ passant par $A(-1, 1, 1)$ et normal au vecteur $\overrightarrow{u}(2, -1, -1)$.

Exercice 18

($\star\star$) L'espace $\mathcal{E}$ est rapporté à un repère orthonormal $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.

1. Trouver un paramétrage du plan P d'équation cartésienne $2x - y + 3z - 1 = 0$. Donner une base de la direction de P (des vecteurs directeurs).
2. Trouver un paramétrage puis un vecteur directeur de la droite D donnée par le système d'équations cartésiennes $\begin{cases} 2x + y - 4z = 6 \\ x - y + 3z = 2. \end{cases}$

Exercice 19

($\star\star$) L'espace $\mathcal{E}$ est rapporté à un repère orthonormal $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. Soit $A(1, 1, 0)$, $B(1, -1, 0)$ et $C(0, 1, -2)$ trois points de $\mathcal{E}$.

1. Déterminer une équation du plan (ABC).
2. Déterminer une équation du plan parallèle au plan (ABC) passant par le point $D(1, 1, 1)$.
3. Déterminer deux plans dont l'intersection est la droite (AB) et en déduire une représentation cartésienne de (AB).

Exercice 20

($\star\star$) L'espace $\mathcal{E}$ est rapporté à un repère orthonormal $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.
Soit $\mathcal{D}$ l'intersection des plans d'équations $x = 2z + 1$ et $y = z - 1$.
Soit $\mathcal{D}'$ l'intersection des plans d'équations $x = z + 2$ et $y = 3z - 3$.
Montrer que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont coplanaires et déterminer une équation cartésienne du plan les contenant.

Exercice 21

($\star\star$) L'espace $\mathcal{E}$ est rapporté à un repère orthonormal $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.

1. Déterminer la distance du point $A(1, -2, 3)$ au plan d'équation $\mathcal{P} : 2x + 3y - 4z = 6$.
2. Calculer la distance du point $B(1, 1, 1)$ au plan $\mathcal{Q}$ représentépar le paramétrage

$$\begin{cases} x = 2 + \lambda + \mu \\ y = 3 - \lambda + 2\mu \\ z = 1 + 2\lambda + \mu \end{cases} \qquad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Exercice 22

($\star\star$) L'espace $\mathcal{E}$ est rapporté à un repère orthonormal $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.

1. Déterminer la distance du point $A(1,-2,3)$ à la droite $\mathcal{D}$ passant par $B(0,1,2)$ et dirigée par $\overrightarrow{u}(4,3,1)$.
2. Calculer la distance du point $B(1,0,-1)$ à la droite $\mathcal{D}'$ donnée par le système d'équations cartésiennes $\begin{cases} x+y+z=2 \\ -x+2y+z=0. \end{cases}$

Exercice 23

($\star\star\star$) L'espace $\mathcal{E}$ est rapporté à un repère orthonormal $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.On considère la droite $\mathcal{D}$ passant par l'origine, de vecteur directeur $\overrightarrow{u} = (3,2,4)$ et la droite $\mathcal{D}'$ passant par le point $A = (1,0,2)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{v} = (0,1,1)$.

1. Montrer que ces deux droites ne sont pas coplanaires.
2. Déterminer les points M de $\mathcal{D}$ et N de $\mathcal{D}'$ tels que la droite (MN) soit perpendiculaire à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ à la fois.

Exercice 24

($\star\star\star$) L'espace $\mathcal{E}$ est muni d'un repère orthonormal $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. On considère les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ d'équations respectives :

$$\mathcal{D} : \begin{cases} x+y+z=0 \\ x-y-z=0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{D}' : \begin{cases} x+2y+z=2 \\ x-2y-z=2 \end{cases}$$

On veut construire une droite Δ qui soit perpendiculaire à la fois à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.

1. Déterminer un point et un vecteur directeur $\vec{u}$ de $\mathcal{D}$. Déterminer un point et un vecteur directeur $\vec{v}$ de $\mathcal{D}'$.
2. Calculer $\vec{n} = \vec{u} \wedge \vec{v}$. C'est le vecteur directeur de la droite Δ. Justifier pourquoi.
3. En déduire un sytème d'équation de Δ

Exercice 25

($\star\star$) L'espace $\mathcal{E}$ est muni d'un repère orthonormal $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. Déterminer une équation de la sphère $\mathcal{S}$ de centre $\Omega(1,0,1)$ et tangente au plan $\mathcal{P}$ d'équation $x+y+z=1$.
Indice. Si la sphère est tangente à un plan, alors la distance entre le centre de la sphère et le plan est .... ?

Exercice 26

($\star\star$) L'espace $\mathcal{E}$ est muni d'un repère orthonormal $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation $x-2y+z-2=0$. On considère l'ensemble $\mathcal{S}$ des points $M(x,y,z)$ tels que

$$x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-11=0.$$

1. Montrer que $\mathcal{S}$ est une sphère de centre Ω et de rayon R.
2. Calculer la distance de Ω à $\mathcal{P}$. Que peut-on en déduire sur l'intersection du plan $\mathcal{P}$ et de la sphère $\mathcal{S}$?
3. On admet que l'intersection d'un plan et d'une sphère est un cercle $\mathcal{C}$. Son centre est le projeté orthogonal de Ω sur $\mathcal{P}$, déterminer ses coordonnées.
4. Calculer le rayon du cercle $\mathcal{C}$.

Exercice 27

($\star\star$) L'espace est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soient $\mathcal{S}$ l'ensemble des points $M(x,y,z)$ tels que $x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z+1=0$ et $\mathcal{P}_1$ le plan d'équation $y+z=4$.

1. Montrer que $\mathcal{S}$ est une sphère dont on précisera le centre et le rayon.
2. Montrer que $\mathcal{P}_1$ est tangent à $\mathcal{S}$, puis donner les coordonnées du point de tangence de $\mathcal{S}$ et $\mathcal{P}_1$
3. Vérifier que le plan $\mathcal{P}_2$ d'équation $y+z=0$ est parallèle à $\mathcal{P}_1$ et tangent à $\mathcal{S}$.