7. Etude de fonctions

Pour étudier une fonction, il faut commencer par déterminer son ensemble de définition E (et son ensemble de dérivation). Ensuite, on étudie sa périodicité, sa parité ou autre type de symétrie, sa dérivée et son tableau de variation, ses limites, ses tangentes et ses asymptotes. Puis, à l'aide de toutes ces informations, on trace l'allure de la fonction.

1 Ensemble de définition

Si l'ensemble de départ de la fonction à étudier n'est pas donné dans l'énoncé, il faut le déterminer. On parle alors d'ensemble de définition, car on cherche toutes les valeurs de x pour lesquelles $f(x)$ est définie.

Phrases type de rédaction « $f(x)$ est définie pour $x \in E$ » avec E un ensemble. On peut aussi exprimer l'ensemble de définition par une inégalité simple en x : « $f(x)$ est définie si $x \geqslant a$ » ; « $f(x)$ est définie si $x < a$ » ; « $f(x)$ est définie si $b \leqslant x \leqslant a$ »..... S'il y a plusieurs fonctions en addition, soustraction, multiplication on cherche tout les domaines de définition séparément, et ensuite on fait l'intersection de tout les domaines. C'est à dire qu'on cherche à ce que toutes les conditions sur x soient remplies en même temps.

S'il y a des composées Une composée est une fonction imbriquée dans une autre $g(f(x))$. On fait plusieurs étapes :

1. On fait le domaine de la fonction intérieure seule : « $f(x)$ est définie si $x \in D_f$ »
2. On fait le domaine de la fonction extérieure seule en remplaçant $f(x)$ par y : « $g(y)$ est définie si $y \in E$ ». Mais attention, ce domaine E n'est pas valable pour x !
3. Dans la condition $y \in E$, on remplace y par $f(x)$. On obtient une condition $f(x) \in E$ qu'il faut résoudre!! C'est-à-dire qu'il faut trouver les valeurs de x pour lesquelles $f(x) \in E$. ça donne D_g le domaine de g pour x.
4. On fait l'intersection $D_f \cap D_g$. C'est le domaine de définition de $g(f(x))$.

Et si il y a plusieurs niveaux de composée, on fait toute les fonctions les une après les autres en partant de celle qui est la plus à l'intérieur et en remontant progressivement.

Exemple. Trouver l'ensemble de définition de $h(x) = \sqrt{1-x}$.

— On commence par la fonction à l'intérieur, c'est à dire $1-x$. $1-x$ est défini pour tout $x \in \mathbb{R}$.

— Ensuite s'occupe de la fonction à l'extérieur en remplaçant $1-x$ par y : $\sqrt{y}$ est défini si $y \in \mathbb{R}^+$, c'est-à-dire si $y \geqslant 0$.

— On remplace y par $1-x$ et on obtient $1-x \geqslant 0$. On résout et on a $1 \geqslant x$.

— On fait le bilan : on doit avoir $x \in \mathbb{R}$ et $1 \geqslant x$. Donc mon ensemble de définition est $]-\infty, 1]$.

Exercice 1

Déterminer l'ensemble de définition de la foncton $f(x) = \ln(2+x)$.

Ensemble de dérivation. L'ensemble de dérivation, ou ensemble sur lequel f est dérivable, doit être déterminé avant de dériver (jamais après!!). Car l'ensemble de dérivation donne l'autorisation de dériver! ça se rédige exactement comme un ensemble de définition, en remplaçant « défini » par « dérivable ».

Pour la plupart des fonctions, ce sont les mêmes ensembles de définition et de dérivation, donc on fait les deux à la fois en écrivant « défini et dérivable ». Mais attention, il y a des exceptions : la racine carrée, la valeur absolue, l'arcsinus et l'arccosinus par exemple.

Exemple. Trouver l'ensemble de dérivation de $h(x) = \sqrt{1-x}$.

— On commence par la fonction à l'intérieur, c'est à dire $1-x$. $1-x$ est dérivable pour tout $x \in \mathbb{R}$.

— Ensuite s'occupe de la fonction à l'extérieur en remplaçant $1-x$ par y : $\sqrt{y}$ est dérivable si $y \in \mathbb{R}^{+*}$, c'est-à-dire si $y > 0$.

— On remplace y par $1-x$ et on obtient $1-x > 0$. On résout et on a $1 > x$.

— On fait le bilan : on doit avoir $x \in \mathbb{R}$ et $1 > x$. Donc mon ensemble de dérivation est $]-\infty, 1[$.

A noter L'ensemble de dérivation est soit égal à l'ensemble de définition, soit plus petit. Il ne peut pas être plus grand!

2 Limites

Le cadre. Dans cette section, D désigne une partie de $\mathbb{R}$ de la forme I ou $I \backslash \{d\}$ où I est un intervalle qui n'est pas un singleton et d un point de I.

— Si $D = I$, on appellera bords de D les extrémités (dans $\overline{\mathbb{R}}$) de l'intervalle I.

— Si $D = I \backslash \{d\}$, où I est un intervalle d'extrémités b et c, les bords de D sont d, b et c (éléments de $\overline{\mathbb{R}}$).

On considérera des fonctions réelles f, g, h... définie sur D.

Exemple. Les bords de $[-2, 3[\cup]3, +\infty[$ sont -2, 3 et $+\infty$.

Définition.

On dit que f possède une propriété au voisinage de a si f possède cette propriété sur $V \cap D$ où V est
- — un intervalle ouvert contenant a si $a \in \mathbb{R}$
- — un intervalle de la forme $]c; +\infty[$ si $a = +\infty$
- — $]-\infty; c[$ si $a = -\infty$ (où $c \in \mathbb{R}$).

On parle de propriété locale de la fonction f, ou propriété valable localement.

Exemple. La fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{x}$ est minorée par 1 au voisinage de $1/2$ et bornée au voisinage de $+\infty$.

2.1 Première définition des limites

On note $a \in \overline{\mathbb{R}}$ (c'est à dire un réel ou un infini) un point ou un bord de D. On s'intéresse aux limites de f en a.

- — Soit ℓ un réel. Si pour tout $\epsilon > 0$, on peut trouver un voisinage de a tel que $f(x) \in]\ell - \epsilon, \ell + \epsilon[$ dans ce voisinage, alors on dit que f tend vers ℓ en a (ou que f a pour limite ℓ). On note

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell$$

- — si pour tout $A \in \mathbb{R}$, il existe un voisinage de a tel que $f \geqslant A$ dans ce voisinage, alors on dit que f tend vers $+\infty$ en a. On note

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

- — si pour tout $A \in \mathbb{R}$, il existe un voisinage de a tel que $f \leqslant A$ dans ce voisinage, alors on dit que f tend vers $-\infty$ en a. On note

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

Si elle existe, la limite en a de f est unique.

2.2 Limites, calculs simples

Opérations sur les limites : Pour établir les limites d'une fonctions en un point ou en l'infini, on se base sur des limites connues (voir les fonctions basiques), sur des règles d'opérations entre limites (voir tableaux), et sur des techniques complémentaires quand la méthode basique ne marche pas.
Dans ces tableaux, ℓ et ℓ' sont deux réels.

lim(1)	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
lim(2)	ℓ'	ℓ'	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
lim(1) + lim(2)	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	indéterminée

Exercice 2

$$\lim_{x \to 2} x^2 + 5x =, \qquad \lim_{x \to 0} = \ln(x) - 4x^2 =$$

lim(1)	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
lim(2)	ℓ'	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
lim(1) × lim(2)	$\ell\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	indéterminée	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Exercice 3

$$\lim_{x \to 0} e^x \ln(x) =, \qquad \lim_{x \to +\infty} e^x \ln(x) =$$

Définition 2.

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0^+$ signifie $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ et $f \geqslant 0$ au voisinage de a.

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0^-$ signifie $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ et $f \leqslant 0$ au voisinage de a.

Exemple. Soit la fonction $f(x) = (x-2)^2$. Quand $x \to 2$, on a $f(x) \to 0$, et on sait que $f(x) \geqslant 0$ au voisinage de 2 (et partout, en fait, à cause du carré), donc on peut dire que $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 0^+$.

lim(1)	ℓ	$\ell > 0$ ou $+\infty$	$\ell > 0$ ou $+\infty$	$\ell < 0$ ou $-\infty$	$\ell < 0$ ou $-\infty$	ℓ ou 0	0
lim(2)	$\ell' \neq 0$	0^+	0^-	0^+	0^-	$+\infty$ ou $-\infty$	0
$\frac{\text{lim(1)}}{\text{lim(2)}}$	$\frac{\ell}{\ell'}$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0	indét.

lim(1)	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
lim(2)	$\ell'>0$	$\ell'<0$	$\ell'>0$	$\ell'<0$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\frac{\lim(1)}{\lim(2)}$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	indét.

Exercice 4

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3}{\ln x} = \qquad \lim_{x\to 2} \frac{x-3}{(x-2)^2} =$$

Dans tous les cas indéterminés, on peut avoir une limite finie ou infinie ou pas de limite. Pour trouver la limite dans les cas particuliers il faut lever l'indétermination, c'est-à-dire transformer l'expression pour ne plus avoir de forme indéterminée.

On a de plus le résultat suivant qui permet de passer à la limites « dans » une fonction.

Propriété 3.

Soit f et g deux fonctions définies respectivement sur D_f et D_g telles que $f(D_f) \subset D_g$. Soit a un élément ou un bord de D_f et b un élément ou un bord de D_g.
Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ et $\lim\limits_{y\to b} g(y) = \ell$ où $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, alors

$$\lim_{x\to a} g(f(x)) = \ell.$$

Exemple. On a $\forall x \in]0,+\infty[$, $x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\sin(1/x)}{1/x} = g(f(x))$ avec $f(x) = \frac{1}{x}$ et $g(y) = \frac{\sin y}{y}$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{y\to 0} g(y) = 1$, on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 1$.

Propriété.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans D. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ où $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, et si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers a, alors la suite $\big(f(u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers ℓ.

Technique. On utilise souvent la contraposée de cette implication pour montrer qu'une fonction n'admet pas de limite en a : pour montrer qu'une fonction n'a pas de limite en $a \in \overline{\mathbb{R}}$, il suffit de trouver deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers a telles que les suites $\big(f(u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\big(f(v_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ n'ont pas la même limite.

Exemple. La fonction sinus n'admet pas de limite en $+\infty$. En effet, les suites $(n\pi)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(2n\pi+\pi/2)_{n\in\mathbb{N}}$ tendent vers $+\infty$, mais la suite $\big(\sin(n\pi)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 (puisqu'elle est nulle) et la suite $\big(\sin(2n\pi+\pi/2)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 1 (puisqu'elle est constante égale à 1).

2.3 La technique du terme dominant

Situation : on calcule une limite en $x\to\infty$ et on obtient une forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$ (ou alors $\infty-\infty$).

1. Au numérateur, on cherche le terme dominant, c'est-à-dire celui qui va le plus vite à l'infini (Une exponentielle monte plus vite qu'une puissance, qui monte plus vite qu'un ln. Et entre deux puissances, c'est la puissance la plus grande) . On factorise toute l'expression par ce terme dominant (la totalité du terme dominant, il doit ne rester que 1 à sa place après factorisation !!).
2. Au dénominateur, on fait de même. Mais attention, ce n'est pas forcément le même terme dominant qu'au numérateur.
3. Ensuite on simplifie les termes factorisés et on calcule chacune des limites. Normalement, la forme indéterminée a disparu. Sinon, il faudra essayer autre chose...

Cette technique sert aussi à établir les équivalents.

Exemple. Calculer la limite en $+\infty$ de $f(x) = \frac{x^2\ln x + x - \ln x}{x^3 + x\ln x}$.

Remarque : Cette technique ne s'emploie jamais quand x tend vers un nombre, sauf éventuellement pour $x\to 0$, et dans ce cas on cherche les termes qui tendent le plus vite vers 0 (les puissances les plus petites !).

Changer pour 0. On veut calculer une limite pour $x\to a$. On peut si besoin se ramener à une limite en 0 en posant $x = a+h$. On a alors $f(x) = f(a+h)$ que l'on modifie et on fait tendre h vers 0.

2.4 Limites et inégalités

Théorème 5. (passage à la limite dans une inégalité)

Soit $f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ **admettant une limite** (finie ou non) en a. Si $f \leqslant g$ au voisinage de a, alors

$$\lim_{x\to a} f(x) \leqslant \lim_{x\to a} g(x).$$

Remarque : Le résultat précédent est faux avec des inégalités strictes : si $f < g$ au voisinage de a, on a nécessairement $\lim\limits_{x\to a} f(x) \leqslant \lim\limits_{x\to a} g(x)$ mais pas nécessairement $\lim\limits_{x\to a} f(x) < \lim\limits_{x\to a} g(x)$.

Théorème 6. (des gendarmes)

Soit $f, g, h \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ trois fonctions réelles telles que, au voisinage de a, on ait $f \leqslant g \leqslant h$.
Si f et h admettent la même limite finie ℓ en a, alors g tend vers ℓ en a.

Remarque : On notera, qu'au contraire du théorème de passage à la limite dans une inégalité, le théorème des gendarmes fournit à la fois l'existence de la limite d'une fonction et la valeur de cette limite.

Exemple. Montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{x^2 + \sin\sqrt{x}}{2x^2+1}$ admet une limite ℓ en $+\infty$. Préciser la valeur de ℓ.

Corollaire 7.

Soit $f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ telles que $|f| \leqslant g$ au voisinage de a. Si $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$.

Théorème 8. (du gendarme)

Soit $f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ deux fonctions réelles telles que $f \leqslant g$ au voisinage de a.

(i) Si f tend vers $+\infty$ en a, alors g tend aussi vers $+\infty$ en a ;

(ii) Si g tend vers $-\infty$ en a, alors f tend aussi vers $-\infty$ en a.

2.5 Fonction négligeable devant une autre

Dans tout ce paragraphe, les fonctions considérées sont définies sur D à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $a \in \overline{\mathbb{R}}$ désigne un point ou un bord de D.

Définition.

On dit que f est négligeable devant g au voisinage de a si et seulement si

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

On écrit alors $f(x) = \underset{x\to a}{o}\big(g(x)\big)$ ou $f = o_a(g)$. On dit que « f est un *petit* o de g au voisinage de a ».

C'est le vocabulaire mathématiques propre pour dire qu'une fonction l'emporte sur une autre. Au lieu de dire « l'exponentielle l'emporte sur la puissance en $+\infty$ », on dit « La puissance est négligeable devant l'exponentielle en $+\infty$ ». ça permet de justifier les limites dans certains cas de formes indéterminées entre exp, ln et x^n.

2.6 Fonction équivalente à une autre

Définition 10.

On dit que f est équivalente à g au voisinage de a lorsque

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

On écrit alors $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ ou $f \underset{a}{\sim} g$.

Exemple. $\sqrt{x^2+1} \underset{x\to+\infty}{\sim} x$ car $\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$ tend vers 1 quand $x \to +\infty$.

Remarque : Si f est équivalente à g au voisinage de a, alors g est équivalente à f au voisinage de a. C'est pourquoi l'on dit aussi que f et g sont équivalentes, sans précision d'ordre.

Exemple. Une fonction polynôme est équivalente à son terme de plus haut degré en $\pm\infty$, et à son terme de plus petit degré en 0.

$$3x^4 + 6x^3 - 3x^2 + 9x - 29 \sim_{x\to\infty} 3x^4, \qquad 3x^4 + 6x^3 - 3x^2 + 9x - 29 \sim_{x\to 0} -29$$

Exercice 5

Pour $x > 0$, on pose

$$f(x) = \frac{1}{2x}, \qquad g(x) = \frac{2}{x}, \qquad h(x) = \frac{1}{4x^2}$$

1. Calculer la limite quand $x \to +\infty$ de $\frac{f}{g}$ et $\frac{h}{g}$.
2. Les fonction f et g sont-elles équivalentes ?
3. Entre g et h, laquelle est négligeable devant l'autre ?

Propriété 11.

Soit $\ell \in \mathbb{R}^*$ (non nul)

$$f \underset{a}{\sim} \ell \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{x\to a} f = \ell$$

Exemple. $\cos x$ a pour limite $\cos 0 = 1$ quand $x \to 0$, donc $\cos x \underset{x\to 0}{\sim} 1$.

Remarque : Mais il faut faire attention car les seules fonctions équivalentes à la fonction nulle en a sont les fonctions qui sont nulles au voisinage de a. Donc **il ne faut jamais écrire** $f \underset{a}{\sim} 0$ même si f tend vers 0.

Application Une fonction est équivalente à son terme dominant.

On cherche un équivalent de l'expression suivantes en $+\infty$

$$\frac{5\ln x+3x^2-7xe^x}{9x^4+5\sqrt{x}} = \frac{-7xe^x\left(\frac{5\ln x}{-7xe^x}+\frac{3x^2}{-7xe^x}+1\right)}{9x^4\left(1+\frac{5\sqrt{x}}{9x^4}\right)} = \frac{-7e^x}{9x^3}\frac{\left(\frac{5\ln x}{-7xe^x}+\frac{3x}{-7e^x}+1\right)}{\left(1+\frac{5}{9x^3\sqrt{x}}\right)}$$

Or $\frac{5\ln x}{-7xe^x}$, $\frac{3x}{-7e^x}$ et $\frac{5}{9x^3\sqrt{x}}$ tendent vers 0 par croissance comparée. Donc

$$\frac{\left(\frac{5\ln x}{-7xe^x}+\frac{3x}{-7e^x}+1\right)}{\left(1+\frac{5}{9x^3\sqrt{x}}\right)} \to 1 \sim 1, \qquad \frac{5\ln x+3x^2-7xe^x}{9x^4+5\sqrt{x}} \sim \frac{-7e^x}{9x^3}$$

Propriété 12.

Soit f et g deux fonctions équivalentes au voisinage de a. Si g admet une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ en a, alors f admet la même limite ℓ en a.

Donc, pour calculer une limite compliquée, on peut chercher un équivalent plus simple et calculer la limite à partir de l'équivalent !

Exemple. $\frac{5\ln x+3x^2-7xe^x}{9x^4+5\sqrt{x}} \sim \frac{-7e^x}{9x^3}$ au voisinage de $+\infty$. Par croissance comparée, $\lim_{x\to+\infty}\frac{-7e^x}{9x^3} = -\infty$, donc $\lim_{x\to+\infty}\frac{5\ln x+3x^2-7xe^x}{9x^4+5\sqrt{x}} = -\infty$

Propriété 13. (Equivalent pour une fonction dérivable)

Si f est dérivable en a et si $f'(a)\neq 0$, alors

$$f(x)-f(a) \underset{x\to a}{\sim} f'(a)(x-a)$$

Exemple. on cherche un équivalent de $f(x)=\ln(5x+4)-\ln(19)$ pour x au voisinage de 3. Or on a $f(3)=\ln(19)-\ln(19)$ et $f'(x)=\frac{5}{5x+4}$ donc $f'(3)=\frac{5}{19}\neq 0$. Donc $\ln(5x+4)-\ln(19)-0 \sim_3 \frac{5}{19}(x-3)$.

Exercice 6

Déterminer un équivalent de $f : x\mapsto \tan(x)-\sqrt{3}$ en $\frac{\pi}{3}$

Propriété 14. Formules à savoir

X est une quantité tendant vers 0. Alors

$$\sin(X) \underset{X\to 0}{\sim} X \qquad \tan(X) \underset{X\to 0}{\sim} X \qquad \ln(1+X) \underset{X\to 0}{\sim} X$$

$$\mathrm{e}^X - 1 \underset{X\to 0}{\sim} X \qquad (1+X)^\alpha - 1 \underset{X\to 0}{\sim} \alpha X$$

$$1-\cos(X) \underset{X\to 0}{\sim} \frac{X^2}{2}$$

Exemples. $\ln(1+x)\sim x$ quand $x\to 0$.
$1-\cos(2x)\sim(2x)^2$ quand $x\to 0$.
$\tan(\ln(3x-2))\sim\ln(3x-2)$ quand $x\to 1$ (car $X=\ln(3x-2)$ tend vers $\ln 1 = 0$!)

Remarque : On utilise ces formules là dans la plupart des cas... y compris pour des équivalents de fonction quand x ne tend pas vers 0 :

- si on a $x\to a$ un nombre, alors on pose $x=a+h$ avec $h\to 0$.
- si on a $x\to+\infty$, alors on pose $x=\frac{1}{h}$ avec $h\to 0^+$.
- si on a $x\to-\infty$, alors on pose $x=\frac{1}{h}$ avec $h\to 0^-$.

puis on remplace dans la fonction et on essaye de transformer la fonction afin d'utiliser les équivalents pour $h\to 0$.

Exemple. On veut calculer un équivalent de $f(x)=\sin(2x)$ quand $x\to\frac{\pi}{2}$. On pose $x=\frac{\pi}{2}+h$ avec $h\to 0$. On a alors

$$f(x)=\sin\left(2\left(\frac{\pi}{2}+h\right)\right)=\sin(\pi+2h)=-\sin(2h)\sim_{h\to 0}-2h$$

On revient à x au voisinage de $\frac{\pi}{2}$:

$$f(x) \underset{x\to\frac{\pi}{2}}{\sim} -2(x-\frac{\pi}{2}) \underset{x\to\frac{\pi}{2}}{\sim} -2x+\pi$$

Propriété 15. (Opérations autorisées)

Si $f\underset{a}{\sim}h$ et $g\underset{a}{\sim}u$, alors

$$fg\underset{a}{\sim}hu, \qquad \frac{f}{g}\underset{a}{\sim}\frac{h}{u} \quad (\text{ si } g(a)\neq 0, u(a)\neq 0)$$

Si on a un équivalent en a : $f(y)\underset{y\to a}{\sim}g(y)$ et une fonction $h(x)$ qui tend vers a quand $x\to b$, alors

$$f(h(x))\underset{x\to b}{\sim}g(h(x))$$

On ne peux rien additionner ou soustraire à des équivalents. On ne peut pas appliquer une fonction sur un équivalent. Les seules opérations autorisées sont la multiplication, la division et remplacer la variable par une fonction dans un équivalent.

Exemple. $1-x\underset{x\to+\infty}{\sim}2-x$ car

$$\frac{1-x}{2-x}=\frac{x(1/x-1)}{x(2/x-1)}=\frac{1/x-1}{2/x-1}\to 1, \quad x\to+\infty$$

Mais $(1-x)+x=1$ n'est pas équivalent à $(2-x)+x=2$.

Exercice 7

Montrer que

$$x^2+x\underset{x\to+\infty}{\sim}x^2$$

Puis montrer que e^{x^2+x} n'est pas équivalent à e^{x^2}

2.7 Limites : étude détaillée d'un point spécial ($\star\star\star$)

Il peut arriver qu'en un point particulier, le calcul de la limite se complique car le comportement de f de chaque coté du point considéré est différent. Dans ce cas, on fait une étude fine du comportement de f en ce point uniquement par la différenciation de la limite à gauche et de la limite à droite.

Définition.

Soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

— On dit que f admet ℓ pour limite à droite en a lorsque la restriction de f à $]a, +\infty[\cap D$ admet ℓ pour limite en a. On note alors $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ ou $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$.

— On dit que f admet ℓ pour limite à gauche en a lorsque la restriction de f à $]-\infty; a[\cap D$ admet ℓ pour limite en a. On note alors $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ ou $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x)$.

Remarque : Dans la définition précédente, les intervalles $]a; +\infty[$ et $]-\infty; a[$ sont ouverts en a. Autrement dit, la valeur de f en a n'intervient pas.

Exemple. En tout nombre entier $m \in \mathbb{Z}$, la fonction partie entière admet une limite à gauche égale à $m-1$ et une limite à droite égale à m.

Propriété.

1. Si f admet une limite ℓ en a alors f admet une limite à droite et à gauche en a égales à ℓ (si f est définie à gauche et à droite de a bien sûr).
2. Si $a \in D$ et si f possède une limite à gauche en a ou une limite à droite en a distincte de $f(a)$, alors f n'admet pas de limite en a.
3. Si $a \in D$ et si f possède une limite à gauche et une limite à droite en a telles que
$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$
alors f tend vers $f(a)$ en a.
4. Si $a \notin D$ et si f possède une limite à droite et une limite à gauche en a toutes deux égales à ℓ alors f tend vers ℓ en a.

Exemple. Étudier les limites à gauche et à droite en 0 de la fonction $f : x \mapsto \lfloor -|x| \rfloor$. La fonction f admet-elle une limite en 0 ?

3 Continuité

3.1 en un point et sur un domaine

Définition 18.

Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle I. Soit a un élément de I. La fonction f est dite continue en a si et seulement si elle admet une limite finie en a, qui est alors nécessairement égale à $f(a)$.

Dans le cas contraire, on dit que f est discontinue en a.

Exemple.

— $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue en 0 puisque $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x} = 0 = \sqrt{0}$.

— La fonction partie entière n'est pas continue en $m \in \mathbb{Z}$ puisqu'elle n'admet pas de limite finie en un tel point (les limites à gauche et à droite sont différentes).

Définition 19.

Soit $f \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R})$ (une fonction définie sur D et à valeur dans $\mathbb{R}$). On dit que f est continue sur D si, et seulement si, f est continue en tout point de D.

On note $\mathcal{C}(D, \mathbb{R})$ (ou $\mathcal{C}^0(D, \mathbb{R})$) l'ensemble des fonctions continues sur D.

La continuité sur D se traduit graphiquement par le fait que la courbe représentative de f peut être dessinée sans lever le crayon sur chaque intervalle de D.

Exemples. Les fonctions usuelles sont continues sur leur ensemble de définition... sauf la partie entière.

— Les fonctions polynomiales, sin, cos et exp sont continues sur $\mathbb{R}$.

— ln est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.

— $x \longmapsto \sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.

— Les fonction inverses sont continues sur $\mathbb{R}^*$.

Pour savoir si une fonction est continue, on va se baser sur les modèles de fonction standards et les compatibilité avec les opérations de base.

Propriété 20.

Si f, g sont continues sur D, alors $\lambda f + \mu g$ (λ, μ des constantes) , fg et f/g (si si g ne s'annule pas sur D) sont continues sur D.
Si la fonction f est continue sur D_f et si la fonction g est continue sur $f(D_f)$, alors $g \circ f$ est continue sur D_f.

Exemple. La fonction $h(x) = \frac{1}{x^2-1}$ est la composé $f \circ g$ de $g(x) = x^2 - 1$ et $f(y) = \frac{1}{y}$. f est définie continue sur $\mathbb{R}^\star$, c'est à dire quand $y \neq 0$.
Il faut que $y = g(x) \neq 0$. On cherche les solutions de $x^2 - 1 = 0$, c'est à dire $x = 1$ et $x = -1$. Donc le domaine de définition de h est $\mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}$. Les fonctions f et g sont continues sur leur domaine de définition respectifs, donc leur composée est continue sur son domaine de définition. Donc h est continue sur $\mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}$.

Exercice 8

Sur quel ensemble la fonction $f(x) = \ln(2x - 3)$ est-elle continue ?

3.2 Propriété de la continuité

Théorème 21. (des valeurs intermédiaires)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a et b deux éléments de I avec $a \leqslant b$.
Pour tout réel y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un réel $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = y$.

Attention Pour tout réel y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, le théorème des valeurs intermédiaires assure l'existence d'un réel c tel que $f(c) = y$ mais en aucun cas l'unicité de c. Pour l'unicité, il faut une hypothèse supplémentaire.

Corollaire 22.

Soit f une fonction réelle continue sur un intervalle I et a et b deux éléments de I avec $a < b$.
Si f est strictement monotone sur $[a, b]$, alors pour tout réel y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un **unique** réel $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = y$.

Propriété.

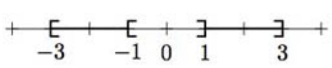
L'image d'un intervalle par une fonction continue à valeurs réelles est un intervalle.

4 Parité et périodicité

Définition.

Une partie E de $\mathbb{R}$ est dite symétrique par rapport à 0 lorsque pour tout x de E, $-x$ appartient à E.

Exemple. $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^*$ et les intervalles de la forme $[-a, a]$ et $]-a, a[$ sont symétriques par rapport à 0.



Le sous-ensemble $E = [-3, -1[\cup]1, 3]$ est symétrique par rapport à 0.

Définition 25.

Soit f une fonction définie sur une partie E de $\mathbb{R}$ symétrique par rapport à 0. On dit que :
— f est paire si et seulement si pour tout $x \in E$, $f(-x) = f(x)$. Le graphe d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
— f est impaire si et seulement si pour tout $x \in E$, $f(-x) = -f(x)$. Le graphe d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine du repère.

Exemples. Les fonctions cosinus et carré sont paires. Les fonctions sinus, tangente, cube et inverse sont impaires.

Remarque : Ce qui veut dire qu'il suffit d'étudier une fonction paire ou impaire sur la moitiée positive de son domaine de définition, puis de déduire par symétrie le graphe sur l'autre moitié.

Définition 26.

Soit T un nombre réel strictement positif et f une fonction définie sur un sous-ensemble E de $\mathbb{R}$ invariant par les transformations $x \mapsto x + T$ et $x \mapsto x - T$ (autrement dit, pour tout $x \in E$, on a $x - T \in E$ et $x + T \in E$). On dit que f est périodique de période T (ou $T-$périodique) si et seulement si pour tout $x \in E$, on a $f(x + T) = f(x)$.

Dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, le graphe d'une fonction $T-$périodique est invariant par translation de vecteur $T\vec{\imath}$.

Exemple. La fonction tangente est définie sur $E = \mathbb{R}\backslash\{\pi/2 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$. L'ensemble E est invariant par $x \mapsto x + \pi$ et par $x \mapsto x - \pi$ et pour tout $x \in E$, on a $\tan(x + \pi) = \tan(x)$ donc la fonction tangente est π-périodique.

Remarque : Ce qui veut dire qu'il suffit d'étudier une fonction périodique sur une seule période, puis de répéter le graphe.

Exercice 9

Montrer que la fonction $f(x) = \sin(3x)$ est $\frac{2\pi}{3}$- périodique.

5 Dérivation

Définition.

Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit a un point de I.
La fonction f est dite dérivable en a si, et seulement si, la fonction $\begin{array}{ccc} I\setminus\{a\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \end{array}$ admet une limite finie en a ; le cas échéant, cette limite est appelée le nombre dérivé de f en a et noté $f'(a)$.

On dit que f est dérivable sur I si, et seulement si, elle est derivable en tout point de I ; le cas échéant, la fonction qui associe à tout $a \in I$ le nombre dérivé de f en a, est appelée fonction dérivée de f et notée f'.

Remarque : On n'utilise presque pas la définition pour déterminer si une fonction est dérivable. On utilise principalement la connaissance des domaines de dérivation des fonctions standards, et la conservation de la dérivabilité par les opérations basiques.

5.1 Propriétés liées à la dérivée

Propriété 28.

Soit f une fonction dérivable en un point a, alors

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$$

Exemple. On veut calculer la limite en 0 de $\frac{\sin x}{x}=\frac{\sin x-\sin 0}{x-0}$. On reconnait un taux de variation. On sait que $\sin'(0)=\cos(0)=1$ donc $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

Théorème.

Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Si la fonction f est dérivable sur I, alors f est continue sur I.

Attention une fonction peut être continue en un point sans être dérivable en ce point. Par exemple, la fonction valeur absolue $x\to|x|$ est continue sur $\mathbb{R}$, mais n'est dérivable que sur $\mathbb{R}^*$, car elle n'est pas dérivable en 0 (il y a un "coin" en 0).

Propriété 30.

Soit λ un reel et f, g deux fonctions réelles définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Si f et g sont dérivables sur I, alors

— la fonction $f+g$ est dérivable sur I et $(f+g)'=f'+g'$,
— la fonction λf est dérivable sur I et $(\lambda f)'=\lambda f'$,
— la fonction fg est dérivable sur I et $(fg)'=f'g+fg'$,
— si g ne s'annule pas sur I, la fonction $\dfrac{f}{g}$ est dérivable sur I et

$$\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'g-fg'}{g^2}.$$

Exercice 10

Calculer la dérivée des fonction suivantes :

$$f(x)=x^2\cos(x),\qquad g(x)=\frac{x^2}{\cos x}$$

Propriété 31. (Dérivée de la composée)

Soit $f:I\to\mathbb{R}$ et $g:J\to\mathbb{R}$ deux fonctions telles que $f(I)\subset J$. Si f est dérivable sur I et si g est dérivable sur un intervalle K qui contient $f(I)$, alors $g\circ f$ est dérivable sur I et

$$(g\circ f)'=f'\cdot(g'\circ f)$$

Exemple. On considère la fonction h définie par $h(x)=\sqrt{4+2x}$. h est la composée $g\circ f$ avec :

1. f définie par $f(x)=4+2x$ pour tout $x\in\mathbb{R}$, et dérivable pour tout $x\in\mathbb{R}$. Sa dérivée est $f'(x)=2$.
2. g définie par $g(y)=\sqrt{y}$ pour tout $y\geqslant 0$ et dérivable pour tout $y>0$ (attention !). Sa dérivée est $g'(y)=\frac{1}{2\sqrt{y}}$.
3. On a $y=4+2x$ qu'on reporte dans les conditions en y.

$$y\geqslant 0\Leftrightarrow 4+2x\geqslant 0\Leftrightarrow x\geqslant -2;\quad y>0\Leftrightarrow 4+2x>0\Leftrightarrow x>-2.$$

En regroupant la condition du 1. et les solutions, on en déduit que la fonction h est définie sur $[-2,+\infty[$ et qu'elle est dérivable sur $]-2,+\infty[$. Pour tout $x\in]-2,+\infty[$, on a

$$h'(x)=f'(x)\times g'(f(x))=2\times\frac{1}{2\sqrt{4+2x}}=\frac{1}{\sqrt{4+2x}}$$

Exercice 11

Donner le domaine de dérivabilité de h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \cos(x^2 + 3x)$ et calculer la dérivée.

Théorème 32.

Soit f une fonction réelle, définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
- La fonction f est croissante sur I si, et seulement si pour tout $x \in I$, $f'(x) \geqslant 0$.
- La fonction f est décroissante sur I si, et seulement si pour tout $x \in I$, $f'(x) \leqslant 0$.
- La fonction f est constante sur I si et seulement si pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$.

Théorème.

Soit f une fonction réelle, définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
- Si pour tout $x \in I$, $f'(x) \geqslant 0$ et si f' ne prend la valeur 0 qu'en un nombre fini de points de I (éventuellement aucun), alors la fonction f est strictement croissante sur I.
- Si pour tout $x \in I$, $f'(x) \leqslant 0$ et si f' ne prend la valeur 0 qu'en un nombre fini de points de I (éventuellement aucun), alors la fonction f est strictement décroissante sur I.

Tableau de variation d'une fonction f On calcule f' et on étudie le signe de f' sur le domaine de dérivation. Puis on présente le résultat sous forme d'un tableau

x	$-\infty$		a		‖	b		c		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$		0	$+$	
$f(x)$	ℓ	$\searrow$	$f(a)$	$\nearrow$	‖	$\nearrow$		$f(c)$	$\nearrow$	$+\infty$

On a les conventions suivantes : une double barre signifie que f (et/ou f') n'est pas défini en cet endroit. Dans la ligne de x, on met le domaine de définition de f et les valeurs importantes. Dans la ligne de f', on met 0 là ou f' s'annule, $+$ sur les intervalles où f' est positive et $-$ sur les intervalles où f' est négative. Dans la ligne de f, on met des flèches $\nearrow$ pour strictement croissante et $\searrow$ pour strictement décroissante, en faisant attention à la cohérence du placement des flèches. On doit mettre les valeurs au bout des flèches (limites ou valeurs importantes).

5.2 Primitives

L'opération inverse de la dérivation est la recherche de primitive.

Définition 34.

Soit f une fonction continue sur un intervalle I à valeurs réelles. On appelle primitive de f sur I toute fonction F à valeurs réelles définie et dérivable sur I telle que $F' = f$.

Remarque : Une fonction a plusieurs primitive qui diffèrent d'une constante : $F(x)+C$ avec $C \in \mathbb{R}$ est aussi une primitive de f. Il y a des situations où le calcul de la valeur de C est indispensable. Sinon, on prend $C = 0$ pour simplifier.

Déterminer des primitives simples :
- On lit le tableau des dérivées à l'envers, ou le tableau des primitive connues. **Exemple.** Une primitive de $x \to x$ est $x \to \frac{1}{2}x^2$.
- Pour une composée : la primitive de $f'(x) \times g(f(x))$ est $G(f(x))$. Attention à vérifier la présence de $f'(x)$ dans la fonction à primitiver. **Exemple.** Une primitive de $x \to \frac{2x+1}{x^2+x}$ est $x \to \ln(x^2 + x)$.
- En corollaire, la primitive de $g(ax+b)$ avec a, b des constantes est $\frac{1}{a}G(ax+b)$. **Exemple.** Une primitive de $x \to (2x-3)^2$ est $x \to \frac{1}{6}(2x-3)^3$.
- Il n'y a aucune formule pour primitiver un produit ou un quotient.

On verra en calcul d'intégrale comment faire dans les cas plus compliqués.

Exercice 12

Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

$$f(x) = \exp(3x + 2), \quad g(x) = 2x^4, \quad h(x) = \cos x \cos(\sin x)$$

5.3 Tangente

Propriété 35.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$. Si f est dérivable en a alors la droite d'équation $y = f(a) + f'(a)(x-a)$ est tangente à la courbe représentative de f au point de coordonnées $(a, f(a))$.

Remarque : Une tangente signifie que la courbe est "collée" à la tangente quand on est près de a.

Exemple. Au point d'abscisse $x = 1$, on cherche la tangente de la fonction ln. On a $\ln(1) = 0$ et $\ln'(1) = \frac{1}{1} = 1$, donc la tangente a pour équation $y = x - 1$.

Représentation graphique de la tangente au point a : on peut tracer toute la droite $y = f(a) + f'(a)(x-a)$ si on veut. En général, on se contente d'en tracer une toute petite portion, au voisinage de a. En pratique, on place le point $(a, f(a))$, puis on trace une petite double flèche ayant pour pente $f'(a)$ sur ce point. Quand on trace le reste de la courbe de f, on fait attention à "coller" aux tangentes tracées.

On s'intéresse en général aux points de tangentes horizontales et verticales :

— Si $f'(a) = 0$, alors la courbe représentative de f possède une tangente horizontale au point de coordonnées $(a, f(a))$.

— Les tangentes verticales ont une pente infinie, c'est-à-dire en quelque sorte $f'(a) = \infty$. Plus précisément, si on a un point a où $f(a)$ existe, mais où f' n'existe pas, et que $f'(x)$ tend vers ∞ quand $x \to a$. Alors la courbe représentative de f possède une tangente verticale au point de coordonnées $(a, f(a))$.

Remarque : Le comportement d'une fonction en un point peut aussi être différent d'un coté ou de l'autre du point a, dans ce cas, on calcule la limite de f' en a, à gauche et/ou à droite. On obtient alors des demi-tangente.

6 Asymptote verticale

Propriété 36.

Soit f une fonction qui n'est pas définie en un point a.

— Si $\lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$ alors la courbe représentative de f possède une asymptote verticale d'équation $x = a$ (à gauche).

— Si $\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$ alors la courbe représentative de f possède une asymptote verticale d'équation $x = a$ (à droite).

Si la limite est $+\infty$, la coube représentative monte le long de l'asymptote, si la limite est $-\infty$, la courbe représentative descend le long de l'asymptote.

Remarque : On peut avoir des comportements différents à gauche et à droite d'une asymptote.

Exemple. La fonction $x \to \frac{1}{x-2}$ a une asymptote verticale $x = 2$. A gauche de 2, elle tend vers $-\infty$, à droite vers $+\infty$.

Exercice 13

Soit $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$. Calculer les limites de f à droite et à gauche de 2. Que peut-on en déduire graphiquement ?

7 Etude asymptotique

Soit f une fonction définie sur une partie de $\mathbb{R}$ contenant un intervalle de la forme $[c, +\infty[$. Suivant les différentes valeurs de l'éventuelle limite de f en $+\infty$, on peut préciser la branche infinie de f.

Définition 37.

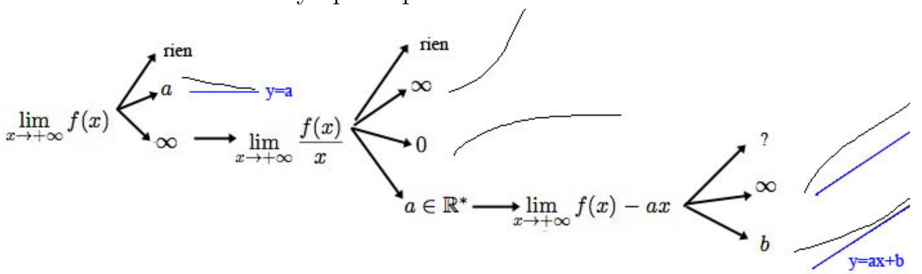
On dit que la droite $y = ax + b$ est asymptote à la courbe de f en $+\infty$ si

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - (ax + b) = 0$$

. Graphiquement, f va longer l'asymptote quand x est grand.

Remarque : Idem en $-\infty$. Mais la difficulté est de trouver les valeurs de a et b ! Avec certains équivalents ou développements limités, il est possible de trouver la droite $ax + b$. Mais si on n'a aucune idée de la valeur de la droite, il faut chercher successivement a et b par la méthode suivante.

Schéma de recherche d'asymptote pour $x \to \infty$:



On calcule $\lim_{x\to+\infty} f(x)$:

1. Si f n'admet pas de limite en $+\infty$, on ne peut rien dire.
2. Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = a$ alors la droite d'équation $y = a$ est asymptote à la courbe représentative de f.
3. Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ ou si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ alors on calcule $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$:

   (a) Si $\dfrac{f(x)}{x}$ n'a pas de limite en $+\infty$, on ne peut rien dire.

   (b) Si $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$ ou $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty$, la courbe représentative de f admet une branche parabolique de direction (Oy).

   (c) Si $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ la courbe représentative de f admet une branche parabolique de direction (Ox).

(d) Si $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}^*$ alors on calcule $\lim_{x\to+\infty} f(x) - ax$:

i. si $f(x) - ax$ n'a pas de limite en $+\infty$, la courbe représentative de f possède une direction asymptotique de pente a.

ii. si $\lim_{x\to+\infty} f(x) - ax = +\infty$ ou $\lim_{x\to+\infty} f(x) - ax = -\infty$ alors la courbe représentative de f possède une branche parabolique de pente a.

iii. si $\lim_{x\to+\infty} f(x) - ax = b$ alors la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à la courbe représentative de f.

8 Formulaire à connaître

Fonction : $f(x) =$	Définition	Dérivée : $f'(x) =$	Primitive $F(x) =$
C (constante)	$\mathbb{R}$	0	Cx
x^n avec $n \neq -1$	$\mathbb{R}$	$n\,x^{n-1}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$-\frac{1}{x^2}$	$\ln\lvert x\rvert$
$\frac{1}{x^k}$ avec $k \neq 1$	$\mathbb{R}^*$	$\frac{-k}{x^{k+1}}$	$\frac{1}{(1-k)x^{k-1}}$
$x^a = \exp(a\ln(x))$	$]0,+\infty[$	$a\,x^{a-1}$	$\frac{x^{a+1}}{a+1}$
$\sqrt{x}$	$[0,+\infty[$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	
$\lvert x\rvert$	$\mathbb{R}$	1 sur $]0,+\infty[$ -1 sur $]-\infty,0[$	
$\ln(x)$	$]0,+\infty[$	$\frac{1}{x}$	
$\ln(\lvert x\rvert)$	$\mathbb{R}^*$	$\frac{1}{x}$	
e^x	$\mathbb{R}$	e^x	e^x
$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$-\sin(x)$	$\sin(x)$
$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$\cos(x)$	$-\cos(x)$
$\tan(x)$	$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$	$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$\ln\lvert\cos x\rvert$

Les composées à reconnaitre : on note u une fonction (comprendre donc que c'est $u(x)$).

$f =$	$f' =$
u^n	$nu'u^{n-1}$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$\frac{1}{u^n}$	$-n\frac{u'}{u^{n+1}}$
$\ln(u)$	$\frac{u'}{u}$
$\ln\lvert u\rvert$	$\frac{u'}{u}$
e^u	$u'e^u$

$f =$	$F =$
$u'u^n$	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$
$\frac{u'}{u}$	$\ln\lvert u\rvert$
$u'e^u$	e^u
$u'g(u)$	$G(u)$

Exercice 1

($\star$) A, B et C étant des quantités réelles inconnues, compléter les pointillés dans les phrases suivantes

— L'expression $\frac{1}{A}$ est définie si $A \neq \cdots$.
— L'expression $\ln(B)$ est définie si $B \cdots 0$.
— L'expression $\sqrt{C}$ est définie si $C \cdots 0$.
— L'expression $\sqrt{AB}$ est définie si $\cdots \geqslant 0$.
— L'expression $\frac{A}{BC}$ est définie si $\cdots\cdots 0$, c'est à dire si $B \cdots$ et $C \cdots$.

Exercice 2

($\star\star$) On veut déterminer l'ensemble de définition de la fonction f définie par $f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{2x+4}\right)$. Compléter les pointillés dans la réponse donnée ci-dessous :

— La fonction $x \to \frac{x-1}{2x+4}$ est définie si $\cdots \neq 0$, c'est à dire si $x \neq \cdots$.
— $\ln(y)$ est défini si $y \cdots$.
— Or $y = \frac{x-1}{2x+4}$, donc $\ln\left(\frac{x-1}{2x+4}\right)$ est défini si $\frac{x-1}{2x+4} > 0$. On fait un tableau de signe :

x		$\cdots$		$\cdots$	
$x-1$	$\cdots$		$\cdots$	0	$\cdots$
$2x+4$	$\cdots$	0	$\cdots$		$\cdots$
$\frac{x-1}{2x+4}$	$\cdots$	$\|$	$\cdots$	0	$\cdots$

On en déduit que $\frac{x-1}{2x+4} > 0$ si $x \in \cdots$.

— Finalement, le domaine de définition de f est $\cdots$

En utilisant une rédaction similaire, donner le domaine de définition de $\ln(x^2-1)$ et de $\sqrt{(2-x)(3x+9)}$.

Exercice 3

($\star\star$) Dans les expressions suivantes, factoriser le ou les termes dominants. En déduire un équivalent simple de l'expression, puis la limite de l'expression quand $x \to +\infty$.

$$x^3 - 4x^2 + 2x + 5; \quad \frac{2x - x^2}{3x^4 + x - 1}; \quad 3\ln x - x$$

$$-2e^{2x} + x^5; \quad \frac{4xe^x + 3x^2}{\ln(x^6) - 5}; \quad (3x - x\ln x)(2xe^{-x} + 4x^3)$$

Exercice 4

($\star\star$) Calculer les limites (si elles existent) des expressions suivantes pour $x \to +\infty, x \to -\infty, x \to 0, x \to -2$:

$$e^{-2x}, \quad e^{x^2}, \quad x^3 - x^2, \quad \ln(2x+1), \quad \ln(3-x), \quad \frac{1}{4+2x}; \quad \frac{1-3x}{(x+1)(x+2)}$$

$$(3x+1)e^x, \quad (-4-2x)\ln x, \quad x^2\ln|x|; \quad \frac{x^3}{e^{2x}}, \quad \frac{x^3}{\ln|5x|}, \quad \frac{\ln|5x|}{e^{2x}}$$

Exercice 5

($\star\star\star$) Soit f la fonction définie par $f(x) = 2x+1$ si $x > 0$, $f(x) = 1 - 2x$ si $x < 0$ et $f(0) = 0$. Calculer la limite à gauche et à droite de f en 0. f a-t-elle une limite en 0 ?

Exercice 6

($\star$) Soit f une fonction positive définie sur $\mathbb{R}^{+\star}$ vérifiant $f(x) \geqslant \frac{1}{x}$ si $x < 2$ et $f(x) \leqslant \frac{1}{x}$ si $x > 2$. Donner les limites de f en 0 et $+\infty$.

Exercice 7

($\star\star$) Déterminer, si elles existent, les limites en justifiant.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+2}{x\ln x + \sqrt{x}}, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(2^x)}{x+1}, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{2x}+1}{\mathrm{e}^x - 3}, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x+2}{x^8-1}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{2\ln x}, \quad \lim_{x\to+\infty} x^x, \quad \lim_{x\to 0^+} (1+x)^{1/x} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}}.$$

Exercice 8

Déterminer, si elle existe, la limite des fonctions suivantes au point indiqué.

a) $x \mapsto \dfrac{x+2}{x^2+1}$ en $+\infty$

b) $x \mapsto \dfrac{x+2}{x^2+1}$ en 0

c) $x \mapsto \dfrac{x^2+1}{\sin^2(x)}$ en 0

d) $x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{2x}+x^2}{x^3+(\ln(x))^2}$ en $+\infty$

e) $x \mapsto \left(\dfrac{1}{x}+e^x\right)\left(\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}+x^2\right)$ en $-\infty$

f) $x \mapsto \ln(x+2) - \ln(x-1)$ en $+\infty$

g) $x \mapsto (\ln(x))^2 + 2\ln(x) + 3$ en 0

h) $x \mapsto x^x$ en 0

i) $x \mapsto \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$ en 0

j) $x \mapsto \dfrac{\sin(x\ln x)}{x}$ en $+\infty$

k) $x \mapsto \mathrm{e}^{1/x}$ en 0

Exercice 9

($\star$) Montrer que
$$1+\frac{1}{x}\underset{x\to+\infty}{\sim}1+\frac{1}{x^2}$$
Montrer que $\ln(1+1/x)$ n'est pas équivalent à $\ln(1+1/x^2)$ en $+\infty$.

Exercice 10

($\star\star$) Déterminer, si elle existe, la limite des fonctions suivantes au point indiqué, en utilisant les équivalents.

q) $x\mapsto\dfrac{\sin(x)}{\tan(3x)}$ en 0

r) $x\mapsto\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ en $+\infty$

s) $x\mapsto\dfrac{1+\cos(x)}{\sin(2x)}$ en π

t) $x\mapsto\dfrac{\sqrt[5]{1+x}-1}{x}$ en 0

u) $x\mapsto(2x^2-3x+1)\tan(\pi x)$ en $1/2$

v) $x\mapsto\dfrac{(1-\mathrm{e}^x)(1-\cos(x))}{x^3+x^4}$ en 0

w) $x\mapsto\ln(x)\ln(1+\ln(1+x))$ en 0

x) $x\mapsto\dfrac{\ln(\sin^2(x))}{(\pi/2-x)^2}$ en $\pi/2$

y) $x\mapsto\sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}-x$ en $+\infty$

Exercice 11

($\star\star\star$) Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x-\lfloor x\rfloor}{\sqrt{x}}$.

1. Montrer que la fonction f est bornée (on distinguera deux cas : $x\geqslant 1$ et $0<x<1$).
2. Calculer, si elle existe, la limite de f à droite en 0.
3. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Calculer, si elle existe, la limite de f à gauche en n, puis à droite en n.

Exercice 12

($\star\star$)

1. Déterminer un équivalent simple des fonctions suivantes au voisinage du point indiqué.

   $\alpha)$ $x\mapsto\cos(\sin(x))$ en 0 $\quad$ $\beta)$ $x\mapsto\tan(\sin(x))$ en 0

   $\gamma)$ $x\mapsto\ln(\cos(x))$ en 0 $\quad$ $\delta)$ $x\mapsto\exp(\cos(x))-1$ en $\pi/2$

2. Déterminer un équivalent simple de la fonction tangente au voisinage de π. En déduire un équivalent simple de $x\mapsto\tan\left(\dfrac{\pi}{2x+1}\right)$ au voisinage de 0.

Exercice 13

($\star\star$) Calculer les dérivées des fonctions suivantes

$$e^{2x^3+5x-1};\quad \ln(\cos x-x);\quad (3\sin x+5)^3,\quad \frac{1}{x^2-2x+1},\quad \frac{3}{(\ln x+3x)^3}$$
$$\cos(x^4-2),\quad (e^x+3x^2)\sin x,\quad \frac{5x^2+3x+7}{3x+2},\quad \frac{2\ln x+3x}{e^x+4}$$
$$(x^3+2x+5)e^{x^2-4x},\quad \sqrt{2x^3-\ln x},\quad \ln(4-e^x)\cos(x^5)$$

Exercice 14

($\star\star$) Donner l'ensemble de définition puis calculer la dérivée des fonctions suivantes (on précisera sur quel domaine celles-ci sont *a priori* dérivables).

$f_1:x\mapsto\sin(3x-5)$ $\quad$ $f_2:x\mapsto\left(\ln(x)+3x-\mathrm{e}^x\right)^4$ $\quad$ $f_3:x\mapsto x\exp\left(\dfrac{x}{1+x}\right)$

$f_4:x\mapsto\sqrt{\dfrac{x(2-x)}{1+x}}$ $\quad$ $f_5:x\mapsto\ln\left(1-\exp(x)\right)$ $\quad$ $f_6:x\mapsto\sqrt{1-\sin(x)}$

$f_7:x\mapsto x^2\ln\left(\sqrt{x}\right)$ $\quad$ $f_8:x\mapsto\ln\left(\ln(x)\right)$ $\quad$ $f_9:x\mapsto\mathrm{e}^{-1/x^2}\cos\left(\sqrt{x}\right)$

$f_{10}:x\mapsto x\,\mathrm{e}^{\sqrt{1-x^2}}$ $\quad$ $f_{11}:x\mapsto\sqrt{1-\ln(x)}\cos\left(\mathrm{e}^x\right)$ $\quad$ $f_{12}:x\mapsto\ln\left(\left|\dfrac{1-\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\right|\right)$

Exercice 15

($\star\star$) Donner une primitive des fonctions suivantes :

$$f_1(x)=\frac{2}{5x^2},\quad f_2(x)=2\sqrt{x},\quad f_3(x)=5e^{6x},\quad f_4(x)=\cos(3x+2),\quad f_5(x)=\frac{2}{\cos^2(3x)}$$
$$f_6(x)=(4x-3)(2x^2-3x+4)^5,\quad f_7(x)=\frac{2}{3x+5}\quad f_8(x)=8\sin(2x-8)$$

Exercice 16

($\star$) On considère la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 4$. Donner l'équation de la tangente à f au point d'abscisse -1.

Exercice 17

($\star\star$) On connait les limites suivantes de f une fonction. Que peut-on en déduire graphiquement ?

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -1; \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \lim_{x \to +\infty} f(x) - 3x + 2 = 0.$$

Même question pour g.

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = +\infty, \lim_{x \to -\infty} \frac{g(x)}{x} = 0, \lim_{x \to 2^-} g(x) = -\infty;$$

$$\lim_{x \to 2^+} g(x) = 5; \lim_{x \to +\infty} g(x) = 5$$

Exercice 18

($\star\star$) Soit la fonction $f_1 : x \mapsto \sqrt{x^2 + 3x - 4}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f_1 et préciser sur quel ensemble elle est *a priori* dérivable.
2. Dresser le tableau des variations de f_1. Préciser les tangentes horizontales et verticales éventuelles, ainsi que les asymptotes.
3. Tracer Γ_1 en reportant toutes les informations glanées jusqu'ici.

Exercice 19

($\star\star$) Étudier la fonction $f_2 : x \mapsto \dfrac{2x^2 + 3x + 9}{x + 1}$ et tracer son graphe.

Exercice 20

($\star\star\star$) Étudier la fonction $f_3 : x \mapsto \exp(-x^2)$ et tracer son graphe.
Bonus. Préciser les points d'inflexion, c'est-à-dire les points où $f"(x) = 0$ en changeant de signe. Ce sont les points où la convexité de la fonction change.

Exercice 21

($\star\star$) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

a) $\sqrt{1 - x^2} = 2x + 1$	*b)* $\sqrt{1 - x^2} > 2x + 1$	*c)* $\sqrt{x + 3} + \sqrt{x + 1} = 1$
d) $\lvert x + 1\rvert \leqslant 1$	*e)* $\lvert x - 1\rvert \leqslant \lvert x - 2\rvert$	*f)* $\lvert x + 1\rvert + \lvert x - 3\rvert < 6$.

Exercice 22

($\star\star$) **Devoir-maison.** Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (2x + 1)e^{-\frac{x}{3}} + 1$$

On considère un repère orthonormal du plan $(O; \vec{i}, \vec{j})$ et on note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f.

1. Soit f' la fonction dérivée de f. Calculer $f'(x)$ et déterminer son signe.
2. Déterminer la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$ et les asymptotes de la courbe de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
3. Construire le tableau de variation de f.
4. Tracer la courbe $\mathcal{C}$ ainsi que les asymptotes.