5. Fonctions de base

1 Vocabulaire des fonctions réelles

1.1 Définition

Définition 1.

Une fonction f (ou une application) est la donnée de deux ensembles E et F et d'une correspondance qui à tout élément x de E associe un et un seul élément y de F que l'on note $f(x)$.

Une application f de E vers (ou dans) F se note $f : E \longrightarrow F$, ou $f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & y = f(x) \end{array}$.

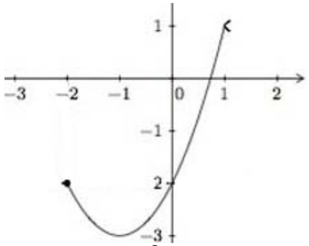
- E est appelé l' **ensemble de départ** de f ;
- F est appelé l' **ensemble d'arrivée** de f ;
- Pour tout $x \in E$, l'élément $f(x)$ est appelé l' **image** de x par f ;
- Un élément x de E est <u>**un**</u> **antécédent** de l'élément y de F par la fonction f si, et seulement si, $f(x) = y$.

Remarque :

1. Dans ce chapitre, E et F seront des sous-ensembles de $\mathbb{R}$ et on parlera de fonctions réelles. Mais on peut aussi faire des fonctions complexes, vectorielles ou dans n'importe quel ensemble !
2. Chercher l'**ensemble de définition d'une fonction**, c'est trouver l'ensemble de départ le plus grand possible.

Graphique. Si f est une fonction réelle, tracer la courbe ou le graphe de f signifie tracer dans un repère (de son choix) les points de coordonnées $(x, f(x))$, avec $x \in E$. Tracer la courbe de f permet d'avoir un aperçu synthétique de ses propriétés.
Sur l'axe des abscisses (axe horizontal, axe des x), on trouve les antécédents et l'ensemble de départ. Sur l'axe des ordonnées (axe vertical, axe des y), on trouve les images et l'ensemble d'arrivée.

Exemple. Soit $f : \begin{array}{ccc} [-2;1[& \longrightarrow & \mathbb{R}. \\ x & \longmapsto & x^2 + 2x - 2 \end{array}$



Cette notation signifie que f est la fonction définie sur $E = [-2;1[$, à valeur dans $\mathbb{R}$, qui à tout élément x de $[-2;1[$ associe le réel $x^2 + 2x - 2$, autrement dit $f(x) = x^2 + 2x - 2$.

On peut calculer $f(-2) = (-2)^2 + 2(-2) - 2 = -2$, $f(-1) = (-1)^2 + 2(-1) - 2 = -3$, $f(0) = 0^2 + 2(0) - 2 = -2$. Mais $f(1)$, $f(2)$, $f(-3)$ ne sont pas définis !

Comme $f(-1) = -3$, on dit que l'image de -1 par f est le réel -3. Comme $f(-2) = f(0) = -2$, on dit que 0 et -2 sont deux antécédents du réel -2 par l'application f. On constate (ici graphiquement) que le réel 2 n'a pas d'antécédent par f.

Définition.

Soit D une partie de E. On appelle image de D par f le sous-ensemble de F, noté $f(D)$, constitué de tous les éléments de F qui ont au moins un antécédent <u>dans D</u> par f. On peut écrire :

$$f(D) = \{y \in F \mid \exists x \in D, f(x) = y\} = \{f(x) \mid x \in D\}.$$

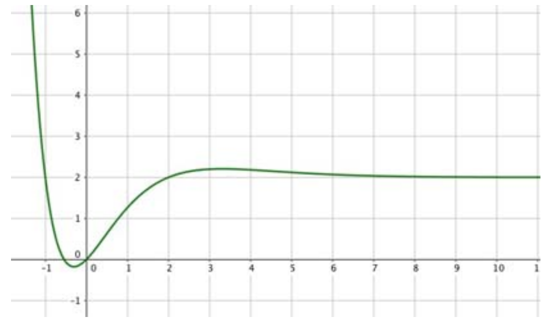
Exemple. Dans l'exemple précédent :

- l'image de l'intervalle $[0, 1[$ par f est l'intervalle $[-2, 1[$.
- l'image de l'intervalle $]-2, 0[$ par f est l'intervalle $[-3, -2[$.
- Parler de l'image de l'intervalle $]-3, 0[$ par f n'a pas de sens, puisque cet intervalle n'est pas inclus dans l'intervalle de départ de f.

Exercice 1

A l'aide de la courbe de la fonction f répondre aux questions suivantes :

1. Quel est l'image de -1 par f ?
2. Quels sont les antécédents de 2 par f sur $[-2, 4]$?
3. Quel est l'ensemble image de $[0, 8]$ par f ? Et celui de $]-\infty, -1]$? et celui de $[-1, 2]$?
4. Donner les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.



Définition 3.
Soit f une application d'un ensemble E vers un ensemble F. L'image de l'ensemble de départ E par f est aussi appelé « ensemble image de f » et parfois noté $\text{Im}(f)$. Cet ensemble est constitué de tous les éléments de F qui ont au moins un antécédent par f. On peut écrire :

$$\text{Im}(f) = f(E) = \{y \in F \mid \exists x \in E, f(x) = y\} = \{f(x) \mid x \in E\}.$$

Exemple. Dans l'exemple précédent, l'ensemble image de f est l'intervalle $[-3; 1[$.

Attention rédaction ! Ne pas confondre f (la fonction dans son ensemble) avec $f(x)$ qui est juste un nombre (l'image de x par la fonction f).

— Quand on parle de la fonction f, on peut dire qu'elle est définie sur E, à valeur dans F, continue, dérivable, croissante, décroissante, qu'elle s'annule en 1...... des propriétés globales.
Pour l'introduire, on peut dire : soit la fonction $f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F. \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$. Ou soit f la fonction définie sur E par

$$\forall x \in E, \quad f(x) = \ldots.$$

— Quand on parle de $f(x)$ (à condition d'avoir introduit x par : soit $x \in E$), on peut dire que c'est un nombre positif, négatif, que $f(x) = 0$, que $f(x)$ est plus grand que 2, plus petit que 5.... des propriétés sur les nombres.

1.2 Restriction et prolongement d'une fonction

Définition.
Soit A, B et C trois parties de $\mathbb{R}$ tels que $A \subset B \subset C$. Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur la partie B.

— On dit qu'une fonction g définie sur la partie A et à valeurs réelles est une restriction de la fonction f si, et seulement si elle vérifie :

$$\forall x \in A, \quad g(x) = f(x).$$

La restriction de f à A se note aussi $f_{|A}$.

— On dit qu'une fonction h définie sur la partie C et à valeurs réelles est un prolongement de la fonction f si, et seulement si elle vérifie :

$$\forall x \in B, \quad h(x) = f(x).$$

Remarque : On peut remarquer que si g est une restriction de la fonction f alors f est un prolongement de la fonction g. On fera bien attention que, bien que ces deux fonctions aient la même correspondance sur une partie de $\mathbb{R}$, elles ne sont pas égales (puisqu'elles n'ont pas le même ensemble de départ).

1.3 Composition des applications

Définition 5.
Soit E, F et G trois ensembles et soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications. On appelle composée de g par f et l'on note $g \circ f$ (à prononcer « g rond f ») l'application définie par

$$g \circ f : \begin{array}{ccc} E & \to & G \\ x & \mapsto & g \circ f(x) = g\big(f(x)\big). \end{array}$$

Exemple. La fonction f définie sur $]2, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{3}{\sqrt{x-2}}$ est la composée de trois fonctions. On a $g : x \to x - 2$ définie sur $\mathbb{R}$, qui est à l'intérieure de la fonction $h : x \to \sqrt{x}$ qui est définie sur $\mathbb{R}^+$, qui elle-même est à l'intérieur de la fonction $k : x \to \frac{3}{x}$ qui est définie sur $\mathbb{R}^*$. C'est-à-dire

$$f(x) = k \circ h \circ g(x) = k \circ h(g(x)) = k(h(g(x))) = \frac{3}{h(g(x))} = \frac{3}{\sqrt{g(x)}} = \frac{3}{\sqrt{x-2}}$$

Mise en garde : Il faut faire attention à l'ordre suivant lequel on écrit la composition de f et g. La composée $g \circ f$ peut très bien exister et la composée $f \circ g$ n'avoir aucun sens.

Remarque : Pour pouvoir composer deux applications $f : E \to H$ et $g : F \to G$, il suffit que l'ensemble image $f(E)$ soit inclus dans F.... mais il est nécessaire de le vérifier (recherche du domaine de définition).

1.4 Variations d'une fonction réelle

Définition 6.

Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur un sous-ensemble E de $\mathbb{R}$. On dit que f est

— **constante** sur E si, et seulement si, pour tout $(x, x') \in E^2$, on a $f(x) = f(x')$.

— **croissante** sur E si, et seulement si, pour tout $(x, x') \in E^2$, on a : $x \leqslant x' \Rightarrow f(x) \leqslant f(x')$.

— **strictement croissante** sur E si et seulement si pour tout $(x, x') \in E^2$: $x < x' \Rightarrow f(x) < f(x')$.

— **décroissante** sur E si et seulement si pour tout $(x, x') \in E^2$, on a : $x \leqslant x' \Rightarrow f(x) \geqslant f(x')$.

— **strictement décroissante** sur E si et seulement si pour tout $(x, x') \in E^2$: $x < x' \Rightarrow f(x) > f(x')$.

Exercice 2

On donne le tableau de variation suivant pour une fonction f. Tracer l'allure possible de la courbe de f.

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	5	$\searrow$	-2

Remarque : Quand on applique une fonction f sur une inégalité (par exemple pour résoudre une inéquation), il faut faire attention au sens de variation de la fonction :

— Si f est croissante, alors l'inégalité ne change pas.

— Si f est décroissante, alors l'inégalité change de sens.

— Si f n'est ni croissante, ni décroissante, il est INTERDIT de l'appliquer sur l'inégalité.

— Une inégalité stricte ne reste stricte que si la fonction est strictement croissante (ou strictement décroissante)

Exemples.

1. Les fonctions exp et ln sont strictement croissantes sur leurs ensembles de définition respectifs.

2. La fonction cube ($x \to x^3$) est strictement croissante, mais pas la fonction carrée.

3. La fonction inverse ($x \to \frac{1}{x}$) est strictement décroissante sur $]-\infty, 0[$ et strictement décroissante sur $]0, +\infty[$. **Mais** la fonction h **n'est pas** strictement décroissante sur $\mathbb{R}^*$. En effet, on a $-1 < 1$ et pourtant $h(-1) \leqslant h(1)$.

1.5 Majoration, minoration

Définition.

La fonction f est dite majorée si et seulement si

$$\exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in D,\ f(x) \leqslant M \quad \text{(on dit que } M \text{ est un majorant de } f\text{).}$$

La fonction f est dite minorée si et seulement si

$$\exists m \in \mathbb{R},\ \forall x \in D,\ m \leqslant f(x) \quad \text{(on dit que } m \text{ est un minorant de } f\text{).}$$

Une fonction est dite bornée si et seulement si elle est majorée et minorée, c'est à dire

$$\exists (m, M) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in D,\ m \leqslant f(x) \leqslant M$$

Exemple. La fonction sin est majorée par 2 et minorée par -3. On dit que les nombres 2 et -3 sont respectivement un majorant et un minorant de la fonction sinus. Ce ne sont évidemment pas les seuls...

Propriété.

La fonction f est bornée si et seulement si $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in D,\ |f(x)| \leqslant M$.

Exemple. La fonction arctangente vérifie $|\arctan x| \leqslant \frac{\pi}{2}$ pour tout x réel, donc arctangente est bornée.

1.6 Tracer sans étude de fonction

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}$ son graphe dans le plan rapporté au repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On veut tracer sans étude le graphe d'une fonction g définie sur $\mathbb{R}$ qui est une version « modifée » de f avec les modifications suivantes : ajout d'une constante a à x, ajout d'un signe - devant x, ajout d'un signe $-$ devant f, ajout d'une constante b à la fonction (une ou plusieurs modifications à la fois). La courbe de g se déduit graphiquement de celle de f par les transformations suivantes (à faire impérativement dans l'ordre donné ici !).

— Le graphe de $x \to f(x + a)$: on translate la courbe horizontalement de $-a$. (Si a est positif, décalage vers la gauche . Si a est négatif, décalage vers la droite)

— Le graphe de $x \to f(-x)$: on fait la symétrie d'axe vertical (Oy).

— Le graphe de $x \to -f(x)$: on fait la symétrie d'axe horizontal (Ox).

— Le graphe de $x \to f(x) + b$: on fait la translation de b verticalement.

Exercice 3

À partir des graphes des fonctions usuelles et de transformations simples, tracer, sans étude, le graphe de la fonction $f_1 : x \mapsto \exp(x + 1)$

2 Fonctions affines

Définition 9.
Les fonctions réelles affines sont les fonctions de la forme $f(x) = ax + b$, avec a et b des constantes réelles. Leurs courbes $y = ax + b$ sont des droites. Le coefficient a est appelé la **pente** de la droite ou son **coefficient directeur**. Le coefficient b est l'**ordonnée à l'origine** (quand $x = 0$, on obtient $y = b$).

Courbe : Pour tracer une droite $y = ax + b$, on choisit deux valeurs de x et de calculer les y correspondant. Ca fait deux points et on trace la droite passant par les deux points.

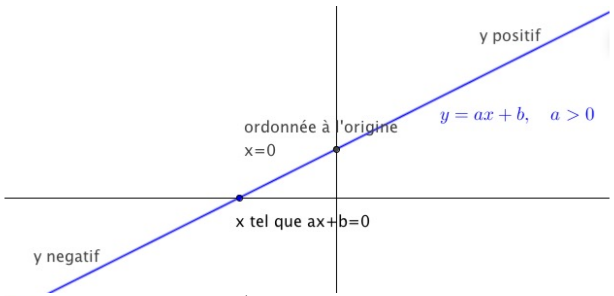
Signe et sens de variation :

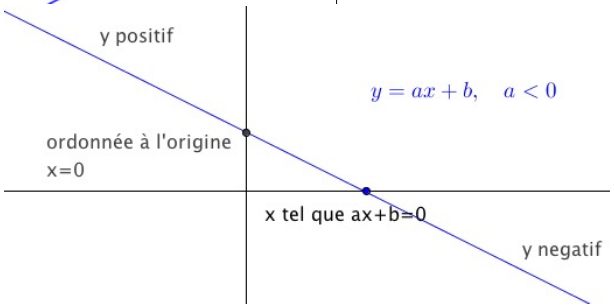
— Pour trouver là où la fonction s'annule (c'est-à-dire là où la droite coupe l'axe des abscisses), on résout $ax + b = 0$.

— Si a est strictement positif, la droite « monte » (fonction croissante), donc $ax + b$ est négatif avant le point d'annulation et positif après.

— Si a est strictement négatif, la droite « descend » (fonction décroissante), donc $ax + b$ est positif avant le point d'annulation et négatif après.

— Si $a = 0$, la droite est horizontale, la fonction est constante et donc de signe constant.





Exercice 4

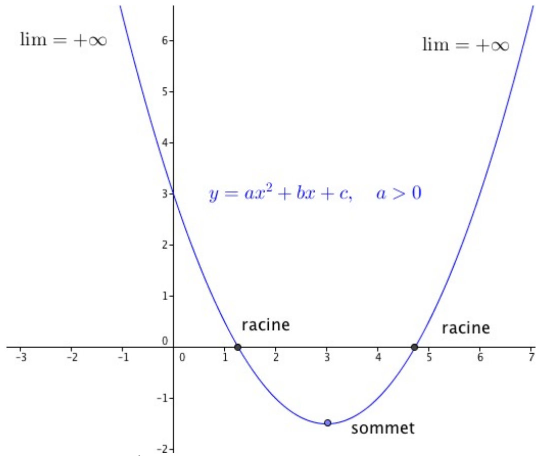
Une fonction affine vérifie $f(3) = -1$ et $f(-2) = 1$.

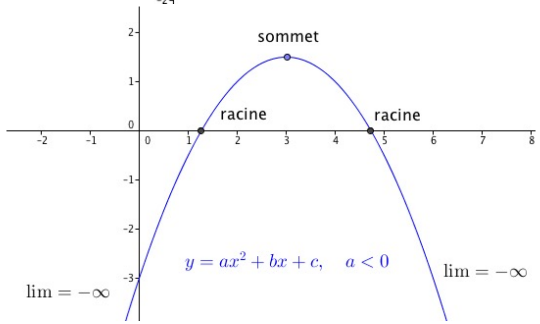
1. Trouver l'expression de $f(x)$ en fonction de x.
2. Quel est le sens de variation de f ?
3. Donner son tableau de signe.
4. Tracer la courbe de f.

3 Trinôme du second degré

Définition 10.
Les trinômes du second degré sont les fonctions de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec a, b, c des constantes réelles et $a \neq 0$ (si a est nul, c'est une fonction affine). Leurs courbes sont des paraboles.

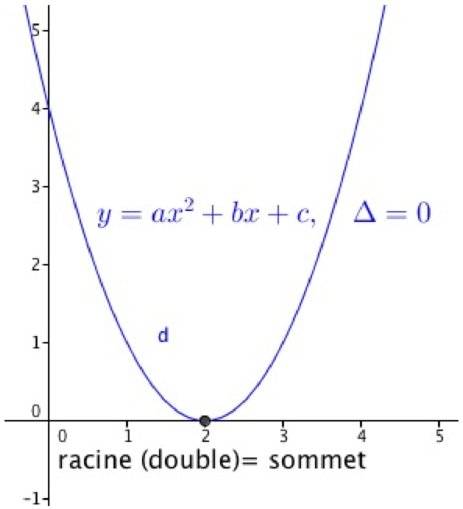
Courbe : Si a est positif, alors la parabole est tournée vers le haut. Si a est négatif, alors la parabole est tournée vers le bas.

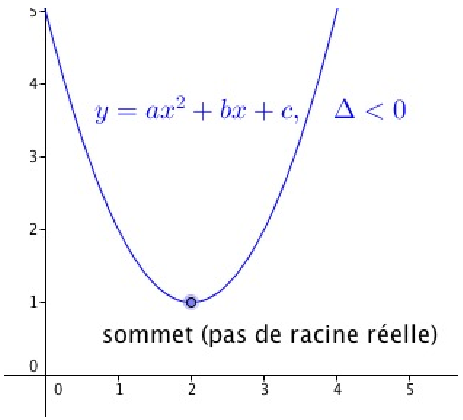




Racines. On cherche à résoudre $ax^2+bx+c=0$, c'est à dire déterminer les racines du trinôme (ou encore trouver les points d'intersection avec l'axe des abscisses). On calcule le discriminant $\Delta = b^2-4ac$.

— Si $\Delta > 0$, alors il y a deux racines $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$. Le trinôme est alors du signe de a à l'extérieur des racines, et du signe contraire entre les deux. Le trinôme se factorise sous la forme $a(x-x_1)(x-x_2)$.
— Si $\Delta = 0$, alors il y a une seule racine $x_1 = \frac{-b}{2a}$. Le trinôme est alors du signe de a tout le temps, et il vaut 0 à la racine. Le trinôme se factorise sous la forme $a(x-x_1)^2$.
— Si $\Delta < 0$, alors il n'y a pas de racines réelles, le trinôme ne vaut jamais 0. Il est du signe de a tout le temps.





La forme canonique. Mettre un trinôme $f(x)=ax^2+bx+c$ sous forme canonique, c'est l'écrire sous la forme $f(x)=a(x-\alpha)^2+\beta$, avec $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$ des réels. Le point d'abscisse α est le sommet de la parabole.

Exercice 5

Soit le trinôme du second degré $f(x)=-2x^2+4x+6$. Calculer les racines de f et en déduire son sommet. Tracer l'allure de la courbe représentative de f et mettre f sous forme canonique.

4 Fonctions logarithmes et exponentielles

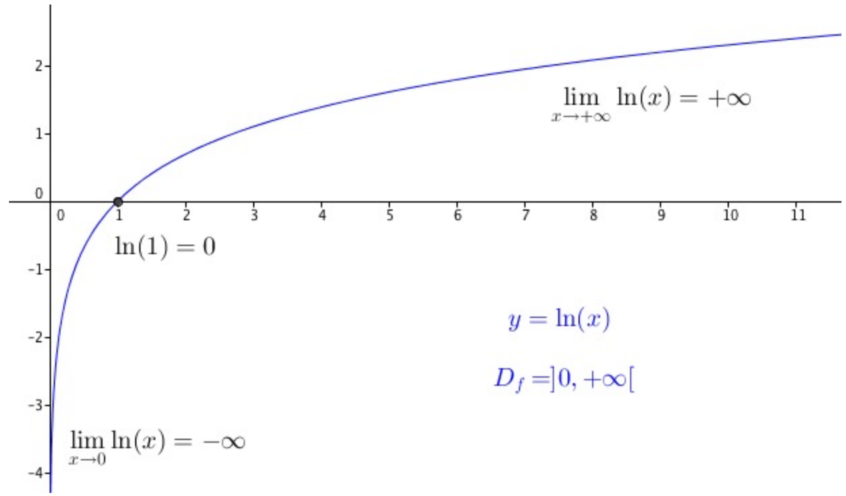
4.1 Le logarithme népérien

Définition 11.

On appelle **logarithme népérien** la primitive de la fonction $\begin{array}{rcl}]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 1/x \end{array}$ qui s'annule en 1.

Cette fonction est notée ln :

$$\ln : \begin{array}{rcl}]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(x) \end{array}$$



Propriété 12.

1. $\ln(1) = 0$.
2. La fonction ln est dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour tout $x \in]0,+\infty[$, on a $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.
3. La fonction ln est continue et strictement croissante sur $]0,+\infty[$.
4. $\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$ (asymptote verticale en 0).

Remarque : La primitive de la fonction ln sera calculée dans le chapitre « Intégrale et primitive ». La fonction ln est concave ce qui fait que son graphe est toujours en dessous de ses tangentes

Propriété 13.

$\forall x, y \in \mathbb{R}^{+*}$

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y); \qquad \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y); \qquad \ln(x^n) = n\ln(x)$$

limites classiques :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \qquad (n \in \mathbb{N}^*) \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^n}{x} = 0 \qquad \lim_{x\to 0} x(\ln x)^n = 0$$

Remarque : Ce qui veut dire qu'il n'existe aucune formule pour $\ln(x \pm y)$, $\ln(x)\ln(y)$ et $\frac{\ln x}{\ln y}$!

Exercice 6

Sans calculatrice, comparer les réels x et y suivants :

$$a)x = \ln 8, y = 4\ln 2, \quad b)x = \ln 5, y = \ln 2 + \ln 3, \quad c)x = \ln\frac{1}{9}, y = -2\ln 3$$

Tout nombre réel admet un unique antécédent par ln dans $]0, +\infty[$. On dit que la fonction ln est une bijection (cf cours ultérieur) de $]0, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$. L'unique antécédent du nombre 1 par la fonction ln est noté e et s'appelle le **nombre de Néper**. On retiendra que $\ln \mathrm{e} = 1$ et l'on peut garder en tête que $\mathrm{e} \approx 2,72$.

4.2 L'exponentielle

Définition 14.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on appelle exponentielle de x et l'on note $\exp(x)$ l'unique antécédent du réel x par la fonction ln.

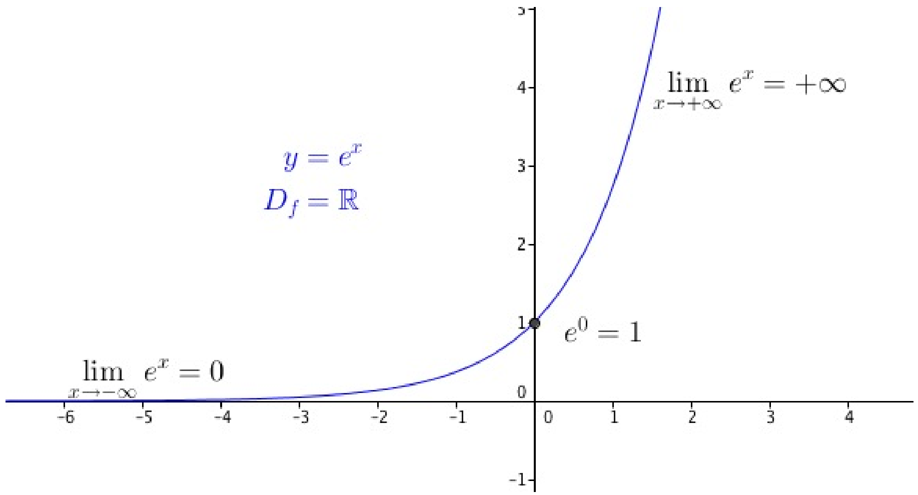
La fonction exponentielle, notée exp, est la fonction $\exp : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to &]0, +\infty[\\ x & \mapsto & \exp(x) \end{array}$. On a $\exp(x) = e^x$.

Remarque : On dit que la fonction exp est la bijection réciproque de la bijection ln (cf. cours ultérieur).

Propriété 15.

1. $\exp(1) = e^1 = \mathrm{e}$ et $\exp(0) = e^0 = 1$.
2. La fonction exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $(e^x)' = e^x$.
3. La fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
4. On a $\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0^+$ (asymptote horizontale) et $\lim_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty$.

Remarque : L'exponentielle est convexe ce qui fait que son graphe est au dessus de toutes ses tangentes. Son graphe est le symétrique de celui du ln par rapport à la droite d'équation $y = x$.



Propriété 16.

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad e^{-x} = \frac{1}{e^x} \quad e^{x+y} = e^x e^y; \qquad e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}; \qquad e^{xy} = (e^x)^y$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \ln\big(\exp(x)\big) = x \quad \text{et} \quad \forall x \in]0, +\infty[, \quad \exp\big(\ln(x)\big) = x$$

limite classique :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1$$

Remarque : Ce qui veut dire qu'il n'existe aucune formule pour $e^x \pm e^y$.

Exercice 7

Simplifier les expressions suivantes

$$a = e^{\ln 5} + e^{-\ln 3}, \quad b = e^{\frac{1}{2}\ln 4} \times e^{-\ln\frac{1}{2}}, \quad c = \frac{e^{3+\ln 5}}{e^{4+\ln 4}}, \quad d = e^x e^{-2x},$$

$$f = (e^x)^3 (e^{-x})^2, \quad g = \frac{e^{4x}}{e}$$

4.3 Logarithmes et exponentielles de base quelconque

Définition.

Soit un nombre réel strictement positif tel que $a \neq 1$. On appelle **logarithme de base** a, noté $\log_a$, l'application

$$\begin{array}{rccl} \log_a : &]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \log_a(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(a)}. \end{array}$$

Remarque : La fonction $\log_a$ est la fonction proportionnelle à ln qui vaut 1 en a.

— Si $a = 10$, on obtient le *logarithme décimal* que l'on note aussi log et qui est notamment utilisé en chimie (pH).

— Le logarithme népérien est le logarithme de base e.

Propriété.

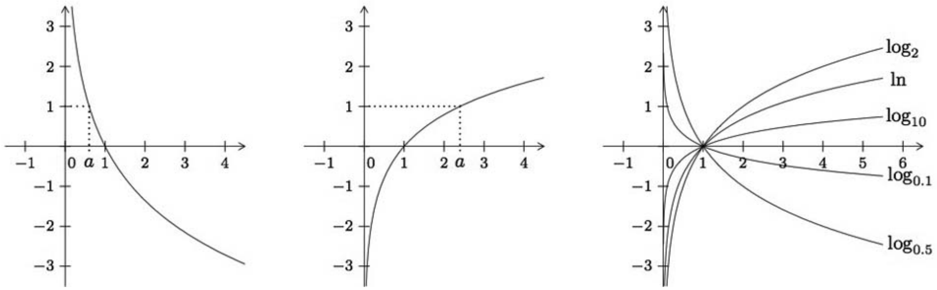
$\forall x, y \in \mathbb{R}^{+*}$:

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y), \qquad \log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y), \qquad \log_a(x^n) = n\log_a(x)$$

Propriété.

1. On a $\log_a(1) = 0$ et $\log_a(a) = 1$.
2. La fonction $\log_a$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour tout $x \in]0,+\infty[$, on a $\log_a'(x) = \dfrac{1}{x\ln(a)}$.
3. — Si $0 < a < 1$, la fonction $\log_a$ est continue et strictement décroissante sur $]0,+\infty[$. On a $\lim\limits_{x\to 0^+} \log_a(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_a(x) = -\infty$.

   — Si $a > 1$, la fonction $\log_a$ est continue et strictement croissante sur $]0,+\infty[$. On a $\lim\limits_{x\to 0^+} \log_a(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_a(x) = +\infty$.



La fonction $\log_a$ pour $0 < a < 1$. pour $a > 1$.

Définition.

Soit un nombre réel a strictement positif. On appelle **exponentielle de base** a, notée $\exp_a$, la fonction

$$\begin{array}{rccl} \exp_a : & \mathbb{R} & \to &]0,+\infty[\\ & x & \mapsto & a^x = \exp\left(x\ln(a)\right) \end{array}$$

Si $a \neq 1$, la fonction $\exp_a$ est la bijection réciproque de $\log_a$, et l'on a

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \log_a\left(\exp_a(x)\right) = x \qquad \text{et} \qquad \forall x \in]0,+\infty[,\ \exp_a\left(\log_a(x)\right) = x.$$

Définition 21.

Soit $a > 0$:

$$a^x = \exp\left(x\ln(a)\right)$$

Remarque : a^x (le x est en exposant) n'est pas une puissance : c'est une exponentielle. C'est comme e^x !

Attention : Seul un nombre réel strictement positif peut être élevé à une puissance quelconque.

On a par exemple $2^{\sqrt{2}} = \exp(\sqrt{2}\ln(2))$ mais $(-2)^{\sqrt{2}}$ n'a aucun sens !

Propriété 22.

$a, b \in \mathbb{R}^{+*}$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$:

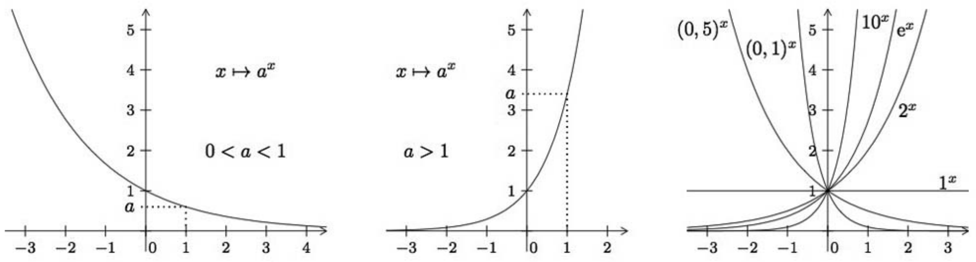
$$a^{x+y} = a^x a^y, \qquad a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}, \qquad (a^x)^y = a^{xy}, \qquad (ab)^x = a^x b^x$$

Propriété.

1. La fonction $x \to a^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $x \to a^x \ln(a)$.
2. ▷ Si $0 < a < 1$, la fonction $x \to a^x$ est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. On a $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = 0$.

   ▷ Si $a > 1$, la fonction $x \to a^x$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. On a $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty$.

   ▷ La fonction $x \to 1^x$ est la fonction constante égale à 1.



Attention : Pour étudier (et en particulier pour dériver) une fonction dont l'expression est de la forme $f(x) = u(x)^{v(x)}$ (une fonction avec du x dans la puissance), il est indispensable de revenir à l'exponentielle :

$$u(x)^{v(x)} = \exp\Big(v(x)\ln\big(u(x)\big)\Big).$$

Exercice 8

Résoudre l'équation suivante dans $\mathbb{R}$:

$$2^{x^3} = 3^{x^2}$$

5 Puissances d'un nombre réel et fonctions puissances

On s'intéresse aux fonctions de la forme $x \to x^a$ avec a un réel fixé. Ce sont les fonctions puissances. La manière dont cette fonction est définie, son ensemble de définition et son sens de variation dépendent de la valeur de a. On va donc étudier les différents cas possibles.

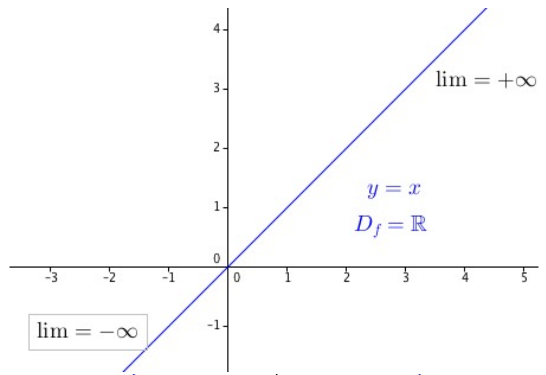
5.1 Puissances simples

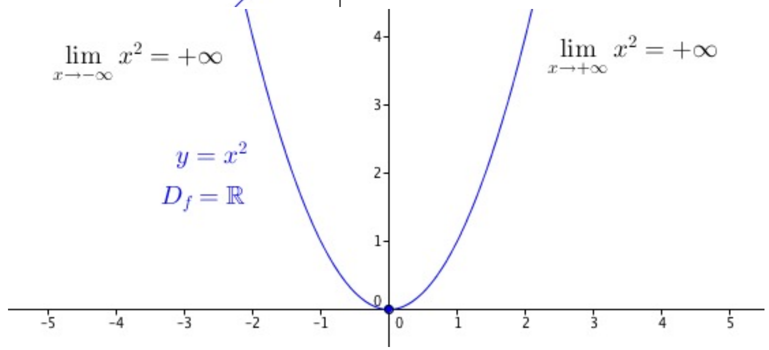
Si $a = 0$. Alors la fonction $x \to x^0$ est définie sur $\mathbb{R}$ et est constante égale à 1 par convention.

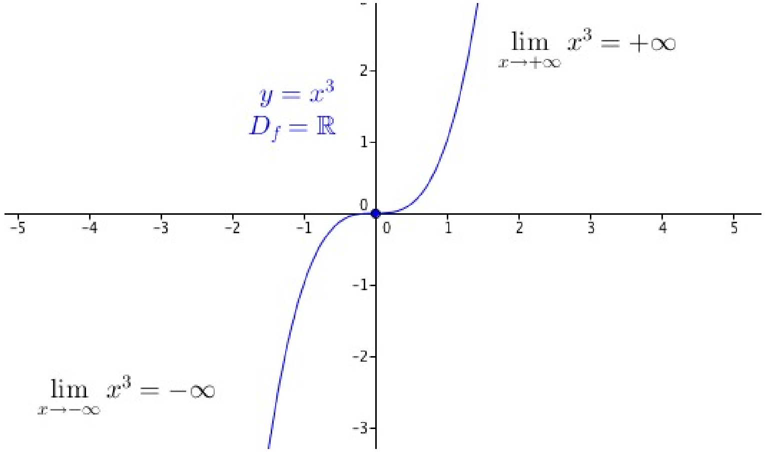
Si $a = n$ est un entier strictement positif, alors

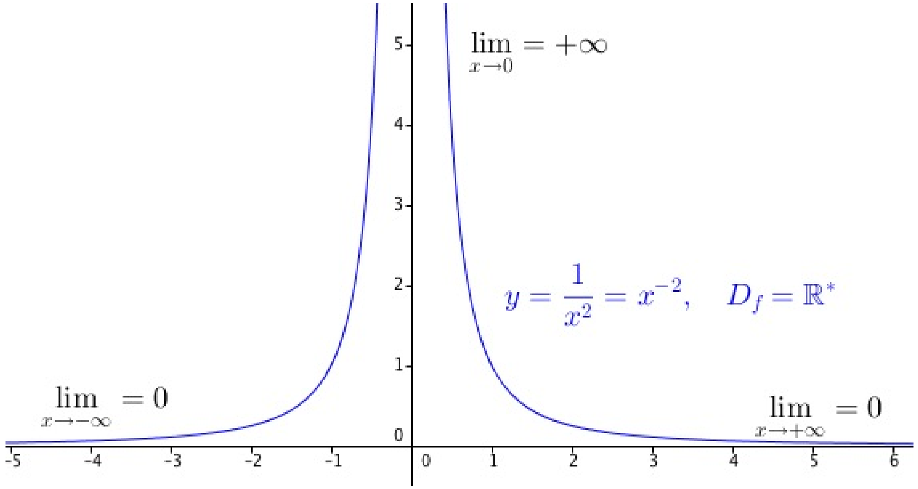
$$x^n = \underbrace{x.x.x.\ldots.x}_{n \text{ fois}}$$

La fonction est définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}$. Son sens de variation dépend de n. Les exemples types sont les fonctions $x \to x^1$, $x \to x^2$ et $x \to x^3$.





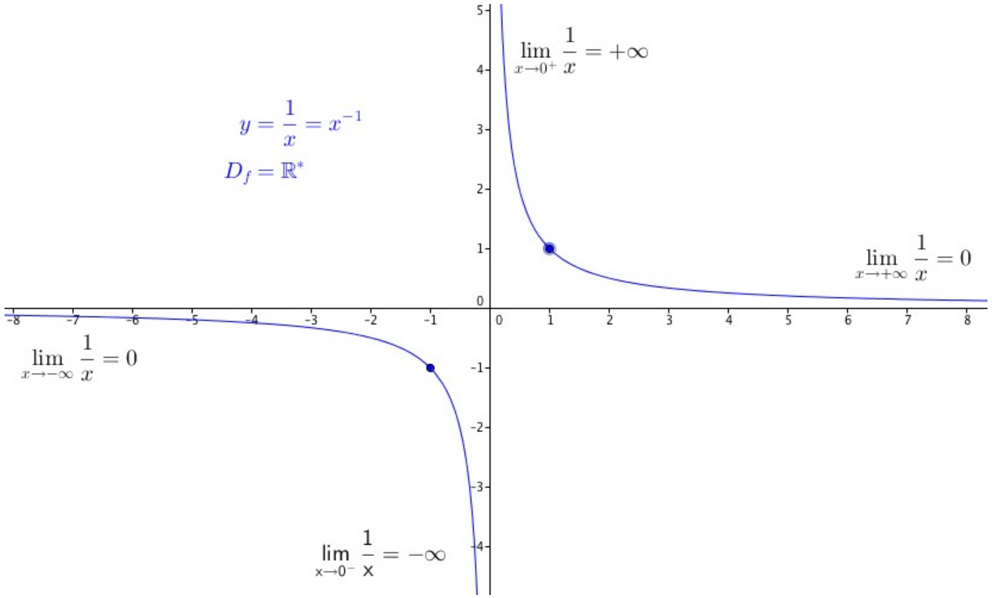




Si $a = -n$ est un entier strictement négatif, alors

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n} = \frac{1}{x.x.x.\ldots.x}$$

La fonction est définie sur $\mathbb{R}^*$ et dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Son sens de variation dépend de n. Les exemples types sont $x \to x^{-1} = \frac{1}{x}$ et $x \to x^{-2} = \frac{1}{x^2}$.

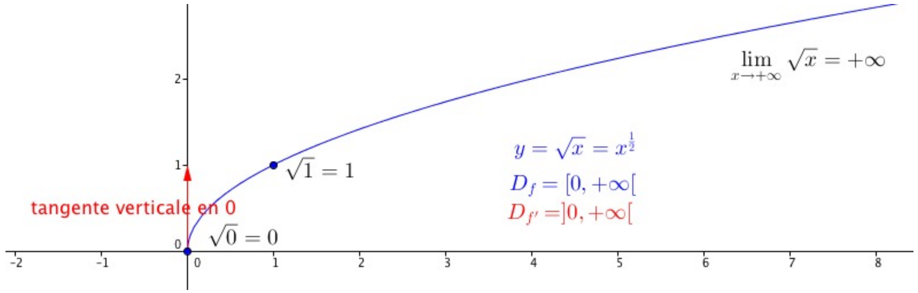


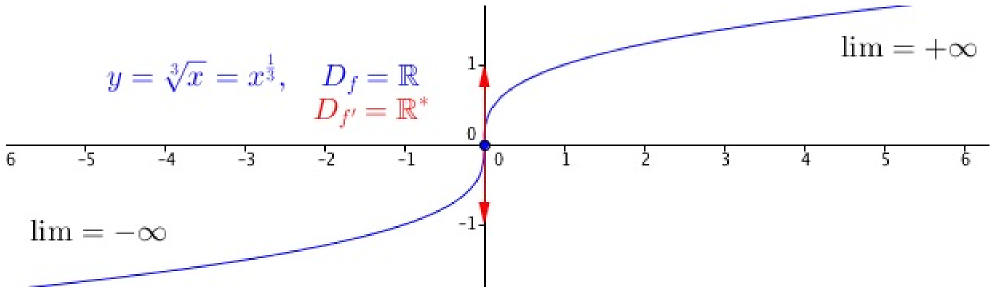
Si $a = \frac{1}{n}$ avec n un entier strictement positif Alors $x^{\frac{1}{n}}$ s'appelle la racine n-ième de x :

$$x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$$

La racine n-ième de x a pour propriété $(\sqrt[n]{x})^n = x$ sur son domaine de définition. Par exemple, on a $\sqrt[4]{16} = 2$ car $2^4 = 16$ et $\sqrt[3]{-27} = -3$ car $(-3)^3 = -27$.

- **Si n est pair :** l'ensemble de définition de la fonction est $\mathbb{R}^+$ et son ensemble de dérivation est $\mathbb{R}^{+*}$. L'exemple type est la fonction racine carrée :$x \to \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$
- **Si n est impair :** l'ensemble de définition de la fonction est $\mathbb{R}$ et son ensemble de dérivation est $\mathbb{R}^*$. L'exemple type est la fonction racine cubique :$x \to \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$





Exercice 9

Déterminer $\sqrt{81}$, $\sqrt[3]{64}$, $\sqrt[3]{-216}$ et $\sqrt[4]{16}$.

5.2 Autres puissances

Si a n'est pas un entier ou une fraction d'entier : on pose

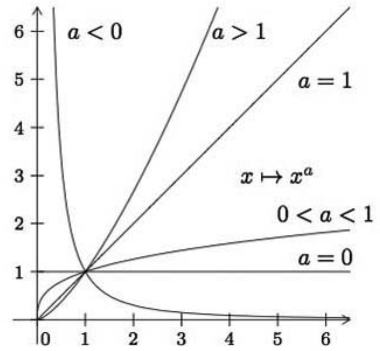
$$x^a = \exp\big(a\ln(x)\big) \qquad \forall x \in]0,+\infty[$$

La fonction est définie et dérivable sur $]0,+\infty[$.

Propriété.

Propriétés de la fonction $f_a : x \mapsto x^a$ pour $a \in \mathbb{R}$:

1. La fonction puissance d'exposant a est dérivable sur $]0,+\infty[$ et l'on a
$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad f_a'(x) = ax^{a-1}.$$
2. Si $a < 0$, la fonction puissance d'exposant a est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$. On a $\lim\limits_{x\to 0^+} x^a = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^a = 0^+$.
3. Si $a > 0$, la fonction puissance d'exposant a est strictement croissante sur $]0,+\infty[$. On a $\lim\limits_{x\to 0^+} x^a = 0^+$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^a = +\infty$.
4. Pour tout $x \in]0,+\infty[$, et tout réel a, on a $x^a = \exp(a\ln(x))$ et $\ln(x^a) = a\ln(x)$.



5.3 Croissances comparées

Lorsque qu'on calcule une limite et qu'on obtient une forme indéterminée (en général $\frac{\infty}{\infty}$ ou $0\times\infty$), les croissances comparée permettent de dire quelle fonction « l'emporte » sur quelle autre.

Propriété 25.

En $+\infty$:
Le logarithme népérien est négligeable devant les fonctions puissances d'exposant strictement positif. $\forall a \in \mathbb{R}, b > 0$,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x^b}=0, \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0, \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{\big(\ln(x)\big)^a}{x^b}=0$$

Les fonctions puissances sont négligeables par rapport à la fonction exponentielle : $\forall a > 0, b \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^b}{e^x}=0, \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^b}{e^{ax}}=0, \qquad \lim_{x\to+\infty} x\,e^{-x}=0$$

Propriété 26.

En 0^+, Le ln est moins fort que les fonctions puissances d'exposant strictement positif. $\forall a \in \mathbb{R}, b > 0$,

$$\lim_{x\to 0^+} x^b\ln(x)=0, \qquad \lim_{x\to 0^+} x\ln(x)=0, \qquad \lim_{x\to 0^+} x^b\big|\ln(x)\big|^a=0$$

Propriété 27.

En $-\infty$, les puissances sont moins fortes que les exponentielles :$\forall a > 0, b > 0$,

$$\lim_{x\to-\infty} |x|^b \,\mathrm{e}^x = 0, \qquad \lim_{x\to-\infty} x\,\mathrm{e}^x = 0, \qquad \lim_{x\to-\infty} |x|^b \,\mathrm{e}^{ax} = 0$$

6 Fonctions trigonométriques

Définition 28.

Les deux fonctions sinus et cosinus sont **$2\pi-$périodiques**, et définie de $\mathbb{R}$ dans l'intervalle $[-1,1]$:

$$\cos : \mathbb{R} \to [-1,1] \qquad \text{et} \qquad \sin : \mathbb{R} \to [-1,1].$$

Leur quotient est la fonction tangente $\pi-$ **périodique** et définie par

$$\tan : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}. \end{array}$$

Propriété 29.

- la fonction cosinus est paire, c'est à dire $\cos(-x) = \cos(x)$
- les fonctions sinus et tangente sont impaires, c'est à dire $\sin(-x) = -\sin(x)$ et $\tan(-x) = -\tan(x)$.

Propriété 30.

- On retiendra les limites classiques :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}\cdot$$

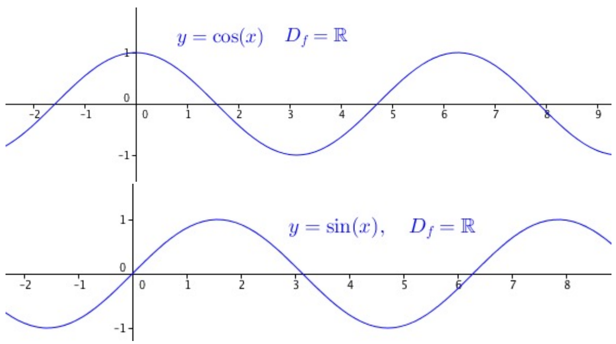
- Les fonctions cosinus et sinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et l'on a

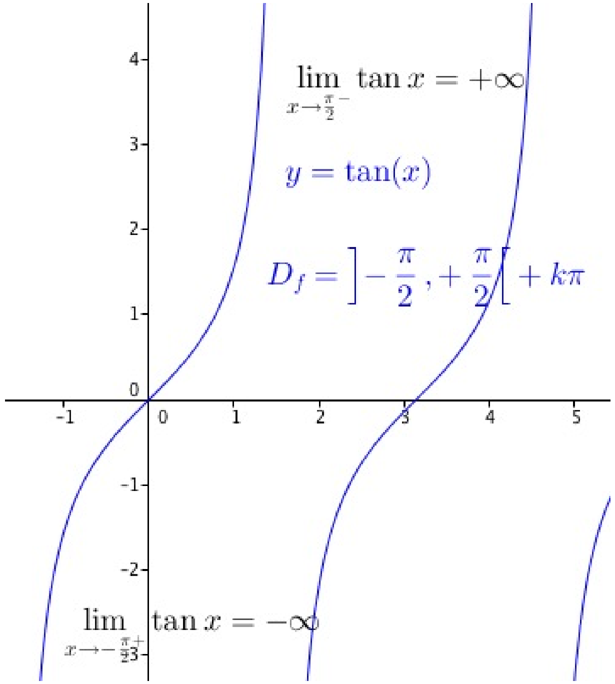
$$\cos' = -\sin \qquad \text{et} \qquad \sin' = \cos\,.$$

La fonction tangente est dérivable sur tout intervalle de la forme $\left]-\dfrac{\pi}{2} + k\pi, \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right[$ (où $k \in \mathbb{Z}$) et sur un tel intervalle, on a

$$\tan' = 1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2}\cdot$$

En particulier, la fonction tangente est strictement croissante sur tout intervalle de cette forme.





Exercice 10

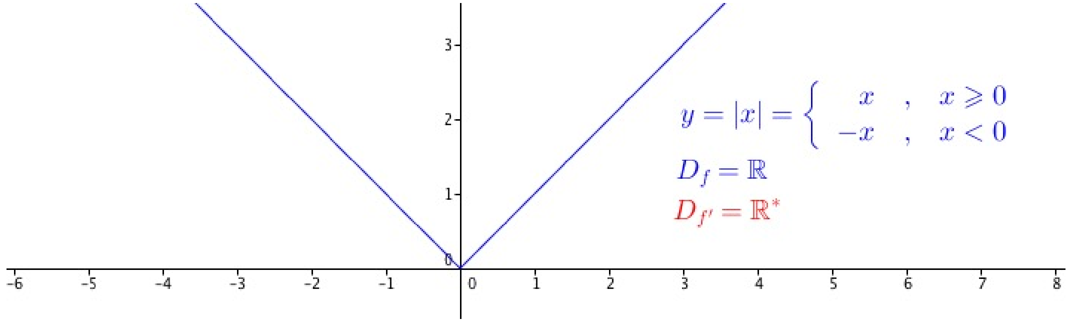
On considère la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(3x+5)$. Pour tout x réel, simplifier $f\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)$. Que peut-on en déduire sur f ?

7 Valeur absolue

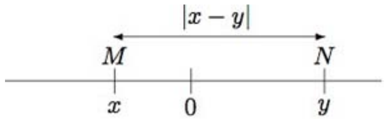
Définition 31.

Pour tout nombre réel x, on appelle valeur absolue de x le nombre réel

$$|x| = \max(\{x, -x\}) = \begin{cases} x \text{ si } x \geqslant 0 \\ -x \text{ si } x < 0. \end{cases}$$



Sur la droite réelle, si M a pour abscisse x et N pour abscisse y, alors la distance MN est égale à $|x-y|$.



Propriété 32.

$\forall x, y \in \mathbb{R}$:

1. $|x| \geqslant 0$. la valeur absolue est positive.
2. $|x| = 0 \iff x = 0$. "La valeur absolue est nulle" équivaut à "le nombre est nul".
3. $|xy| = |x|\,|y|$. La valeur absolue d'un produit est le produit des valeurs absolues.
4. Inégalité triangulaire :

$$|x+y| \leqslant |x| + |y|$$

Résolution d'équation avec valeur absolue. Soit α un réel positif fixé. Soit x réel.

— $|x| = \alpha \iff x = \alpha$ ou $x = -\alpha$
— $|x| \leqslant \alpha \iff -\alpha \leqslant x \leqslant \alpha$,
— $|x| \geqslant \alpha \iff x \geqslant \alpha$ ou $x \leqslant -\alpha$.

Remarque : Attention aux équations avec x^2, ça peut cacher une valeur absolue car $\sqrt{x^2} = |x|$.

Exercice 11

Résoudre l'équation suivante dans $\mathbb{R}$:

$$|x-2| = 5$$

Classe préparatoire ATS **mathématiques**

Fiche d'exercices 5 : Fonctions de base

Exercice 1

($\star$)

1. On donne le tableau de variation suivant pour une fonction g. Tracer l'allure possible de la courbe de f.

x	1		2		4		$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

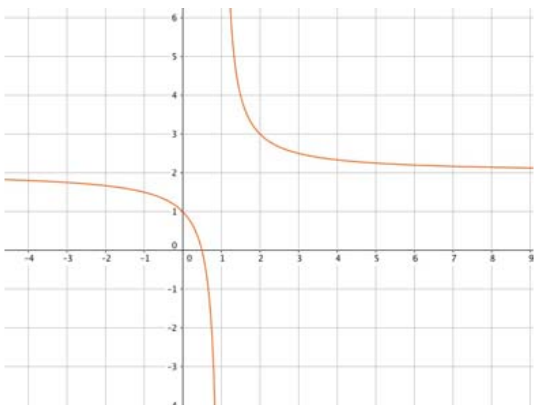
2. Que pensez-vous du tableau de variation suivant ?

x	$-\infty$		1		3	‖	$+\infty$
$h(x)$	-1	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ 0	$\searrow$	$-\infty$

Exercice 2

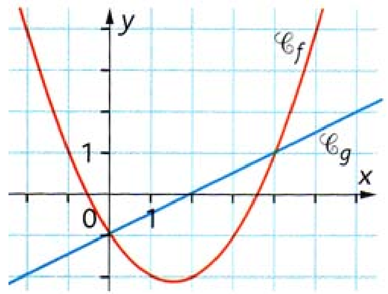
($\star$) A l'aide de la courbe de la fonction f répondre aux questions suivantes :

1. Quel est l'image de 0 par f ?
2. Que se passe-t-il quand $x = 1$?
3. Quels sont les antécédents de 3 par f ? Et ceux de 2 par f ?
4. Quel est l'ensemble image de $[0, 2]\backslash\{1\}$ par f ? Et celui de $[2, +\infty[$?
5. Donner les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.



Exercice 3

($\star\star$) Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ dont voici les courbes représentatives.



Résoudre graphiquement les équations et inéquations suivantes :

$$f(x) = 4, \quad f(x) \leqslant -1, \quad f(x) = g(x), \quad f(x) > g(x)$$

Exercice 4

($\star\star$) À partir des graphes des fonctions usuelles et de transformations simples, tracer, sans étude, le graphe des fonctions suivantes :

$$f_2 : x \mapsto 2 + \cos(x) \qquad f_3 : x \mapsto \sqrt{1-x}$$

$$f_4 : x \mapsto 1 - \exp(x) \qquad f_5 : x \mapsto 3 - \sqrt{2+x}$$

Exercice 5

($\star\star$) Tracer le graphe de la fonction $f(x) = x^2$. A l'aide du graphe, répondre aux questions.

1. Comparer les réels a^2 et b^2 dans les cas suivants :
   (a) $a = 2,501$ et $b = 2,5001$
   (b) $a = -5$ et $b = -6$
   (c) $a = -2,61$ et $b = -2,601$
   (d) $a = -0,5$ et $b = \frac{1}{2}$.
2. Donner le meilleur encadrement de a^2 dans les cas suivants :
   (a) $a \in [2,5]$
   (b) $a \in [-5;-3]$
   (c) $a \in [-2,5]$
   (d) $a \in [-4,3]$
3. Indiquer le minimum et le maximum de la fonction carré sur l'intervalle I :
   (a) $I = [5;20]$
   (b) $I = [-30;-10]$
   (c) $I = [-3;3]$
   (d) $I = [-5;\sqrt{29}]$.

Exercice 6

($\star\star$)

1. Résoudre l'équation $x^{\frac{2}{3}} = 5$ dans $\mathbb{R}^+$.
2. Simplifier l'écriture des nombres $a = \sqrt[3]{2^5} \times \sqrt[3]{2^7}$, $b = \sqrt[3]{\sqrt[4]{4^6}}$, $c = \frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt[3]{x^2}}$.

Exercice 7

($\star\star$) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations d'inconnue x réelle :

(E_1) :	$\ln(x-2) = 2\ln(x-1) - \ln(x+1)$	(E_2) :	$\dfrac{1}{2}\ln(3x-1) < \ln(x+1)$
(E_3) :	$\mathrm{e}^{2x} + 3\,\mathrm{e}^{x} < 4$	(E_4) :	$\ln(2) + \ln(x) + \dfrac{1}{2}\ln(3) = 4$
(E_5) :	$\ln(2) + \ln(x) + \dfrac{1}{2}\ln(3) \geqslant 4$	(E_6) :	$\big(\exp(x)\big)^2 = \exp(1-2x)$
(E_7) :	$\big(\exp(x)\big)^2 \leqslant \exp(1-2x)$	(E_8) :	$x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$

Exercice 8

($\star\star$) Résoudre les équations et inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$:

$$|3x-1| = |x+2|; \quad (x+4)^2 \geqslant 23, \quad |2x+5| < 9, \quad |3x+4| < -1$$